Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Бардос, Л. Секелихиди мл., Э. Видеманн, Об отсутствии единственности для уравнений Эйлера: эффект границы, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 2, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 09:16:55

УДК 517.958+517.951

Посвящается памяти профессора
Марко Иосифовича Вишика

Об отсутствии единственности для уравнений Эйлера: эффект границы

К. Бардос, Л. Секелихиди мл., Э. Видеманн

Рассматриваются начальные данные вращательного типа для двумерных уравнений Эйлера динамики несжимаемой жидкости в круговом кольце. Используя методику выпуклого интегрирования, мы показываем, что существует бесконечно много допустимых слабых решений (т.е. решений с невозрастающей энергией) с этими начальными данными. Как следствие, в ограниченных областях существуют допустимые слабые решения, не являющиеся диссипативными по П.-Л. Лионсу, что составляет контраст со случаем, когда физические границы отсутствуют. Кроме того, показано, что допустимые решения являются диссипативными, если они обладают свойством Гёльдера вблизи границы области.

Библиография: 34 названия.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, неединственность, дикое решение, диссипативные решения, эффект границы, выпуклое интегрирование, предел нулевой вязкости, потоки вращения.

DOI: 10.4213/rm9578

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	4
2. Формулировки основных результатов.....	5
2.1. Задание уравнений.....	5
2.2. Данные с вращательной симметрией.....	6
3. Субрешения и выпуклое интегрирование.....	8
4. Неединственность для начальных данных вращательного типа.....	9
5. Единственность предела нулевой вязкости.....	13
6. Диссипативные решения.....	14
7. Критерий диссипативности допустимого решения.....	16
Список литературы.....	20

Работа второго автора поддержана Европейским советом по исследованиям (грант № 277993). Часть настоящей работы была выполнена в то время, когда третий автор был гостем проекта “Instabilities in Hydrodynamics” Фонда математических наук Парижа. Он благодарен Фонду за поддержку.

1. Введение

Исследования слабых решений уравнений Эйлера динамики несжимаемой жидкости мотивированы (по меньшей мере) двумя свойствами потоков жидкости: наличием неустойчивости, а именно неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, и развитой 3-мерной турбулентностью. Что касается второго аспекта, здесь возникает важная задача в связи со знаменитым “законом $5/3$ ” Колмогорова–Обухова и гипотезой Онзагера относительно сохранения энергии. Тут мы сошлемся на работы [3], [15] и [6], [9], [19], где можно найти дополнительную информацию и узнать о достижениях последнего времени в решении этой задачи.

Что касается первого аспекта, то он активно анализировался с целью выработки определения слабого решения, учитывающего основные свойства подобных неустойчивостей и в то же время обладающего приемлемыми аналитическими свойствами. Поскольку здесь отсутствует аналог теоремы существования у уравнений Навье–Стокса слабых решений в смысле Лере–Хопфа, рассматривался ряд более слабых понятий.

Диссипативные решения уравнений Эйлера динамики несжимаемой жидкости были введены П.-Л. Лионсом [22] как класс решений с двумя желательными свойствами: (i) их существование для произвольных начальных данных и (ii) “единственность сильных решений в классе слабых”, означающая, что диссипативное слабое решение совпадает с сильным, если последнее существует. Как было показано, диссипативные решения уравнений Эйлера несжимаемой жидкости возникают, в частности, как пределы нулевой вязкости [22] и гидродинамические пределы [25]. Главный недостаток диссипативных решений заключался в том, что, вообще говоря, их поле скоростей не является решением уравнений Эйлера в смысле распределений.

С другой стороны, слабые решения (т.е. решения в смысле распределений, обладающие некоторыми дополнительными свойствами) строятся различными методами; см. [10], [11], [26], [28], [29], [31], [32], [34]. Многим из них в высокой степени присуще отсутствие единственности, так что даже свойство единственности сильных решений в классе слабых не обязательно имеет место (здесь можно сослаться на обзор [12]). В частности, в [34] для любых начальных данных было установлено существование глобальных по времени слабых решений.

В условиях высокой степени неединственности возникает естественный вопрос, есть ли какие-нибудь критерии отбора слабых решений. По этому поводу в [11], [13] было замечено, что когда область не имеет границы, слабое решение будет диссипативным по Лионсу, если для него выполнено слабое энергетическое неравенство

$$\int |v(x, t)|^2 dx \leq \int |v(x, 0)|^2 dx \quad \text{для почти всех } t > 0. \quad (1)$$

В [11] это условие называется условием допустимости, по аналогии с энтропийным условием, возникающим в гиперболических законах сохранения [8]. Допустимость оказалась полезным критерием отбора слабых решений, так как даже слабая форма (1) этого условия влечет единственность сильных решений

в классе слабых, требуемую от диссипативных решений (более сильные варианты энергетического неравенства обсуждаются в [11]). Это верно не только для решений в смысле распределений, но даже для мерозначных решений (см. [5]).

Несмотря на единственность сильных решений в классе слабых, существует большое подмножество начальных данных (на самом деле всюду плотное в L^2), заданных на всем пространстве или в комбинации с периодическими граничными условиями [32] (см. также [31]), для которых начально-краевая задача имеет бесконечно много *допустимых* слабых решений. Такие начальные данные, называемые “дикими”, не могут быть регулярными.

Неединственность допустимых слабых решений тесно связана с наличием неустойчивости. Например, в работе [30] неединственность допустимых слабых решений была продемонстрирована для начальных данных

$$v_0(x) = \begin{cases} e_1, & \text{если } x_d \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ -e_1, & \text{если } x_d \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \end{cases} \quad (2)$$

включающих плоскую вихревую поверхность и периодически продолженных на тор $\mathbb{T}^d$. Заметим, что в этом случае очевидно имеется стационарное решение, но результат [30] заключается в том, что есть еще бесконечно много нестационарных решений. Их общей чертой является существование для $t > 0$ расширяющегося региона “турбулентности”, охватывающего начальную вихревую поверхность, что сильно напоминает распространение особенностей в классической задаче Кельвина–Гельмгольца. Другие подобные примеры были позднее найдены в [4], а также недавно в [7] для системы Эйлера динамики сжимаемой жидкости.

В настоящей статье, вдохновляемые идеей, что именно неустойчивость Кельвина–Гельмгольца лежит в основе неединственности допустимых слабых решений, мы исследуем класс областей с границей. Мы покажем, что наличие (гладкой) границы может иметь результатом тот же эффект расширяющегося региона турбулентности, что и в [30]. Как следствие, мы отмечаем, что в областях с границей допустимость не означает единственности сильных решений в классе слабых.

2. Формулировки основных результатов

2.1. Задание уравнений. Мы изучаем слабые решения начально-краевой задачи для уравнений Эйлера несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} v &= 0, \\ v|_{t=0} &= v_0, \end{aligned} \quad (3)$$

дополненных кинематическим краевым условием

$$v|_{\partial\Omega} \cdot \nu = 0.$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, – область с достаточно гладкой границей, $T > 0$ – конечный момент времени, $v: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ – поле скоростей, $p: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ – (скалярное) давление, v_0 – начальная скорость, а ν – единичная внутренняя нормаль к границе Ω .

Для точного определения слабых решений рассмотрим пространство соленоидальных векторных полей в Ω (ср. [16; гл. III]):

$$H(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) : \int_{\Omega} v \cdot \nabla p \, dx = 0 \right. \\ \left. \text{для всех } p \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega) \text{ с } \nabla p \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Пусть $v_0 \in H(\Omega)$. По определению, *допустимое слабое решение* системы (3) с начальными данными v_0 – это такое векторное поле $v \in L^\infty(0, T; H(\Omega))$, что для всякой основной функции $\phi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ такой, что $\operatorname{div} \phi = 0$, выполнено равенство

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t \phi \cdot v + \nabla \phi : v \otimes v) \, dx \, dt + \int_{\Omega} v_0(x) \cdot \phi(x, 0) \, dx = 0,$$

а также энергетическое неравенство (1).

Заметим, кстати, что на самом деле допустимые слабые решения можно считать элементами пространства $C([0, T]; H_w(\Omega))$, где $H_w(\Omega)$ – это пространство $H(\Omega)$ со слабой L^2 -топологией. И действительно, диссипативные решения по Лионсу являются элементами этого пространства. Тем не менее для простоты мы будем считать только, что поля скоростей являются элементами большего пространства $L^\infty(0, T; H(\Omega))$.

2.2. Данные с вращательной симметрией. В статье рассматриваются двумерные начальные данные с вращательной симметрией. Отметим, что ограничение на размерность введено исключительно для простоты изложения – все конструкции и подходы легко распространить на более высокую размерность. Область в виде кругового кольца рассматривается также для простоты изложения – ее нетривиальная топология не играет никакой роли для результатов.

Под данными “вращательного типа” мы подразумеваем начальные данные вида

$$v_0(x) = \alpha_0(r)(\sin \theta, -\cos \theta) \quad (4)$$

в кольце

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho < |x| < R\}, \quad (5)$$

где $0 < \rho < R < \infty$. Как известно, для любого выбора α_0 векторные поля (4) задают стационарные решения уравнений Эйлера; их часто приводят в качестве наглядных примеров при исследовании потоков несжимаемой жидкости [1], [24], [27].

Зафиксируем радиус r_0 , где $\rho < r_0 < R$, и рассмотрим начальные данные в кольце, описываемые соотношением (4), где

$$\alpha_0(r) = \begin{cases} -\frac{1}{r^2}, & \text{если } \rho < r < r_0, \\ \frac{1}{r^2}, & \text{если } r_0 < r < R, \end{cases} \quad (6)$$

что соответствует потоку вращения со скачком на окружности $\{r = r_0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ω – круговое кольцо (5), $T > 0$ – конечный момент времени, а v_0 имеет вращательный тип как в (4) и (6). Тогда помимо стационарного решения $v(\cdot, t) = v_0$ существует бесконечное количество нестационарных допустимых слабых решений уравнений Эйлера в $\Omega \times (0, T)$ с начальным значением v_0 . У бесконечного множества решений из их числа энергия строго убывает и у бесконечного множества решений – сохраняется.

Доказательство, которое мы приводим ниже в разделе 4, использует методы из работы [11] и аналогично конструкции, приведенной в [30].

Что касается поиска подходящих принципов отбора, в литературе широко обсуждается отбор только вязкостных решений, т. е. решений, полученных как слабый предел решений Лере–Хопфа при стремлении вязкости к нулю. В случае начальных данных вида (2) легко проверить (к примеру, см. [4]), что вязкостное решение должно совпадать со стационарным. То же самое происходит в случае данных вращательного типа (6), что было отмечено, например, в [23] (где на самом деле был получен более глубокий результат для начальных данных в виде локализованного вихря). Для удобства читателей в разделе 5 мы приводим элементарное доказательство соответствующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – круговое кольцо, и пусть начальные данные задаются выражением (4). Тогда любая последовательность решений Лере–Хопфа уравнений Навье–Стокса с вязкостью, стремящейся к нулю, соответствующая тем же начальным данным, сходится в сильном смысле к стационарному решению $v(\cdot, t) = v_0$ уравнений Эйлера.

В заключение обсудим связь между допустимыми слабыми решениями и диссипативными решениями Лионса в ограниченных областях. Для удобства читателей в разделе 6 мы напомним точное определение диссипативных решений. В качестве следствия из теоремы 1 мы покажем в разделе 6, что, в отличие от ситуации, когда границы нет, допустимые слабые решения не обязательно диссипативны.

СЛЕДСТВИЕ 3. В Ω существуют допустимые слабые решения, не являющиеся диссипативными решениями.

Следствие 3 говорит о том, что в присутствии границы для допустимых слабых решений не обязательно выполнено свойство единственности сильных решений в классе слабых. На формальном уровне это объясняется тем, что у сильного решения в ограниченной области мы никак не можем проконтролировать граничное поведение. По этой причине в разделе 7 мы исследуем, что происходит, когда можно дополнительно контролировать граничное поведение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с C^2 -границей. Пусть v – допустимое слабое решение уравнений (3) в Ω такое, что равномерно по t для некоторых $\delta > 0$ и $\alpha > 0$ оно обладает свойством Гёльдера с показателем α на множестве

$$\Gamma_\delta = \{x \in \bar{\Omega} : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Тогда v – диссипативное решение.

3. Субрешения и выпуклое интегрирование

Для доказательства теоремы 1 напомним подходы, развитые в [10], [11], внося небольшие изменения для случая областей с границей. Детали можно найти в обзоре [12] и в недавно опубликованном курсе лекций [31].

Сначала напомним определение субрешения. Зафиксируем неотрицательную функцию

$$\bar{e} \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)),$$

которая будет играть роль плотности (кинетической) энергии. Мы будем работать в пространственно-временной области

$$\Omega_T := \Omega \times (0, T),$$

где либо $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – открытая липшицева область, либо $\Omega = \mathbb{T}^d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (субрешение). Субрешением уравнений Эйлера несжимаемой жидкости относительно плотности кинетической энергии $\bar{e}$ называется тройка

$$(\bar{v}, \bar{u}, \bar{q}) : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_0^{d \times d} \times \mathbb{R},$$

где $\bar{v} \in L^\infty(0, T; H(\Omega))$, $\bar{u} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_T)$, $\bar{q} \in \mathcal{D}'(\Omega_T)$ (т.е. $\bar{q}$ есть распределение), такая, что

$$\begin{cases} \partial_t \bar{v} + \text{div } \bar{u} + \nabla \bar{q} = 0 \\ \text{div } \bar{v} = 0 \end{cases} \quad \text{в смысле распределений} \quad (7)$$

и, кроме того,

$$\bar{v} \otimes \bar{v} - \bar{u} \leq \frac{2}{d} \bar{e} I \quad \text{для почти всех } (x, t). \quad (8)$$

Здесь $\mathcal{S}_0^{d \times d}$ – множество бесследовых симметричных матриц размера $d \times d$, а I – единичная матрица. Заметим, что подрешения автоматически удовлетворяют неравенству $|\bar{v}|^2/2 \leq \bar{e}$ п.в. Вдобавок, если п.в. в (8) имеет место равенство, то $\bar{v}$ – слабое решение уравнений Эйлера.

Неравенство (8) удобно переформулировать в терминах *обобщенной плотности энергии*

$$e(\bar{v}, \bar{u}) = \frac{d}{2} |\bar{v} \otimes \bar{v} - \bar{u}|_\infty,$$

где $|\cdot|_\infty$ – операторная норма матрицы (наибольшее собственное значение в случае симметрической матрицы). Тогда неравенство (8) эквивалентно следующему:

$$e(\bar{v}, \bar{u}) \leq \bar{e} \quad \text{п.в.} \quad (9)$$

Ключевым моментом выпуклого интегрирования является замечание, что в случае *строгого неравенства* в (8) мы можем “приправить” субрешение (разумеется, множеством способов) высокочастотными колебаниями так, что получится слабое решение. Также важно заметить, что, поскольку в ходе выпуклого интегрирования к субрешению добавляются только возмущения с компактным носителем (в пространстве-времени), граничные и начальные данные получаемых слабых решений совпадают с таковыми у субрешения. В этом и заключается содержание следующей теоремы, которая по существу является предложением 2 из [11].

ТЕОРЕМА 6 (критерий в терминах субрешений). Пусть $\bar{e} \in L^\infty(\Omega_T)$, и пусть $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{q})$ – субрешение. Пусть также $\mathcal{U} \subset \Omega_T$ – такая подобласть, что $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{q})$ и $\bar{e}$ непрерывны в $\mathcal{U}$,

$$\begin{aligned} e(\bar{v}, \bar{u}) &< \bar{e} \quad \text{в } \mathcal{U}, \\ e(\bar{v}, \bar{u}) &= \bar{e} \quad \text{н.в. в } \Omega_T \setminus \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда существует бесконечно много слабых решений уравнения Эйлера $v \in L^\infty(0, T; H(\Omega))$, для которых

$$\begin{aligned} v &= \bar{v} && \text{н.в. в } \Omega_T \setminus \mathcal{U}, \\ \frac{1}{2}|v|^2 &= \bar{e} && \text{н.в. в } \Omega_T, \\ p &= \bar{q} - \frac{2}{d}\bar{e} && \text{н.в. в } \Omega_T. \end{aligned}$$

Если к тому же

$$\bar{v}(\cdot, t) \rightharpoonup v_0(\cdot) \quad \text{в } L^2(\Omega) \text{ при } t \rightarrow 0, \quad (11)$$

то v являются решениями задачи Коши (3).

Упомянем также [31], где подробно обсуждается метод выпуклого интегрирования; в частности, сформулированная теорема – это теорема 7 из [31].

4. Неединственность для начальных данных вращательного типа

Используя подходы из раздела 3, здесь мы докажем теорему 1. Итак, пусть

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho < |x| < R\}$$

– круговое кольцо, зафиксируем $r_0 \in (\rho, R)$ и положим

$$v_0(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|^3}x^\perp, & |x| < r_0, \\ \frac{1}{|x|^3}x^\perp, & |x| > r_0, \end{cases} \quad (12)$$

где $x^\perp = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$. Мы построим субрешения методом, аналогичным методу работы [30].

В силу теоремы 6 из предыдущего раздела, достаточно проверить существование субрешений с нужными свойствами. Зафиксируем малые константы $\lambda > 0$ (“скорость распространения турбулентности”) и $\varepsilon \geq 0$ (“интенсивность диссипации энергии”), значения которых мы уточним в дальнейшем.

Мы будем искать субрешения $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{q})$ (ср. с определением 5 – мы еще не зафиксировали функцию плотности энергии $\bar{e}$) вида

$$\bar{v}(x, t) = \alpha(r, t) \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix},$$

где $\alpha(r, 0) = \alpha_0(r)$, (r, θ) – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(r, t) & \gamma(r, t) \\ \gamma(r, t) & -\beta(r, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta \cos(2\theta) + \gamma \sin(2\theta) & \beta \sin(2\theta) - \gamma \cos(2\theta) \\ \beta \sin(2\theta) - \gamma \cos(2\theta) & -\beta \cos(2\theta) - \gamma \sin(2\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

и

$$\bar{q} = \bar{q}(r).$$

Заметим, кстати, что, выбрав $\alpha(r, t) = \alpha_0(r)$ для всех $t \geq 0$, $\beta = -\alpha^2/2$, $\gamma = 0$ и

$$\bar{q}(r) = \frac{1}{2}\alpha^2 + \int_{\rho}^r \frac{\alpha(s)^2}{s} ds, \quad (14)$$

мы получаем хорошо известное стационарное решение (в формуле для $\bar{q}$ интеграл выражает физическое давление).

Подставив этот анзац в (7), мы получим два уравнения. Точнее, используя формулы

$$\nabla_x r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \nabla_x \theta = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

мы получаем

$$\begin{aligned} &\partial_t \alpha \sin \theta + \partial_r \beta [\cos \theta \cos(2\theta) + \sin \theta \sin(2\theta)] + \partial_r \gamma [\cos \theta \sin(2\theta) - \sin \theta \cos(2\theta)] \\ &+ \frac{2}{r} \beta [\sin \theta \sin(2\theta) + \cos \theta \cos(2\theta)] + \frac{2}{r} \gamma [-\sin \theta \cos(2\theta) + \cos \theta \sin(2\theta)] \\ &+ \partial_r \bar{q} \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &-\partial_t \alpha \cos \theta + \partial_r \beta [\cos \theta \sin(2\theta) - \sin \theta \cos(2\theta)] + \partial_r \gamma [-\cos \theta \cos(2\theta) - \sin \theta \sin(2\theta)] \\ &+ \frac{2}{r} \beta [-\sin \theta \cos(2\theta) + \cos \theta \sin(2\theta)] + \frac{2}{r} \gamma [-\sin \theta \sin(2\theta) - \cos \theta \cos(2\theta)] \\ &+ \partial_r \bar{q} \sin \theta = 0. \end{aligned}$$

Если первое уравнение умножить на $\sin \theta$, сложить его со вторым, умноженным на $\cos \theta$, воспользоваться тождествами $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$ и $2 \sin \theta \cos \theta =$

$\sin(2\theta)$, а затем выделить члены, содержащие $\sin(2\theta)$ и $\cos(2\theta)$, то мы придем к двум уравнениям

$$\begin{aligned}\partial_r \beta + \frac{2}{r} \beta + \partial_r \bar{q} &= 0, \\ \partial_t \alpha + \partial_r \gamma + \frac{2}{r} \gamma &= 0.\end{aligned}\tag{15}$$

Легко проверить, что для выбранного анзаца они эквивалентны исходной системе (7).

Если взять $\bar{q}(r)$ вида (14) и $\beta = -\alpha^2/2$, то первое уравнение выполнено, совершенно (с точностью до знака) аналогично работе [30]. Второе уравнение также похоже на уравнение в [30], но оно содержит дополнительный “центробежный” член $(2/r)\gamma$ и мы не можем просто положить $\gamma = \alpha^2/2$, как в [30], и получить уравнение Бюргерса. Однако мы замечаем, что $\partial_r(r^2\gamma) = 2r\gamma + r^2\partial_r\gamma$, и полагаем

$$\alpha(r, t) = \frac{1}{r^2} f(r, t)$$

и

$$\gamma = -\frac{\lambda}{2r^2}(1 - f^2) = -\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{r^2} - r^2\alpha^2\right),\tag{16}$$

так что второе уравнение в (15), после умножения на r^2 , превращается в уравнение Бюргерса

$$\partial_t f + \frac{\lambda}{2} \partial_r(f^2) = 0.\tag{17}$$

Теперь начальным данным (6) для α соответствуют начальные данные

$$f(r, 0) = \begin{cases} -1 & \text{при } \rho < r < r_0, \\ 1 & \text{при } r_0 < r < R. \end{cases}$$

Уравнение Бюргерса (17) с этими начальными данными имеет решение в виде волны разрежения для $t \in [0, T]$, при условии, что $\lambda > 0$ достаточно мало (при выбранных T и r_0 , $\rho < r_0 < R$); оно задается равенствами

$$f(r, t) = \begin{cases} -1 & \text{при } \rho < r < r_0 - \lambda t, \\ \frac{r - r_0}{\lambda t} & \text{при } r_0 - \lambda t < r < r_0 + \lambda t, \\ 1 & \text{при } r_0 + \lambda t < r < R. \end{cases}\tag{18}$$

Итак, полагая $\alpha(r, t) = f(r, t)/r^2$, для f из (18), $\beta = -\alpha^2/2$, γ из (16) и $\bar{q}$ из (14) мы находим решение уравнений (7) с начальными данными, соответствующими (12).

Остается разобраться с обобщенной энергией. Поскольку $\bar{u}$ задано в (13) и вдобавок

$$\begin{aligned}\bar{v} \otimes \bar{v} &= \alpha(r, t)^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha(r, t)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},\end{aligned}$$

и поскольку собственные значения матрицы не меняются при сопряжении с помощью ортогонального преобразования, можно вычислить $e(\bar{v}, \bar{u}) = |\bar{v} \otimes \bar{v} - \bar{u}|_\infty$, найдя наибольшее собственное значение матрицы

$$\begin{pmatrix} -\beta & -\gamma \\ -\gamma & \alpha^2 + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha^2 & \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{r^2} - r^2\alpha^2\right) \\ \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{r^2} - r^2\alpha^2\right) & \frac{1}{2}\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $|\alpha| \leq 1/r^2$ и $\lambda \geq 0$, легко видеть, что

$$e(\bar{v}, \bar{u}) = \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{r^2} - r^2\alpha^2\right) = \frac{1}{2r^4}[1 - (1 - r^2\lambda)(1 - f(r, t)^2)]. \quad (19)$$

Наконец, положим

$$\bar{e}(r, t) = \frac{1}{2r^4}[1 - \varepsilon(1 - r^2\lambda)(1 - f(r, t)^2)],$$

где ε достаточно мало, так что $\bar{e} > 0$. Заметим, что

$$e(\bar{v}, \bar{u}) \leq \bar{e} \leq \frac{1}{2}|v_0|^2 \quad \text{в } \Omega_T.$$

Точнее, подводя итог выкладкам этого раздела, мы получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Для любого выбора постоянных ε, λ , удовлетворяющих условиям*

$$0 < \lambda < \min\left\{\frac{1}{R^2}, \frac{r_0 - \rho}{T}, \frac{R - r_0}{T}\right\},$$

$$0 \leq \varepsilon < \frac{1}{1 - \rho^2\lambda},$$

в Ω_T существует такое субрешение $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{q})$ относительно плотности кинетической энергии

$$\bar{e}(r, t) = \frac{1}{2r^4}[1 - \varepsilon(1 - r^2\lambda)(1 - f(r, t)^2)]$$

с начальными данными $\bar{v}(x, 0) = v_0(x)$ из (12), что для

$$\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R}^2 : r_0 - \lambda t < |x| < r_0 + \lambda t\}$$

выполнены соотношения

$$e(\bar{v}, \bar{u}) < \bar{e} \quad \text{в } \mathcal{U},$$

$$e(\bar{v}, \bar{u}) = \bar{e} \quad \text{в } \Omega_T \setminus \mathcal{U}.$$

Теперь мы можем доказать теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Применив предложение 7 с $\varepsilon \geq 0$, получим субрешение $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{q})$. Воспользовавшись результатом теоремы 6 для этого субрешения, мы видим, что существует бесконечно много слабых решений $v \in L^\infty(0, T; H(\Omega))$, удовлетворяющих равенству $|v|^2 = 2\bar{e}$ п.в. в Ω_T и с начальными данными v_0 . Для проверки их допустимости заметим, что

$$\int_{\Omega} |v(x, t)|^2 dx = \int_{\Omega} 2\bar{e}(x, t) dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^4} dx = \int_{\Omega} |v_0(x)|^2 dx.$$

Наконец, отметим, что, выбрав $\varepsilon > 0$, мы получим решения со строго убывающей энергией, а выбрав $\varepsilon = 0$, мы получим сохранение энергии. Теорема доказана.

5. Единственность предела нулевой вязкости

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Рассмотрим уравнения Навье–Стокса с вязкостью $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t v_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= \varepsilon \Delta v_\varepsilon, \\ \operatorname{div} v_\varepsilon &= 0, \\ v_\varepsilon(\cdot, 0) &= v_0, \\ v_\varepsilon|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Как известно, в случае двух пространственных переменных уравнения Навье–Стокса имеют единственное слабое решение (решение Лере–Хопфа), удовлетворяющее энергетическому равенству

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_\varepsilon(x, t)|^2 dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon(x, s)|^2 dx ds = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_0(x)|^2 dx$$

для всякого $t \in [0, T]$; см. подробнее, к примеру, [17]. Оказывается, что, когда начальные данные v_0 обладают вращательной симметрией вида (4), единственное решение Лере–Хопфа также обладает такой симметрией.

Для доказательства воспользуемся анзацем

$$v_\varepsilon(x, t) = \alpha_\varepsilon(r, t) \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$p_\varepsilon = p_\varepsilon(r)$, где мы опять используем полярные координаты. Подставив этот анзац в первое уравнение из (20), получим

$$\partial_t \alpha_\varepsilon \sin \theta - \frac{\alpha_\varepsilon^2}{r} \cos \theta + \partial_r p_\varepsilon \cos \theta = \varepsilon \left(\frac{\partial_r \alpha_\varepsilon}{r} + \partial_r^2 \alpha_\varepsilon - \frac{\alpha_\varepsilon}{r^2} \right) \sin \theta.$$

Взяв

$$p_\varepsilon(r) = \int_\rho^r \frac{\alpha_\varepsilon(s)^2}{s} ds$$

и поделив на $\sin \theta$, мы придем к параболическому уравнению

$$\partial_t \alpha_\varepsilon = \varepsilon \left(\frac{\partial_r \alpha_\varepsilon}{r} + \partial_r^2 \alpha_\varepsilon - \frac{\alpha_\varepsilon}{r^2} \right). \tag{22}$$

Подставив анзац во второе уравнение из (20), мы также получим (22), что легко увидеть после аналогичных выкладок. Более того, бездивергентность вытекает автоматически, начальное условие превращается в

$$\alpha_\varepsilon(\cdot, 0) = \alpha_0, \quad (23)$$

где α_0 задано в (6), а граничное условие переходит в

$$\alpha_\varepsilon(\rho) = \alpha_\varepsilon(R) = 0. \quad (24)$$

Итак, мы приходим к корректной начально-краевой задаче (22)–(24). Хорошо известно (см., к примеру, [14; раздел 7.1]), что для всякого $\varepsilon > 0$ это параболическое уравнение имеет единственное слабое решение. Однако из проведенных выкладок следует, что если α_ε – решение параболической задачи, то соответствующее v_ε , заданное в (21), является (единственным) решением Лере–Хопфа задачи Навье–Стокса (20) и в то же время решает начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \partial_t v_\varepsilon &= \varepsilon \Delta v_\varepsilon, \\ \operatorname{div} v_\varepsilon &= 0, \\ v_\varepsilon(\cdot, 0) &= v_0, \\ v_\varepsilon|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку решения уравнения теплопроводности сходятся в сильном смысле к стационарному решению и поскольку мы показали, что для наших начальных данных уравнение теплопроводности совпадает с уравнениями Навье–Стокса, предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Изложенные выше рассуждения можно провести и для начальных данных, заданных в цилиндре $Z = \Omega \times \mathbb{T} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$, где, как и прежде, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – кольцо. Действительно, для так называемых 21/2-мерных начальных данных $V_0(x_1, x_2) = (v_0(x_1, x_2), w(x_1, x_2))$ на Z , где v_0 имеет вид (4), имеется бесконечно много допустимых слабых решений, но только решение

$$V(x_1, x_2, t) = (v_0(x_1, x_2), w(x_1 - (v_0)_1 t, x_2 - (v_0)_2 t))$$

возникает как предел нулевой вязкости. Мы опускаем подробности, но отметим, что это можно доказать аналогично [4], где такой анализ был проведен для сдвиговых течений.

6. Диссипативные решения

Пусть $S(w) = (\nabla w + \nabla w^t)/2$ обозначает симметризованный градиент векторного поля w , и пусть

$$E(w) = -\partial_t w - P(w \cdot \nabla w),$$

где P – проектор Лере–Гельмгольца на $H(\Omega)$.

Следующее определение из [22] приведено здесь в версии из [2] для ограниченных областей. Читатель может обратиться к этим источникам за мотивировками определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть Ω – ограниченная область с C^1 -границей. Векторное поле $v \in C([0, T]; H_w(\Omega))$ называется *диссипативным решением* уравнений Эйлера (3), если для всякого бездивергентного основного векторного поля $w \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$, удовлетворяющего условию $w \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v - w|^2 dx \leq & \exp\left(2 \int_0^t \|S(w)\|_{\infty} ds\right) \int_{\Omega} |v(x, 0) - w(x, 0)|^2 dx \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \exp\left(2 \int_s^t \|S(w)\|_{\infty} d\tau\right) E(w) \cdot (v - w) dx ds \quad (25) \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, T]$.

Из этого определения сразу вытекает единственность сильных решений в классе слабых (предложение 4.1 из [22]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $v \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$ – решение уравнений Эйлера (3). Тогда v – единственный представитель класса диссипативных решений с теми же начальными данными.

Это можно увидеть, просто выбрав $w = v$ в качестве основной функции в определении диссипативных решений.

Докажем теперь следствие 3, показав, что допустимые решения в ограниченных областях не обязательно единственны, даже в случае гладких начальных данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Вспоминая конструкцию из раздела 4, положим

$$\tilde{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho < |x| < r_0\} \subset \Omega.$$

Из определения субрешения непосредственно следует, что его ограничение на подобласть само является субрешением. Так что мы можем рассматривать субрешение $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{q})$ из раздела 4 как субрешение в $\tilde{\Omega}$ с той же плотностью энергии $\bar{e}$, что и в предложении 7, и с начальными данными

$$\bar{v}(x, 0) = -\frac{x^{\perp}}{|x|^3} \quad \text{при } x \in \tilde{\Omega}$$

(ср. с (12)). Теперь мы применим к этому субрешению в $\tilde{\Omega}$ теорему 6, что, как и в доказательстве теоремы 1, даст нам бесконечно много допустимых слабых решений.

Поскольку начальные данные $\bar{v}(x, 0)$ в $\tilde{\Omega}$ гладкие, имеется единственное сильное решение (на самом деле равное стационарному решению). Таким образом, единственность сильных решений в классе слабых не имеет места, что с необходимостью означает, что нестационарные допустимые слабые решения не диссипативны по Лионсу.

7. Критерий диссипативности допустимого решения

Как мы видели, в ограниченных областях допустимые слабые решения не обязательно диссипативны. Однако если такое решение обладает свойством Гёльдера вблизи границы области, то сформулированная выше теорема 4 утверждает, что ситуация меняется. В этом разделе мы собираемся доказать эту теорему. Мы следуем дополнению В к [11], но должны учитывать при этом, что в определении диссипативных решений нам придется работать с основными функциями, не обязательно имеющими компактный носитель в Ω .

Итак, пусть Ω – ограниченная область с C^2 -границей в $\mathbb{R}^2$, а v – допустимое слабое решение уравнений Эйлера (3), как в формулировке теоремы 4. Будем пока считать, что для всякого бездивергентного поля $w \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$, удовлетворяющего краевому условию, выполнено равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \cdot w \, dx = \int_{\Omega} (S(w)(v - w) \cdot (v - w) - E(w) \cdot v) \, dx \quad (26)$$

в смысле обобщенных функций, где $E(w)$ – величина, определенная в начале раздела 6. Мы покажем, что из (26) уже следует, что v – диссипативное решение. Действительно, это доказывается в точности так же, как в [11]: с одной стороны, поскольку v допустимое,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v|^2 \, dx \leq 0 \quad (27)$$

в смысле обобщенных функций. С другой стороны, используя определение $E(w)$ и тождество $\int_{\Omega} (w \cdot \nabla w) \cdot w \, dx = 0$ (следующее из $w \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$), получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w|^2 \, dx = -2 \int_{\Omega} E(w) \cdot w \, dx. \quad (28)$$

Так как

$$\int_{\Omega} |v - w|^2 \, dx = \int_{\Omega} |v|^2 \, dx + \int_{\Omega} |w|^2 \, dx - 2 \int_{\Omega} v \cdot w \, dx,$$

то, объединяя это равенство с (26), (27) и (28), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v - w|^2 \, dx &\leq 2 \int_{\Omega} (E(w) \cdot (v - w) - S(w)(v - w) \cdot (v - w)) \, dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} E(w) \cdot (v - w) \, dx + 2 \|S(w)\|_{\infty} \int_{\Omega} |v - w|^2 \, dx \end{aligned}$$

в смысле обобщенных функций. Теперь, как в [11], мы применим неравенство Гронуолла и получим (25) для всех $t \in [0, T]$. Таким образом, остается доказать (26) для любой основной функции w .

В [11] тождество (26) было доказано для w , имеющей компактный носитель в Ω почти во все моменты времени (см. рассуждения, следующие за (96) в [11]). Теперь допустим, что $w \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$ – бездивергентное векторное поле, удовлетворяющее $w \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, но не обязательно имеющее компактный носитель в пространстве. Мы аппроксимируем w подходящими векторными

полями с компактным носителем в духе Като [21] (см., в частности, [21; раздел 4]).

Для начала предположим, что область Ω односвязна, так что у $\partial\Omega$ одна компонента связности. Поскольку поле w бездивергентно, существует функция $\psi \in C([0, T]; C^2(\bar{\Omega})) \cap C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$, для которой

$$w(x, t) = \nabla^\perp \psi(x, t)$$

и $\psi|_{\partial\Omega} = 0$. Теперь пусть $\chi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — такая гладкая неотрицательная функция, что

$$\chi(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s < 1, \\ 1 & \text{при } s > 2; \end{cases}$$

положим

$$w_\varepsilon(x, t) = \nabla^\perp \left(\chi \left(\frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\varepsilon} \right) \psi(x, t) \right).$$

Тогда по лемме 14.16 из [18] для некоторого $\eta > 0$, зависящего от Ω , функция $x \mapsto \text{dist}(x, \partial\Omega)$ является C^2 -гладкой в области

$$\Gamma_\eta = \{x \in \bar{\Omega}: \text{dist}(x, \partial\Omega) < \eta\}, \quad (29)$$

так что $w_\varepsilon \in C_c^1(\Omega \times [0, T])$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Значит, для w_ε выполнено равенство (26):

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega v \cdot w_\varepsilon dx = \int_\Omega (S(w_\varepsilon)(v - w_\varepsilon) \cdot (v - w_\varepsilon) - E(w_\varepsilon) \cdot v) dx. \quad (30)$$

Теперь для доказательства (26) устремим ε к нулю.

Обозначив $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, из определения w_ε получим

$$w_\varepsilon = \chi \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) \nabla^\perp \psi + \frac{1}{\varepsilon} \chi' \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) \psi \nabla^\perp d, \quad (31)$$

и поскольку $\psi \in C([0, T]; C^2(\bar{\Omega}))$ и $\psi|_{\partial\Omega} = 0$, существует константа C , не зависящая от t и ε , для которой

$$|\psi(x, t)| \leq C d(x)$$

при всех $x \in \bar{\Omega}$. Кроме того, поскольку $\chi'(\cdot/\varepsilon)$ имеет носитель в $(\varepsilon, 2\varepsilon)$, а $|\nabla d| \leq 1$, из (31) следует сходимость

$$w_\varepsilon \rightarrow w \quad \text{в } L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)) \quad (32)$$

в сильном смысле при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для левой части (30) отсюда немедленно вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega v \cdot w_\varepsilon dx \rightarrow \frac{d}{dt} \int_\Omega v \cdot w dx$$

в смысле обобщенных функций. Вдобавок, используя определение $E(w_\varepsilon)$, мы можем переписать (30) в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (S(w_\varepsilon)(v - w_\varepsilon) \cdot (v - w_\varepsilon) - E(w_\varepsilon) \cdot v) dx \\ &= \int_{\Omega} [\partial_t w_\varepsilon \cdot v + (v \cdot \nabla w_\varepsilon) \cdot v - ((v - w_\varepsilon) \cdot \nabla w_\varepsilon) \cdot w_\varepsilon] dx, \end{aligned}$$

и правая часть (26) допускает аналогичное выражение.

Заметим теперь, что, опять-таки в силу (32),

$$\int_{\Omega} \partial_t w_\varepsilon \cdot v dx \rightarrow \int_{\Omega} \partial_t w \cdot v dx$$

в смысле обобщенных функций и что

$$\int_{\Omega} ((v - w_\varepsilon) \cdot \nabla w_\varepsilon) \cdot w_\varepsilon dx = \int_{\Omega} ((v - w) \cdot \nabla w) \cdot w dx = 0$$

ввиду формулы $((v - w) \cdot \nabla w) \cdot w = (v - w) \cdot (1/2) \nabla |w|^2$ и включения $v - w \in H(\Omega)$ (и аналогичных соображений относительно $((v - w_\varepsilon) \cdot \nabla w_\varepsilon) \cdot w_\varepsilon$).

Для завершения доказательства (26) и теоремы 4 в целом остается показать, что

$$\int_{\Omega} (v \cdot \nabla w_\varepsilon) \cdot v dx \rightarrow \int_{\Omega} (v \cdot \nabla w) \cdot v dx \quad (33)$$

в смысле обобщенных функций при $\varepsilon \rightarrow 0$.

С этой целью заметим, что у точек $x \in \Omega$, достаточно близких к $\partial\Omega$, существует единственная ближайшая точка $\hat{x} \in \partial\Omega$, так что

$$x = \hat{x} + d(x)\nu(\hat{x}).$$

Через $\tau(\hat{x}) = (-\nu_2(\hat{x}), \nu_1(\hat{x}))$ обозначим единичный вектор, касательный к $\partial\Omega$ в $\hat{x}$, и введем обозначения $v_\tau(x) = v(x) \cdot \tau(\hat{x})$, $\partial_\tau w_\nu(x) = \nabla w_\nu(x) \cdot \tau(\hat{x})$ и т. п. (напомним, что $\hat{x}$ однозначно определяется по x). Для достаточно малых ε выполнено равенство (вспомним (29))

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v \cdot \nabla(w_\varepsilon - w)) \cdot v dx &= \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} v_\nu \partial_\nu(w_\varepsilon - w)_\nu v_\nu dx + \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} v_\nu \partial_\nu(w_\varepsilon - w)_\tau v_\tau dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} v_\tau \partial_\tau(w_\varepsilon - w)_\nu v_\nu dx + \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} v_\tau \partial_\tau(w_\varepsilon - w)_\tau v_\tau dx \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Используя (31) и равенство $\nabla^\perp \psi = w$, а также замечая, что $\nabla d = \nu$, найдем

$$\begin{aligned} (w_\varepsilon - w)_\nu &= \left(\chi \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) - 1 \right) \partial_\tau \psi = \left(\chi \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) - 1 \right) w_\nu, \\ (w_\varepsilon - w)_\tau &= - \left(\chi \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) - 1 \right) \partial_\nu \psi + \frac{1}{\varepsilon} \chi' \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) \psi \\ &= \left(\chi \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) - 1 \right) w_\tau + \frac{1}{\varepsilon} \chi' \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) \psi, \end{aligned}$$

$$\partial_\nu(w_\varepsilon - w)_\nu = \frac{1}{\varepsilon} \chi' \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) w_\nu + \left(\chi \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) - 1 \right) \partial_\nu w_\nu, \quad (34)$$

$$\partial_\nu(w_\varepsilon - w)_\tau = \left(\chi \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) - 1 \right) \partial_\nu w_\tau + \frac{1}{\varepsilon^2} \chi'' \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) \psi, \quad (35)$$

$$\partial_\tau(w_\varepsilon - w)_\nu = \left(\chi \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) - 1 \right) \partial_\tau w_\nu, \quad (36)$$

$$\partial_\tau(w_\varepsilon - w)_\tau = \left(\chi \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) - 1 \right) \partial_\tau w_\tau + \frac{1}{\varepsilon} \chi' \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) w_\nu. \quad (37)$$

Прежде чем оценить I_1 – I_4 с помощью (34)–(37), отметим еще несколько фактов. Как мы уже указывали, $|\psi(x)| \leq Cd(x)$ для некоторой константы C , не зависящей от t . Далее, поскольку $w \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$ и $w_\nu = 0$ на $\partial\Omega$, аналогично можно найти константу, не зависящую от t , с которой $|w_\nu(x)| \leq Cd(x)$. По предположению, при достаточно малом ε функция v равномерно (по t) гёльдерова в $\Gamma_{2\varepsilon}$ с показателем α , а так как из включения $v \in H(\Omega)$ следует, что $v_\nu = 0$ на $\partial\Omega$ (ср. с [16; гл. III]), мы получаем еще одну константу, не зависящую от времени, с которой $|v_\nu(x)| \leq Cd(x)^\alpha$ в $\Gamma_{2\varepsilon}$. Заметим, наконец, что ψ , w и v равномерно ограничены на $\Gamma_{2\varepsilon}$, если только ε мало, и что с некоторой константой, не зависящей от ε , верно неравенство $|\Gamma_{2\varepsilon}| \leq C\varepsilon$.

В свете этих фактов мы можем использовать (34)–(37), чтобы получить следующие равномерные по времени оценки:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} v_\nu^2 \|\chi'\|_\infty \|w_\tau\|_\infty dx + \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} v_\nu^2 \|\chi - 1\|_\infty \|\partial_\nu w_\nu\|_\infty dx \\ &\leq C\varepsilon^{2\alpha+1} + C\varepsilon^{2\alpha+1} \rightarrow 0, \\ |I_2| &\leq \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} |v_\nu| |v_\tau| \|\chi - 1\|_\infty \|\partial_\nu w_\tau\|_\infty dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} |v_\nu| |v_\tau| \|\chi''\|_\infty |\psi| dx \\ &\leq C\varepsilon^{\alpha+1} + C\varepsilon^\alpha \rightarrow 0, \\ |I_3| &\leq \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} |v_\nu| |v_\tau| \|\chi - 1\|_\infty \|\partial_\tau w_\nu\|_\infty dx \leq C\varepsilon^{\alpha+1} \rightarrow 0, \\ |I_4| &\leq \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} v_\tau^2 \|\chi - 1\|_\infty \|\partial_\tau w_\tau\|_\infty dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} v_\tau^2 \|\chi'\|_\infty |w_\nu| dx \\ &\leq C\varepsilon + C\varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Это доказывает теорему 4 в односвязной области Ω .

На заключительном шаге мы убедимся, что доказательство легко подправить в духе раздела 1.4 работы [20] для общего случая, когда $\partial\Omega$ состоит из N компонент $\Gamma^1, \dots, \Gamma^N$. По-прежнему, мы можем найти $\psi \in C([0, T]; C^2(\bar{\Omega})) \cap C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$, для которого $\nabla^\perp \psi = w$, но теперь мы не можем требовать, чтобы $\psi|_{\partial\Omega} = 0$. Вместо этого ψ теперь принимает постоянное значение ψ^i на каждой Γ^i , но числа ψ^i могут быть разными. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то множества

$$\Gamma_{2\varepsilon}^i = \{x \in \bar{\Omega}: \text{dist}(x, \Gamma^i) < 2\varepsilon\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

не пересекаются, и, полагая

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} \nabla^\perp \left(\chi \left(\frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\varepsilon} \right) (\psi(x) - \psi^i) \right) & \text{при } x \in \Gamma_{2\varepsilon}^i, \\ w(x) & \text{при } x \in \bar{\Omega} \setminus \bigcup_i \Gamma_{2\varepsilon}^i, \end{cases}$$

где χ такое же, как в односвязном случае, мы получаем корректно определенную $w_\varepsilon(x)$. Выбрав w_ε таким образом, мы можем использовать те же рассуждения, что и выше.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Теорема 4 показывает, что в кольце с гладкими начальными данными вращательного типа не может быть диких решений со свойством Гёльдера. Действительно, любое допустимое решение со свойством Гёльдера диссипативно в силу нашей теоремы, так что оно должно совпадать со стационарным решением в силу единственности сильных решений в классе слабых. Это наблюдение представляет особый интерес в свете недавних результатов (см., например, [6], [9], [19]), в которых строятся примеры диких решений со свойством Гёльдера.

Одна из первых работ профессора М. И. Вишика “Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений” [33] оказала, особенно во Франции, существенное влияние на подготовку поколения математиков, к которому принадлежит первый автор настоящей публикации. Когда вслед за тем М. И. Вишик обратился к уравнениям Навье–Стокса и турбулентности, он сыграл значительную роль в прогрессе, произошедшем за последние 60 лет в понимании математики турбулентных процессов в гидродинамике. Мы надеемся, что наше эссе внесет свой вклад в сохранение памяти о М. И. Вишике и в признание его влияния на математическое сообщество.

Авторы благодарны профессору Эдриссу Тити за интересные и плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] C. J. Amick, “Existence of solutions to the nonhomogeneous steady Navier–Stokes equations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:6 (1984), 817–830.
- [2] К. Бардос, Э. С. Тити, “Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости”, *УМН*, **62**:3(375) (2007), 5–46; англ. пер.: C. Bardos, E. S. Titi, “Euler equations for incompressible ideal fluids”, *Russian Math. Surveys*, **62**:3 (2007), 409–451.
- [3] C. Bardos, E. S. Titi, *Mathematics and turbulence: where do we stand?*, 2013, 40 pp., [arXiv: 1301.0273](#).
- [4] C. Bardos, E. S. Titi, E. Wiedemann, “The vanishing viscosity as a selection principle for the Euler equations: the case of 3D shear flow”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **350**:15–16 (2012), 757–760.
- [5] Y. Brenier, C. De Lellis, L. Székelyhidi, Jr., “Weak-strong uniqueness for measure-valued solutions”, *Comm. Math. Phys.*, **305**:2 (2011), 351–361.
- [6] T. Buckmaster, C. De Lellis, L. Székelyhidi, *Transporting microstructure and dissipative Euler flows*, 2013, 35 pp., [arXiv: 1302.2815](#).
- [7] E. Chiodaroli, C. De Lellis, O. Kreml, *Global ill-posedness of the isentropic system of gas dynamics*, 2013, 30 pp., [arXiv: 1304.0123](#).

- [8] C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, 3rd ed., Grundlehren Math. Wiss., **325**, Springer-Verlag, Berlin, 2010, xxxvi+708 pp.
- [9] S. Daneri, *Cauchy problem for dissipative Hölder solutions to the incompressible Euler equations*, 2013, 33 pp., arXiv: 1302.0988.
- [10] C. De Lellis, L. Székelyhidi, Jr., “The Euler equations as a differential inclusion”, *Ann. of Math. (2)*, **170**:3 (2009), 1417–1436.
- [11] C. De Lellis, L. Székelyhidi, Jr., “On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **195**:1 (2010), 225–260.
- [12] C. De Lellis, L. Székelyhidi, Jr., “The h -principle and the equations of fluid dynamics”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **49**:3 (2012), 347–375.
- [13] J. Duchon, R. Robert, “Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier–Stokes equations”, *Nonlinearity*, **13**:1 (2000), 249–255.
- [14] L. C. Evans, *Partial differential equations*, 2nd ed., Grad. Stud. Math., **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, xii+749 pp.
- [15] G. L. Eyink, K. R. Sreenivasan, “Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence”, *Rev. Modern Phys.*, **78**:1 (2006), 87–135.
- [16] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations*, v. I: *Linearized steady problems*, Springer Tracts Natur. Philos., **38**, Springer-Verlag, New York, 1994, xii+450 pp.
- [17] G. P. Galdi, “An introduction to the Navier–Stokes initial-boundary value problem”, *Fundamental directions in mathematical fluid mechanics*, Adv. Math. Fluid Mech., Birkhäuser, Basel, 2000, 1–70.
- [18] Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989, 464 с.; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, reprint of the 1998 edition, Classics Math., Springer-Verlag, Berlin, 2001, xiv+517 pp.
- [19] P. Isett, *Hölder continuous Euler flows in three dimensions with compact support in time*, 2012 (v4 – 2014), 176 pp., arXiv: 1211.4065.
- [20] T. Kato, “On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **25**:3 (1967), 188–200.
- [21] T. Kato, “Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier–Stokes flows with boundary”, *Seminar on nonlinear partial differential equations* (Berkeley, CA, 1983), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **2**, Springer, New York, 1984, 85–98.
- [22] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics*, v. 1: *Incompressible models*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **3**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1996, xiv+237 pp.
- [23] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes, Yuxi Zheng, “Convergence of the vanishing viscosity approximation for superpositions of confined eddies”, *Comm. Math. Phys.*, **201**:2 (1999), 291–304.
- [24] A. J. Majda, A. L. Bertozzi, *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge Texts Appl. Math., **27**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, xii+545 pp.
- [25] L. Saint-Raymond, “Convergence of solutions to the Boltzmann equation in the incompressible Euler limit”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **166**:1 (2003), 47–80.
- [26] V. Scheffer, “An inviscid flow with compact support in space-time”, *J. Geom. Anal.*, **3**:4 (1993), 343–401.
- [27] A. I. Shnirelman, “Lattice theory and flows of ideal incompressible fluid”, *Russian J. Math. Phys.*, **1**:1 (1993), 105–114.
- [28] A. Shnirelman, “On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **50**:12 (1997), 1261–1286.
- [29] A. Shnirelman, “Weak solutions with decreasing energy of incompressible Euler equations”, *Comm. Math. Phys.*, **210**:3 (2000), 541–603.

- [30] L. Székelyhidi, Jr., “Weak solutions to the incompressible Euler equations with vortex sheet initial data”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **349**:19-20 (2011), 1063–1066.
- [31] L. Székelyhidi, Jr., *From isometric embeddings to turbulence*, Lecture note № 41, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, 2012, 54 pp., <http://www.mis.mpg.de/preprints/ln/lecturenote-4112.pdf>.
- [32] L. Székelyhidi, Jr., E. Wiedemann, “Young measures generated by ideal incompressible fluid flows”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **206**:1 (2012), 333–366.
- [33] М. И. Виши́к, “Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений”, Тр. ММО, **1**, ГИТТЛ, М.-Л., 1952, 187–246; англ. пер.: M. I. Vishik, “On general boundary problems for elliptic differential equations”, *Eight papers on differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963, 107–172.
- [34] E. Wiedemann, “Existence of weak solutions for the incompressible Euler equations”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **28**:5 (2011), 727–730.

Клод Бардос

(Claude Bardos)

Université Paris VII – Denis Diderot, Paris, France

E-mail: claud.bardos@gmail.com

Поступила в редакцию

27.10.2013

Ласло Секелихиди мл.

(Laszlo Szekelyhidi, Jr.)

Universität Leipzig, Mathematisches Institut,

Leipzig, Germany

E-mail: szekelyhidi@math.uni-leipzig.de

Эмиль Видеманн

(Emil Wiedemann)

University of British Columbia, Vancouver, Canada;

Pacific Institute for the Mathematical Sciences,

Vancouver, Canada

E-mail: emil@math.ubc.ca