Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Скубачевский, Уравнения Власова–Пуассона для
двукомпонентной плазмы в однородном магнитном по-
ле, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 2, 107–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:34:04

УДК 517.9

Уравнения Власова–Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле

А. Л. Скубачевский

Рассматривается первая смешанная задача для уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре, описывающая эволюцию плотностей распределения ионов и электронов в высокотемпературной плазме при наличии внешнего магнитного поля. Построено стационарное решение с носителями плотностей распределения заряженных частиц во внутреннем цилиндре. В некоторой окрестности стационарного решения доказаны существование и единственность классического решения с носителями плотностей распределения заряженных частиц, лежащими на некотором расстоянии от цилиндрической границы.

Библиография: 127 названий.

Ключевые слова: уравнения Власова–Пуассона, смешанная задача, классические решения, однородное магнитное поле.

DOI: 10.4213/rm9579

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	107
1. Постановка задачи. Формулировка основного результата	114
2. Траектории заряженных частиц в бесконечном цилиндре	117
3. Гёльдеровские оценки плотности электрического заряда	121
4. Доказательство теоремы 1.1	132
5. Некоторые обобщения	138
Список литературы	141

Введение

Уравнения Власова, или кинетические уравнения с самосогласованным полем, впервые полученные в работе [117], в настоящее время представляют собой одну из наиболее известных математических моделей кинетической теории газов. Исследование этих уравнений позволило теоретически предсказать ряд

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-4479.2014.1).

новых, неожиданных физических явлений, например, эффект затухания Ландау, описывающий бесстолкновительное затухание волн в плазме [70]. В физике уравнениям Власова посвящена обширная литература (см. [72], [73], [85], [118]–[120] и имеющуюся там библиографию). В математике интерес к этим уравнениям возник позже. Однако в последние десятилетия публикуется огромное количество работ, посвященных исследованиям уравнений Власова (см. [1]–[18], [20]–[36], [38]–[64], [66]–[69], [71], [74]–[84], [86], [88]–[108], [110], [111], [113]–[116], [121]–[127]). Популярность этих уравнений связана прежде всего с многочисленными приложениями: кинетическая теория частиц в электрических, магнитных и гравитационных полях, волны в бесстолкновительной плазме и т. д. В зависимости от исходных физических моделей различают уравнения Власова–Пуассона, Власова–Максвелла, Власова–Эйнштейна, обобщенные уравнения Власова и т. д. Но, по-видимому, основной причиной возрастания интереса к исследованию уравнений Власова является их использование в изучении высокотемпературной, разреженной плазмы и прежде всего процессов управления термоядерным синтезом.

Уравнения Власова–Пуассона, описывающие высокотемпературную, разреженную плазму, в координатном пространстве $\mathbb{R}^3$ и пространстве скоростей $\mathbb{R}^3$ имеют вид

$$-\Delta\varphi(x, t) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm 1} \beta f^\beta(x, v, t) dv \quad (x \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\beta}{\partial t} + (v, \nabla_x f^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^\beta \right) &= 0 \\ (x \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T, \beta = \pm 1). \end{aligned} \quad (2)$$

К этим уравнениям добавляются начальные условия

$$f^\beta(x, v, t)|_{t=0} = f_0^\beta(x, v) \quad (x \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1). \quad (3)$$

Здесь $f^\beta = f^\beta(x, v, t)$ – функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t ; $\varphi = \varphi(x, t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v – градиенты по x и v соответственно; m_{+1} и m_{-1} – массы иона и электрона; e – заряд электрона; c – скорость света; B – индукция внешнего магнитного поля; $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $[\cdot, \cdot]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Уравнение (1), правая часть которого представляет собой плотность суммарного электрического заряда в момент времени t в точке x , описывает закон Кулона. Уравнения Власова (2) получаются из уравнений Больцмана, если в последних пренебречь интегралом столкновений. Для разреженной плазмы это допущение является оправданным [117], [73]. Несмотря на отсутствие интеграла столкновений взаимодействие заряженных частиц учитывается через самосогласованное электрическое поле, которое вычисляется из плотностей распределения заряженных частиц в соответствии с уравнением (1). Если учесть самосогласованное магнитное поле, которое порождается движением заряженных частиц, к уравнениям (2) помимо уравнения (1) необходимо добавить еще

три уравнения Максвелла. Полученная система называется системой уравнений Власова–Максвелла.

В данной работе мы будем рассматривать разрешимость системы уравнений Власова–Пуассона. Для того чтобы дать краткий обзор работ в этом направлении, рассмотрим формальное сведение системы трех уравнений (1), (2) к двум интегро-дифференциальным уравнениям. Используя ньютонов потенциал, решение уравнения (1) можно записать в виде

$$\varphi(x, t) = e \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dy}{|x - y|} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm 1} \beta f^\beta(y, v, t) dv. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\beta}{\partial t} + (v, \nabla_x f^\beta) \\ + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^3} K(x, y) dy \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm 1} \beta f^\beta(y, v, t) dv + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^\beta \right) = 0 \quad (5) \\ (x \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T, \beta = \pm 1). \end{aligned}$$

Здесь ядро

$$K(x, y) = e \frac{x - y}{|x - y|^3} \quad (6)$$

имеет слабую особенность. Отметим, что уравнения (5) являются нелинейными и нелокальными.

В многомерном случае глобальная разрешимость уравнений вида (5) со “сглаженным” ядром в отсутствие магнитного поля B рассматривалась в работах У. Брауна и К. Хеппа [23], В. П. Маслова [82] и Р. Л. Добрушина [35]. Было доказано [35], что если $K(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция переменных x, y , то существует единственное глобальное обобщенное решение задачи Коши для уравнений вида (5). Если же $K(x, y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, были доказаны существование и единственность глобального классического решения. Метод характеристик и гладкость ядра $K(x, y)$ позволили свести рассматриваемую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным членом и применить к доказательству разрешимости технику динамических систем.

Доказательство разрешимости уравнений (5), имеющих ядро $K(x, y)$ вида (6), с начальными условиями (3) является более сложной задачей. Прежде всего это связано с тем, что исходная система (1), (2) состоит из уравнений различной природы. Уравнение Пуассона (1) является эллиптическим уравнением второго порядка, а уравнения Власова (2) являются уравнениями в частных производных первого порядка. Как известно, метод характеристик позволяет свести решение уравнений в частных производных первого порядка к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому классическое решение таких уравнений следует искать в пространствах непрерывно дифференцируемых функций. С другой стороны, уравнение Пуассона исследуется методами

теории потенциала, а классическое решение его наиболее естественно искать в соответствующем пространстве Гёльдера.

Существование глобального обобщенного решения задачи Коши для уравнений Власова–Пуассона (1), (2) было доказано А. А. Арсеньевым [2]. Доказательство было основано на регуляризации оператора Лапласа, разрешимости соответствующей регуляризованной задачи и переходе к слабому пределу в интегральном тождестве, определяющем обобщенное решение. В определенном смысле имеется аналогия между исследованием указанной регуляризованной задачи и исследованием задачи (5), (3) со сглаженным ядром. Существование глобального обобщенного решения и его слабая устойчивость в случае задачи Коши для уравнений Власова–Пуассона и Власова–Максвелла изучались Р. Дж. ДиПерна и П. Л. Лионсом [33], [34], Э. Хорстом и Р. Хюнце [58] и др.

Существование глобального классического решения задачи Коши для уравнений Власова в одномерном случае было доказано С. В. Иорданским [63]. В двумерном случае соответствующий результат был получен Т. Укаи и С. Окабе [113]. В трехмерном случае, наиболее важном в физических приложениях, задача оказалась значительно сложнее. В работе Ю. Батта [9] было доказано существование и единственность глобального классического решения для сферически симметричных начальных функций распределения с компактными носителями по v . Кроме того, в работах Ю. Батта [9] и Э. Хорста [55] показано, что в трехмерном случае глобальное классическое решение задачи Коши для системы уравнений Власова–Пуассона существует для любых достаточно гладких начальных функций распределения с компактными по v носителями, если носители функций распределения по скоростям v остаются компактными для всех $t \in [0, \infty)$. Другими словами, для доказательства существования глобального классического решения достаточно было показать, что диаметр носителей функций распределения по v может расти при $t \rightarrow \infty$ лишь с конечной скоростью. Этот результат получил название леммы скоростей, и в дальнейшем различные его интерпретации использовались во многих работах. К. Бардос и П. Дегонд [7] доказали существование и единственность классического решения задачи Коши для системы уравнений Власова–Пуассона с малыми начальными данными. Существование глобального классического решения задачи Коши для уравнений Власова–Пуассона при произвольных начальных функциях распределения было доказано К. Пфаффельмозером [90]. Более простым методом этот результат был получен затем Дж. Шеффером [104]. В четырехмерном случае Э. Хорстом [56] было доказано, что задача Коши для системы уравнений Власова–Пуассона может не иметь глобального классического решения. Классические решения начальной задачи для уравнений Власова–Пуассона исследовались также в работах [3], [18], [44], [45], [57], [74], [75], [97], [98] и др.

Исследованию стационарных решений уравнений Власова–Пуассона посвящены работы В. В. Веденияпина [114], [115], Ю. Батта и К. Фабиана [12], Ю. Батта, В. Фальтенбахера и Э. Хорста [13], С. И. Похожаева [91], К. Грингарда и П. А. Равьяра [48] и Г. Райна [95]. Стационарные решения уравнений Власова–Максвелла и бифуркация решений рассматривалась в статьях [79], [80], [100], [101], [105]–[108].

Большое число интересных работ было посвящено исследованию как линеаризованной модели эффекта затухания Ландау [28], [83], так и нелинейной модели (см., например, [42], [60], [64]). Подробный обзор литературы в этом направлении можно найти в работе К. Муо и С. Виллани [86], посвященной изучению общего случая нелинейного затухания Ландау.

Существование решений уравнений Власова в областях с границей исследовано значительно меньше. В основном изучались обобщенные решения смешанных задач для уравнений Власова–Пуассона и Власова–Максвелла (см. работы А. А. Арсеньева [5], Р. Александрэ [1], Н. Бен Абдаллы [16], Я. Гуо [49] и Ю. Веклера [122]). Устойчивость обобщенных решений начальных и смешанных задач для уравнений Власова рассматривалась В. В. Козловым [66], [67], Р. Дж. ДиПерна и П. Л. Лионсом [33], [34], Г. Райном [96], У. Х. Уаном [121] и Ю. Веклером [122]. Отметим, что для уравнений Власова нет исчерпывающих результатов о повышении гладкости обобщенных решений смешанных задач, как в случае классических уравнений в частных производных второго порядка. Поэтому большое значение имеет исследование существования классических и сильных решений смешанных задач для уравнений Власова. Вопрос о существовании классических и сильных решений смешанных задач в общем случае до сих пор является нерешенной проблемой (см. работы В. В. Козлова [66], А. А. Самарского [102] и Ю. Веклера [122]). Важность решения этой проблемы связана также с созданием управляемого термоядерного реактора, математическая модель которого описывается смешанными задачами для системы уравнений Власова относительно плотностей распределения заряженных частиц противоположных знаков в ограниченной области. Наиболее известной установкой для термоядерного синтеза является “токамак”. Этот термин является аббревиатурой русских слов “ток”, “камера”, “магнитная катушка” и был придуман И. Н. Головиным [85; примечание редактора рус. перев., с. 277]. Вакуумная камера токамака-реактора представляет собой тор, сечение которого имеет вид прописной латинской буквы “D” (см. рис. 1).

Рис. 1

Одной из альтернативных установок для термоядерного синтеза является пробочная ловушка (mirror trap), имеющая вид длинного цилиндра, сужающегося на концах (см. рис. 2).

Рис. 2

Отметим, что рис. 1, 2 являются лишь достаточно грубыми схемами указанных устройств. Более подробные схемы магнитных ловушек для удержания высокотемпературной плазмы и описание принципов их работы можно найти в монографии [109].

Для создания устойчивой высокотемпературной плазмы в реакторе необходимо, чтобы на некотором интервале времени так называемый плазменный шнур находился строго внутри области, “не допуская соприкосновений со стенкой вакуумной камеры” [85; введение к гл. 6]. При этом для большинства моделей термоядерных реакторов в качестве управления, обеспечивающего существование плазмы в реакторе, используется внешнее магнитное поле [72], [85]. С точки зрения дифференциальных уравнений это означает, что мы должны обеспечить существование решений уравнений Власова–Пуассона с носителями плотностей распределения заряженных частиц, не пересекающимися с границей, за счет влияния внешнего магнитного поля.

Рассмотрим кратко некоторые наиболее важные работы, посвященные существованию классических решений смешанных задач для уравнений Власова–Пуассона в областях с границей. Глобальное существование классических решений смешанных задач для уравнений Власова–Пуассона в полупространстве с краевыми условиями Неймана или Дирихле для потенциала электрического поля и условиями упругого отражения для плотностей распределения заряженных частиц на границе было доказано Я. Гуо [50] и Х. Дж. Хуангом, Х. Х. Л. Веласкесом [61]. В работе [59] было доказано, что классические решения уравнений Власова–Пуассона в шаре со сферически симметричными начальными условиями и условиями упругого отражения для плотностей распределения могут иметь сингулярности лишь в центре шара. Основные трудности в исследовании классических решений смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона были связаны с поведением характеристик вблизи границы. При этом влияние магнитного поля на траектории частиц не учитывалось.

В данной статье мы рассмотрим классические решения смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона в $Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ с краевым условием

Дирихле для потенциала электрического поля на $\partial Q \times (0, T)$, где $Q = G \times \mathbb{R}$ – бесконечный цилиндр, $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$. Принципиальным отличием этой работы является то, что найденное решение имеет носители плотностей распределения заряженных частиц, лежащие на некотором расстоянии от цилиндрической поверхности ∂Q по пространственным переменным x и компактные по v . Для получения такого решения мы полагаем, что внешнее магнитное поле B направлено по оси цилиндра и является достаточно сильным, а начальные плотности распределения $f_0^\beta(x, v)$ имеют носители, удаленные на некоторое расстояние от границы ∂Q по x и компактные по v . Эти предположения приводят к тому, что характеристики не пересекаются с границей ∂Q . Данное явление имеет следующий физический смысл: заряженные частицы не достигают стенок вакуумной камеры термоядерного реактора за счет движения по траекториям, близким к ларморовским. Таким образом, рассматриваемая задача в определенном смысле может служить математической моделью цилиндрической части пробочной ловушки. Как известно [85], в случае выхода значительного числа частиц на границу может произойти либо разрушение стенок реактора, либо остывание высокотемпературной плазмы из-за ее охлаждения на стенках реактора. В отличие от других работ (см., например, [61]), в которых изучаются уравнения Власова–Пуассона для частиц одного знака, мы рассматриваем уравнения Власова–Пуассона для двухкомпонентной плазмы, поскольку “в физике слово плазма используется для обозначения высокотемпературного состояния ионизированного газа, характеризующегося зарядовой нейтральностью” [85]. Это приводит к дополнительным трудностям в исследовании (как математическим, так и физическим).

Статья построена следующим образом. Раздел 1 содержит обозначения, постановку задачи и формулировку основного результата (теорема 1.1). Этот результат гарантирует существование стационарного решения уравнений Власова–Пуассона в $Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ с носителями плотностей распределения заряженных частиц по x во внутреннем цилиндре. Кроме того, в некоторой окрестности этого стационарного решения существует единственное классическое решение с носителями плотностей распределения по x , не пересекающимися с границей ∂Q . В разделе 2 мы изучаем свойства характеристик системы уравнений (2) в $Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ для фиксированного потенциала φ . В отсутствие электрического поля ($\varphi = 0$) благодаря сильному магнитному полю B , направленному по оси цилиндра, частицы движутся по траекториям вида окружностей или винтовых линий с ларморовской частотой $e|B|/(m_\beta c)$ в цилиндре Q , не достигая границы ∂Q . Это явление хорошо известно в физике плазмы. Для достаточно малых потенциалов φ характеристики, начинающиеся в некотором строго внутреннем цилиндре области Q , также не достигают границы ∂Q . В разделе 3, используя характеристики, изученные ранее, мы построим решение начальной задачи (2), (3) в $Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ для фиксированного потенциала φ . Поскольку характеристики не достигают границы ∂Q , то для начальных плотностей $f_0^\beta(x, v)$ с носителями в области $Q \times \mathbb{R}^3$ носители решений $f_\varphi^\beta(x, v, t)$ задачи (2), (3) остаются в $Q \times \mathbb{R}^3$ для всех $0 < t < T$. Подставляя решения $f_\varphi^\beta(x, v, t)$ в уравнение (1), мы получим гёльдеровские оценки правой части уравнения (1)

с $f^\beta(x, v, t) = f_\varphi^\beta(x, v, t)$. В разделе 4 мы построим стационарное решение задачи (1), (2) с указанными выше свойствами. Далее, используя гёльдеровские оценки из раздела 3, однозначную разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона в пространствах Гёльдера и теорему Банаха о неподвижной точке, мы докажем существование и единственность классического решения в некоторой окрестности построенного стационарного решения. В разделе 5 будет рассмотрено обобщение теоремы 1.1 на абстрактные уравнения Власова и сформулированы некоторые нерешенные вопросы.

Отметим, что классические решения смешанных задач для уравнений Власова–Пуассона в полупространстве при достаточно малых начальных плотностях с компактными носителями и большой напряженности внешнего магнитного поля исследовались в работах [110], [111]. В ряде других работ, посвященных уравнениям Власова–Пуассона в областях с границей (см., например, [5], [50]), также допускалось наличие внешнего магнитного поля. Однако влияние этого поля на возникновение ларморовских траекторий и проблемы удержания плазмы на некотором расстоянии от границы не рассматривались.

1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

1.1. Рассмотрим систему уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре

$$-\Delta\varphi(x, t) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^\beta(x, v, t) dv \quad (x \in Q, 0 < t < T), \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\beta}{\partial t} + (v, \nabla_x f^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^\beta \right) &= 0 \\ (x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T, \beta = \pm 1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

с начальными условиями

$$f^\beta(x, v, t)|_{t=0} = f_0^\beta(x, v) \quad (x \in \bar{Q}, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1) \quad (1.3)$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x, t) = 0 \quad (x \in \partial Q, 0 \leq t < T). \quad (1.4)$$

Здесь $Q = G \times \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, $\partial Q = \partial G \times \mathbb{R}$, а неизвестные функции $\varphi(x, t)$, $f^\beta(x, v, t)$, заданный вектор B и постоянные $m_{\pm 1}$, e , c имеют тот же смысл, что и во введении.

1.2. Для определения классического решения задачи (1.1)–(1.4) введем некоторые функциональные пространства.

Обозначим через $C^s(\mathbb{R}^n)$ ($C^s(\bar{\Omega})$), $s \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, пространство Гёльдера непрерывных функций в $\mathbb{R}^n$ ($\bar{\Omega}$), имеющих все непрерывные производные в $\mathbb{R}^n$ ($\bar{\Omega}$) вплоть до k -го порядка, $k = [s]$, с конечной нормой

$$\begin{aligned} \|u\|_s &= \max_{|\alpha| \leq k} \sup_x |\mathcal{D}^\alpha u(x)|, \quad \text{если } s = k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq k, \\ \|u\|_s &= \|u\|_k + |u|_\sigma, \quad \text{если } s = k + \sigma, \quad 0 \leq k \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \sigma < 1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с границей $\partial\Omega \in C^\infty$ или цилиндр $Q = G \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$,

$$|u|_\sigma = \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \neq y} |x - y|^{-\sigma} |\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)|, \quad (1.6)$$

$$\mathcal{D}^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Положим $C(\mathbb{R}^n) = C^0(\mathbb{R}^n)$ и $C(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega})$.

Аналогично мы можем ввести пространство $C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$, состоящее из непрерывных, ограниченных функций, имеющих непрерывные, ограниченные производные первого порядка в $\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если $s = k + \sigma$, $0 \leq k \in \mathbb{Z}$, $0 < \sigma < 1$, то в силу теоремы 2 в [112; гл. 4, § 4.5.2] мы можем ввести в $C^s(\mathbb{R}^n)$ ($C^s(\bar{\Omega})$) эквивалентную норму

$$\|u\|'_s = \|u\|_k + |u|_{\sigma, b}, \quad (1.7)$$

где

$$|u|_{\sigma, b} = \max_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x \neq y, \\ 0 < |x-y| < b}} |x - y|^{-\sigma} |\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)|, \quad 0 < b \leq 1. \quad (1.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Для любого $s \geq 0$ пространство $C^s(\mathbb{R}^n)$ ($C^s(\bar{\Omega})$) является банаховым. Если $s = k + \sigma$, $0 \leq k \in \mathbb{Z}$, $0 < \sigma < 1$, то пространство $C^s(\mathbb{R}^n)$ ($C^s(\bar{\Omega})$) не будет сепарабельным, а множество бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n(\bar{\Omega})$ с конечной нормой $\|\cdot\|_s$ не является всюду плотным в $C^s(\mathbb{R}^n)$ ($C^s(\bar{\Omega})$), см. [19].

Пусть $\dot{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $k, n \in \mathbb{N}$, – множество k раз непрерывно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций с компактными носителями.

Обозначим через $C_0^s(\bar{Q})$, $s \geq 0$, замыкание множества функций из $C^s(\bar{Q})$ с компактными в $\bar{Q}$ носителями.

Введем банахово пространство $C([0, T], C^s(\bar{\Omega}))$, $s > 0$, непрерывных функций $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(\cdot, t) \in C^s(\bar{\Omega})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{s, T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(\cdot, t)\|_s. \quad (1.9)$$

Аналогично можно определить пространство $C([0, T], C_0^s(\bar{Q}))$.

Пусть $B_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3: |x - x_0| < \rho\}$, и пусть $B_\rho = B_\rho(0)$. Положим $|B_\rho| = 4\pi\rho^3/3$.

Обозначим через $k_i, c_j, \hat{k}_i, \hat{c}_j$ положительные постоянные.

1.3. Для того чтобы сформулировать теорему об однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4) вблизи стационарного решения, вначале дадим определение классического решения задачи (1.1)–(1.4) и стационарного решения задачи (1.1), (1.2), (1.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Вектор-функцию $\{\varphi, f^\beta\}$, $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\bar{Q}))$, $f^\beta \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$, мы назовем классическим решением задачи (1.1)–(1.4), если $\{\varphi, f^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям (1.1), (1.2), начальным условиям (1.3) и краевому условию (1.4).

Важную роль в исследовании уравнений Власова играют стационарные решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Вектор-функцию $\{\dot{\varphi}, \dot{f}^\beta\}$, $\dot{\varphi} \in C_0^{2+\sigma}(\overline{Q})$, $\dot{f}^\beta \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$, мы назовем стационарным решением уравнений (1.1), (1.2) с краевым условием (1.4), если $\{\dot{\varphi}, \dot{f}^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям

$$-\Delta \dot{\varphi}(x) = 4\pi e \sum_{\beta} \beta \dot{f}^\beta(x, v) dv \quad (x \in Q), \quad (1.10)$$

$$(v, \nabla_x \dot{f}^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(-\nabla_x \dot{\varphi} + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v \dot{f}^\beta \right) = 0 \quad (x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1) \quad (1.11)$$

и краевому условию (1.4).

Сформулируем теперь условия, которым должны удовлетворять магнитное поле B и начальные распределения плотностей заряженных частиц $f_0^\beta(x, v)$.

Обозначим $G_\delta = \{x' \in G: \text{dist}(x', \partial G) > \delta\}$, $Q_\delta = \{x \in Q: \text{dist}(x, \partial Q) > \delta\}$, где $\delta > 0$. Предполагая, что $G_{2\delta} \neq \emptyset$, обозначим через $\delta_0 = \delta_0(\delta) > 0$ наибольший радиус круга, вписанного в $G_{2\delta}$.

УСЛОВИЕ 1.1. Пусть $B = (0, 0, h)$ для $x \in \overline{Q}$, где $h > 0$ не зависит от x и

$$32 \frac{c\rho m_{+1}}{e\delta} < h. \quad (1.12)$$

УСЛОВИЕ 1.2. Пусть $f_0^\beta \in C^\infty(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$ – неотрицательные функции, и пусть $\text{supp } f_0^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$, где $\rho > 0$, $\delta_0 > \delta$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\delta > 0$ таково, что $G_{2\delta} \neq \emptyset$ и $\delta_0 > \delta$, и пусть для этого δ и некоторых $h, \rho > 0$ выполняется условие 1.1. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует стационарное решение $\{0, \dot{f}^\beta\}$ уравнений (1.1), (1.2) с краевым условием (1.4), обладающее следующими свойствами: $\dot{f}^\beta \in C^\infty(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$, $\text{supp } \dot{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$ и $\sup_{x,v} \dot{f}^\beta(x, v) > \alpha$.

Если к тому же выполнено условие 1.2, то для любого $T > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(T, \delta, \rho, h, \sigma) > 0$ такое, что для всех стационарных решений $\{0, \dot{f}^\beta\}$ с указанными свойствами и начальных функций f_0^β , удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} \text{supp}(f_0^\beta - \dot{f}^\beta) &\subset (Q_{2\delta} \cap Q'_N) \times B_{\rho/4}, \\ \|\dot{f}_{v_i}^\beta\|_2 &< \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3), \quad \|f_0^\beta - \dot{f}^\beta\|_2 < \varepsilon \end{aligned} \quad (\beta = \pm 1), \quad (1.13)$$

где $Q'_N = \{x \in Q: |x_3| < N\}$, $N > 0$ – некоторое число, существует единственное классическое решение задачи (1.1)–(1.4), при этом

$$\text{supp } f^\beta(\cdot, \cdot, t) \subset Q_{5\delta/4} \times B_\rho \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

Доказательство теоремы 1.1 будет дано в разделе 4.

2. Траектории заряженных частиц в бесконечном цилиндре

2.1. Предположим, что выполняются условия 1.1, 1.2 и существует стационарное решение $\{0, \mathring{f}^\beta\}$ задачи (1.1), (1.2), (1.4), обладающее свойствами, сформулированными в первом утверждении теоремы 1.1. Будем рассматривать решение $\{\varphi, f^\beta\}$ задачи (1.1)–(1.4) как возмущенное стационарное решение $\{0, \mathring{f}^\beta\}$ задачи (1.1), (1.2), (1.4). Обозначим $g^\beta(x, v, t) = f^\beta(x, v, t) - \mathring{f}^\beta(x, v)$ и $g_0^\beta(x, v) = f_0^\beta(x, v) - \mathring{f}^\beta(x, v)$. Тогда из (1.1)–(1.4) и (1.10), (1.11) получим

$$-\Delta\varphi(x, t) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm 1} \beta g^\beta(x, v, t) dv \quad (x \in Q, 0 < t < T), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^\beta}{\partial t} + (v, \nabla_x g^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v g^\beta \right) \\ = \frac{\beta e}{m_\beta} (\nabla_x \varphi, \nabla_v \mathring{f}^\beta) \end{aligned} \quad (x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1) \quad (2.2)$$

$$g^\beta(x, v, t)|_{t=0} = g_0^\beta(x, v) \quad (x \in \overline{Q}, v \in \mathbb{R}^3), \quad (2.3)$$

$$\varphi(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (x \in \partial Q, 0 \leq t < T). \quad (2.4)$$

Будем предполагать, что $\text{supp } g_0^\beta \subset (Q_{2\delta} \cap Q'_N) \times B_{\rho/4}$, где $N > 0$ – некоторое число.

Классическое решение задачи (2.1)–(2.4) определяется аналогично классическому решению задачи (1.1)–(1.4). Однако заметим, что, в отличие от уравнений (1.2), уравнения (2.2) являются неоднородными относительно g^β .

При фиксированной функции $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$ уравнение (2.2) с начальным условием (2.3) можно решать, используя метод характеристик. Для этого рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_\varphi^\beta}{d\tau} = V_\varphi^\beta \quad (0 < \tau < T, \beta = \pm 1), \quad (2.5)$$

$$\frac{dV_\varphi^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_x \varphi(X_\varphi^\beta, \tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [V_\varphi^\beta, B] \quad (0 < \tau < T, \beta = \pm 1) \quad (2.6)$$

с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=0} = x \quad (\beta = \pm 1), \quad (2.7)$$

$$V_\varphi^\beta|_{\tau=0} = v \quad (\beta = \pm 1), \quad (2.8)$$

где $x \in Q, v \in \mathbb{R}^3$.

Поскольку $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$, из теоремы о непродолжаемых решениях следует, что для любых $x \in Q$ и $v \in \mathbb{R}^3$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (2.5)–(2.8) на некотором полуинтервале $[0, T_\varphi^\beta(x, v))$, $T_\varphi^\beta(x, v) \leq T$. Обозначим это решение $(X_\varphi^\beta(x, v, \tau), V_\varphi^\beta(x, v, \tau))$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$, и пусть $\|\varphi\|_{1,T} \leq R_0$. Тогда для любых $x \in Q$, $|v| < \rho$ и $0 < t < T_\varphi^\beta(x, v)$ мы имеем

$$|V_\varphi^\beta(x, v, t)| < \rho_t \quad (\beta = \pm 1), \quad (2.9)$$

где $\rho_t = \sqrt{2(\rho^2 + 6t^2 e^2 R_0^2 / m_-^2)}$, $\rho > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части (2.6) на V_φ^β и проинтегрируем по τ от 0 до t . Тогда, используя тождество $(V_\varphi^\beta, [V_\varphi^\beta, B]) = 0$, мы получим

$$\frac{1}{2} |V_\varphi^\beta(x, v, t)|^2 - \frac{1}{2} |v|^2 = -\frac{\beta e}{m_\beta} \int_0^t (\nabla_x \varphi(X_\varphi^\beta, \tau), V_\varphi^\beta(x, v, \tau)) d\tau. \quad (2.10)$$

Очевидно, что

$$ab \leq \frac{\varepsilon^{-1} a^2}{2} + \frac{\varepsilon b^2}{2} \quad (a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0).$$

Следовательно, мы имеем

$$|V_\varphi^\beta(x, v, t)|^2 \leq |v|^2 + 3\varepsilon^{-1} e R_0^2 t m_\beta^{-1} + \varepsilon e \max_{\tau \in [0, t]} |V_\varphi^\beta(x, v, \tau)|^2 t m_\beta^{-1}.$$

Выберем $\tau_0 \in [0, t]$ так, что $|V_\varphi^\beta(x, v, \tau_0)| = \max_{\tau \in [0, t]} |V_\varphi^\beta(x, v, \tau)|$. Полагая в последнем неравенстве $t = \tau_0$, получим

$$|V_\varphi^\beta(x, v, \tau_0)|^2 \leq |v|^2 + 3\varepsilon^{-1} e R_0^2 \tau_0 m_\beta^{-1} + \varepsilon e \tau_0 |V_\varphi^\beta(x, v, \tau_0)|^2 m_\beta^{-1}.$$

Отсюда, полагая $\varepsilon = m_\beta (2\tau_0 e)^{-1}$, выводим следующую оценку:

$$|V_\varphi^\beta(x, v, t)|^2 \leq |V_\varphi^\beta(x, v, \tau_0)|^2 \leq \rho_{\tau_0}^2 \leq \rho_t^2.$$

Лемма 2.1 доказана.

2.2. Рассмотрим траектории системы (2.5), (2.6) с $\varphi = 0$. Тогда система уравнений (2.5), (2.6) примет вид

$$\frac{dX_0^\beta}{d\tau} = V_0^\beta \quad (0 < \tau), \quad (2.11)$$

$$\frac{dV_0^\beta}{d\tau} = \frac{\beta e}{m_\beta c} [V_0^\beta, B] \quad (0 < \tau). \quad (2.12)$$

Обозначим $x' = (x_1, x_2)$ и $X_{\varphi 1}^{\beta'}(x, v, \tau) = \{X_{\varphi 1}^\beta(x, v, \tau), X_{\varphi 2}^\beta(x, v, \tau)\}$.

ЛЕММА 2.2. Пусть при некоторых $\delta, \rho > 0$ выполняется условие 1.1, и пусть δ', ρ' таковы, что $G_{2\delta'} \neq \emptyset$, $\delta' \geq \delta/2$ и $0 < \rho' \leq 2\rho$. Пусть $\{X_0^\beta(x, v, \tau), V_0^\beta(x, v, \tau)\}$ – непродолжаемое решение задачи (2.11), (2.12), (2.7), (2.8) на полуинтервале $[0, T_0^\beta(x, v))$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(а) $|V_0^\beta(x, v, \tau)| = |v|$ для всех $\tau \in [0, T_0^\beta(x, v))$.

(б) Если $x \in \partial Q_{\delta'}$ и $|v| = \rho'$, то $T_0^\beta(x, v) = \infty$ и $|x' - X_0^{\beta'}(x, v, \tau)| < \delta/8$ для всех $\tau \in [0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из (2.10) для $\varphi = 0$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что в силу условия 1.1 систему уравнений (2.12) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dV_{01}^\beta}{d\tau} &= \frac{\beta eh}{m_\beta c} V_{02}^\beta, \\ \frac{dV_{02}^\beta}{d\tau} &= -\frac{\beta eh}{m_\beta c} V_{01}^\beta, \\ \frac{dV_{03}^\beta}{d\tau} &= 0.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Пространственные координаты решения задачи (2.11), (2.13), (2.7), (2.8) имеют вид

$$\begin{aligned}X_{01}^\beta(\tau) &= -\frac{\beta cr m_\beta}{eh} \cos\left(\frac{\beta eh}{m_\beta c} \tau + k_0\right) + k_1, \\ X_{02}^\beta(\tau) &= \frac{\beta cr m_\beta}{eh} \sin\left(\frac{\beta eh}{m_\beta c} \tau + k_0\right) + k_2, \\ X_{03}^\beta(\tau) &= v_3 \tau + k_3,\end{aligned}\tag{2.14}$$

где $(V_{01}^\beta)^2 + (V_{02}^\beta)^2 = v_1^2 + v_2^2 = r^2 = \text{const}$, $V_{03}^\beta = v_3 = \text{const}$,

$$\begin{aligned}k_1 &= x_1 + \frac{\beta cr m_\beta}{eh} \cos k_0, \\ k_2 &= x_2 - \frac{\beta cr m_\beta}{eh} \sin k_0, \\ k_3 &= x_3, \\ \sin k_0 &= v_1 r^{-1}, \quad \cos k_0 = v_2 r^{-1}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Если $v_3 = 0$, то траектории имеют вид окружностей. Если $v_3 \neq 0$, то они имеют вид винтовых линий. Число $\omega_\beta = eh/(m_\beta c)$ называется ларморовской частотой, а число $r_\beta = cr m_\beta/(eh)$ – ларморовским радиусом.

Если $x \in \partial Q_{\delta'}$, $|v| = \rho'$, то из неравенства (1.12) и неравенства $r \leq \rho' \leq 2\rho$ следует, что $r_\beta = cr m_\beta/(eh) < \delta/16$. Таким образом, $|x' - X_0^{\beta'}(x, v, \tau)| < \delta/8$ для любых $\tau > 0$, т. е. непродолжаемое решение задачи (2.11), (2.13), (2.7), (2.8) существует для всех $\tau \in [0, \infty)$.

Лемма 2.2 доказана.

2.3. Рассмотрим теперь траектории системы (2.5), (2.6) с достаточно малым потенциалом электрического поля φ .

Пусть $R_1 > 0$ таково, что

$$\frac{2eTR_1}{m_{-1}} \exp(a_0 T) < \min\left\{\frac{\delta}{8}, \frac{\rho}{4}\right\},\tag{2.16}$$

где $a_0 = 1 + eh/(cm_{-1})$.

ЛЕММА 2.3. Пусть при некоторых $\delta, \rho > 0$ выполняется условие 1.1, и пусть δ', ρ' таковы, что $G_{2\delta'} \neq \emptyset$, $\delta' \geq \delta/2$ и $0 < \rho' \leq 2\rho$. Тогда для всех $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\bar{Q}))$ таких, что $\|\varphi\|_{1,T} \leq R_1$, непродолжаемое решение $\{X_\varphi^\beta(x, v, \tau), V_\varphi^\beta(x, v, \tau)\}$ задачи (2.5)–(2.8) имеет следующее свойство: если $x \in \partial Q_{\delta'}$ и $|v| = \rho'$, то

$$T_\varphi^\beta(x, v) = T, \quad |x' - X_\varphi^{\beta'}(x, v, \tau)| < \frac{\delta}{4}, \quad \rho' - \frac{\rho}{4} < |V_\varphi^\beta(x, v, \tau)| < \rho' + \frac{\rho}{4}$$

для всех $\tau \in [0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \partial Q_{\delta'}$ и $|v| = \rho'$. Рассмотрим систему уравнений (2.5), (2.6). Вычтем почленно уравнение (2.11) из (2.5) и (2.12) из (2.6). Проинтегрируем полученные равенства по τ от 0 до q с учетом начальных условий (2.7), (2.8). Вводя новые переменные $\tau = q$ и $s = \tau$, мы получим

$$X_\varphi^\beta(\tau) - X_0^\beta(\tau) = \int_0^\tau (V_\varphi^\beta(s) - V_0^\beta(s)) ds \quad (0 < \tau < T_\varphi^\beta(x, v)), \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} V_\varphi^\beta(\tau) - V_0^\beta(\tau) &= \frac{\beta e}{m_\beta c} \int_0^\tau [V_\varphi^\beta(s) - V_0^\beta(s), B] ds \\ &\quad - \frac{\beta e}{m_\beta} \int_0^\tau \nabla_x \varphi(X_\varphi^\beta(s), s) ds \quad (0 < \tau < T_\varphi^\beta(x, v)). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из (2.17), (2.18) следует, что

$$|X_\varphi^\beta(\tau) - X_0^\beta(\tau)| \leq \int_0^\tau |V_\varphi^\beta(s) - V_0^\beta(s)| ds \quad (0 < \tau < T_\varphi^\beta(x, v)), \quad (2.19)$$

$$|V_\varphi^\beta(\tau) - V_0^\beta(\tau)| \leq \frac{2e\tau}{m_\beta} \|\varphi\|_{1,T} + \frac{eh}{m_\beta c} \int_0^\tau |V_\varphi^\beta(s) - V_0^\beta(s)| ds \quad (0 < \tau < T_\varphi^\beta(x, v)). \quad (2.20)$$

Из неравенств (2.19), (2.20) и леммы Гронуолла следует, что

$$|X_\varphi^\beta(\tau) - X_0^\beta(\tau)| + |V_\varphi^\beta(\tau) - V_0^\beta(\tau)| \leq \frac{2e\tau}{m_{-1}} R_1 e^{a_0 \tau} \quad (0 < \tau < T_\varphi^\beta(x, v)). \quad (2.21)$$

Тогда, используя вторую часть леммы 2.2, свойства непродолжаемых решений и неравенство (2.16), мы имеем

$$T_\varphi^\beta(x, v) = T, \quad |x' - X_\varphi^{\beta'}(x, v, \tau)| < \frac{\delta}{4}, \quad \rho' - \frac{\rho}{4} < |V_\varphi^\beta(x, v, \tau)| < \rho' + \frac{\rho}{4}$$

для всех $\tau \in [0, T]$. Лемма 2.3 доказана.

2.4. Рассмотрим систему уравнений (2.5), (2.6) на интервале $(0, t)$, $0 < t \leq T$, с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t} = y, \quad (2.22)$$

$$V_\varphi^\beta|_{\tau=t} = w. \quad (2.23)$$

По теореме о непродолжаемых решениях для всех $y \in Q$ и $w \in \mathbb{R}^3$ задача (2.22), (2.23), (2.5), (2.6) имеет единственное непродолжаемое решение $\{X_\varphi^\beta(y, w, t, \tau), V_\varphi^\beta(y, w, t, \tau)\}$ ($\tau \in (T_\varphi^\beta(y, w, t), t]$, $0 \leq T_\varphi^\beta(y, w, t) < t$). При $\varphi = 0$ система уравнений (2.5), (2.6) примет вид (2.11), (2.12). Обозначим $\{X_0^\beta(y, w, t, \tau), V_0^\beta(y, w, t, \tau)\}$ ($\tau \in (T_0^\beta(y, w, t), t]$) решение задачи (2.11), (2.12), (2.22), (2.23).

ЛЕММА 2.4. Пусть при некоторых $\delta, \rho > 0$ выполняется условие 1.1, и пусть δ', ρ' таковы, что $G_{2\delta'} \neq \emptyset$, $\delta' \geq \delta/2$ и $0 < \rho' \leq 2\rho$. Пусть $\{X_0^\beta(y, w, t, \tau), V_0^\beta(y, w, t, \tau)\}$ – непродолжаемое решение задачи (2.11), (2.12), (2.22), (2.23) на полуинтервале $(T_0^\beta(y, w, t), t]$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(а) $|V_0^\beta(y, w, t, \tau)| = |w|$ для всех $\tau \in (T_0^\beta(y, w, t), t]$.

(б) Если $y \in \partial Q_{\delta'}$ и $|w| = \rho'$, то $T_0^\beta(y, w, t) = 0$ и $|x' - X_0^{\beta'}(y, w, t, \tau)| < \delta/8$ для всех $\tau \in (0, t]$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.2.

ЛЕММА 2.5. Пусть при некоторых $\delta, \rho > 0$ выполняется условие 1.1, и пусть δ', ρ' таковы, что $G_{2\delta'} \neq \emptyset$, $\delta' \geq \delta/2$ и $0 < \rho' \leq 2\rho$. Тогда для любой функции $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$ такой, что $\|\varphi\|_{1,T} \leq R_1$, непродолжаемое решение $\{X_\varphi^\beta(y, w, t, \tau), V_\varphi^\beta(y, w, t, \tau)\}$ ($\tau \in (T_\varphi^\beta(y, w, t), t]$) задачи (2.5), (2.6), (2.22), (2.23) имеет следующее свойство:

если $y \in \partial Q_{\delta'}$, $|w| = \rho'$ и $0 < t \leq T$, то $T_\varphi^\beta(y, w, t) = 0$, $|y' - X_\varphi^{\beta'}(y, w, t, \tau)| < \delta/4$ и $\rho' - \rho/4 < |V_\varphi^\beta(y, w, t, \tau)| < \rho' + \rho/4$ для $\tau \in (0, T]$.

Используя лемму 2.4, аналогично доказательству леммы 2.3 мы можем доказать лемму 2.5.

3. Гёльдеровские оценки плотности электрического заряда

3.1. Обозначим $\Omega_0 = Q_\delta \times B_\rho$ и

$$\Omega_{\varphi,t}^\beta = \{(y, w) \in \mathbb{R}^6 : y = X_\varphi^\beta(x, v, t), w = V_\varphi^\beta(x, v, t), (x, v) \in \Omega_0\},$$

где $0 \leq t < T$, $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$, $\|\varphi\|_{2,T} \leq R_1$. Очевидно, что $\Omega_{\varphi,0}^\beta = \Omega_0$.

Для каждого $0 \leq t < T$ мы определим отображение $S_{\varphi,t}^\beta : \Omega_0 \rightarrow \Omega_{\varphi,t}^\beta$ по формуле $S_{\varphi,t}^\beta(x, v) = (X_\varphi^\beta(x, v, t), V_\varphi^\beta(x, v, t))$.

Поскольку $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$, в силу условия 1.1, леммы 2.3 с $\delta' = \delta$ и $\rho' = \rho$ и непрерывной дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по начальным условиям для любого $0 \leq t < T$ отображение $S_{\varphi,t}^\beta : \Omega_0 \rightarrow \Omega_{\varphi,t}^\beta$ непрерывно дифференцируемо по x, v на Ω_0 и

$$\Omega_{\varphi,t}^\beta \subset Q_{3\delta/4} \times B_{5\rho/4}. \quad (3.1)$$

Очевидно, что $S_{\varphi,0}^\beta(x, v) = (x, v)$. Доопределим отображение $S_{\varphi,t}^\beta$ по непрерывности в точке $t = T$.

Рассмотрим систему уравнений (2.5), (2.6) на интервале $(0, t)$, $0 < t \leq T$, с начальными условиями (2.22), (2.23). В силу соотношения (3.1) и леммы 2.5

для любых $(y, w) \in Q_{3\delta/4} \times B_{5\rho/4}$ и $0 < t \leq T$, задача (2.5), (2.6), (2.22), (2.23) имеет единственное непродолжаемое решение $\{X_\varphi^\beta(y, w, t, \tau), V_\varphi^\beta(y, w, t, \tau)\}$ на полуинтервале $(0, t]$. Кроме того, $X_\varphi^\beta(y, w, t, \tau) \in Q_{\delta/2}$, $V_\varphi^\beta(y, w, t, \tau) \in B_{3\rho/2}$ для $\tau \in (0, t]$. Доопределяя функции $X_\varphi^\beta(y, w, t, \tau)$, $V_\varphi^\beta(y, w, t, \tau)$ по непрерывности в точке $\tau = 0$, мы обозначим $\hat{X}_\varphi^\beta(y, w, t) = X_\varphi^\beta(y, w, t, 0)$, $\hat{V}_\varphi^\beta(y, w, t) = V_\varphi^\beta(y, w, t, 0)$.

Очевидно, что для любого t , $0 < t \leq T$, отображение $\hat{S}_{\varphi, t}^\beta: \Omega_{\varphi, t}^\beta \rightarrow \Omega_0$, определенное по формуле

$$\hat{S}_{\varphi, t}^\beta(y, w) = (\hat{X}_\varphi^\beta(y, w, t), \hat{V}_\varphi^\beta(y, w, t)),$$

является обратным по отношению к $S_{\varphi, t}^\beta$, т. е.

$$\hat{S}_{\varphi, t}^\beta(S_{\varphi, t}^\beta(x, v)) = (x, v) \quad ((x, v) \in \Omega_0). \quad (3.2)$$

Пусть $\hat{S}_{\varphi, 0}^\beta(x, v) = (x, v)$.

Поскольку $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\bar{Q}))$, по теореме о дифференцируемости решений по начальным данным функция $\hat{S}_{\varphi, t}^\beta(y, w)$ непрерывно дифференцируема по y, w на множестве $\Omega_{\varphi, t}^\beta$. Из непрерывной дифференцируемости функции $\hat{S}_{\varphi, t}^\beta(y, w)$ $((y, w) \in \Omega_{\varphi, t}^\beta)$ по y и w , непрерывной дифференцируемости $S_{\varphi, t}^\beta(x, v)$ $((x, v) \in \Omega_0)$ по t и равенства (3.2) следует, что функция $\hat{S}_{\varphi, t}^\beta(y, w)$ $((y, w) \in \Omega_{\varphi, t}^\beta)$ непрерывно дифференцируема по t .

ЛЕММА 3.1. Пусть при некоторых $\delta, \rho > 0$, $G_{2\delta} \neq \emptyset$, выполняется условие 1.1, и пусть $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\bar{Q}))$, $\|\varphi\|_{2, T} \leq R_1$. Тогда существует постоянная $\hat{c}_0 = \hat{c}_0(T, \delta, \rho, h) > 0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^3 (|\mathcal{D}\hat{X}_{\varphi, t}^\beta(x, v, t)| + |\mathcal{D}\hat{V}_{\varphi, t}^\beta(x, v, t)|) \leq \hat{c}_0 \quad ((x, v) \in \Omega_{\varphi, t}^\beta, \quad 0 < t < T), \quad (3.3)$$

где $\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial v_j}$ ($j = 1, 2, 3$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x, v) \in \Omega_{\varphi, t}^\beta$. Уравнения в вариациях для системы (2.5), (2.6) имеют вид

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial X_{\varphi, \tau}^\beta}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial V_{\varphi, \tau}^\beta}{\partial x_j} \quad (0 < \tau < t, \quad 1 \leq i \leq 3), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial V_{\varphi, \tau}^\beta}{\partial x_j} \right) = & -\frac{\beta e}{m_\beta} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi(X_{\varphi, \tau}^\beta, \tau)}{\partial X_{\varphi, \tau}^\beta \partial X_{\varphi, \tau}^\beta} \frac{\partial X_{\varphi, \tau}^\beta}{\partial x_j} \\ & + \frac{\beta e}{m_\beta c} \left[\frac{\partial V_{\varphi, \tau}^\beta}{\partial x_j}, B \right]_i \quad (0 < \tau < t, \quad 1 \leq i \leq 3). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В силу (2.22), (2.23) начальные условия для системы уравнений (3.4), (3.5) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial X_{\varphi i}^{\beta}}{\partial x_j} \Big|_{\tau=t} = \delta_{ij} \quad (1 \leq i \leq 3), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial V_{\varphi i}^{\beta}}{\partial x_j} \Big|_{\tau=t} = 0 \quad (1 \leq i \leq 3). \quad (3.7)$$

Мы перейдем в (3.4), (3.5) к новой переменной $\xi = \tau$ и проинтегрируем получившиеся уравнения по ξ от τ до t с учетом начальных условий (3.6), (3.7). Затем мы перейдем к новой переменной $s = t - \xi$. Обозначим $\tilde{X}_{\varphi}^{\beta}(s) = X_{\varphi}^{\beta}(t - s)$, $\tilde{V}_{\varphi}^{\beta}(s) = V_{\varphi}^{\beta}(t - s)$. Пусть $\tau_1 = t - \tau$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{X}_{\varphi i}^{\beta}(\tau_1)}{\partial x_j} \right| &\leq \delta_{ij} + \int_0^{\tau_1} \left| \frac{\partial \tilde{V}_{\varphi i}^{\beta}(s)}{\partial x_j} \right| ds & (0 < \tau_1 < t, 1 \leq i \leq 3), \\ \left| \frac{\partial \tilde{V}_{\beta i}^{\beta}(\tau_1)}{\partial x_j} \right| &\leq \frac{e \|\varphi\|_{2,T}}{m_{\beta}} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\tau_1} \left| \frac{\partial \tilde{X}_{\varphi k}^{\beta}(s)}{\partial x_j} \right| ds \\ &\quad + \frac{eh}{m_{\beta}c} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\tau_1} \left| \frac{\partial \tilde{V}_{\varphi k}^{\beta}(s)}{\partial x_j} \right| ds & (0 < \tau_1 < t, 1 \leq i \leq 3). \end{aligned}$$

Из последних неравенств и леммы Гронуолла следует оценка

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \left(\left| \frac{\partial X_{\varphi i}^{\beta}(\tau)}{\partial x_j} \right| + \left| \frac{\partial V_{\varphi i}^{\beta}(\tau)}{\partial x_j} \right| \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\left| \frac{\partial \tilde{X}_{\varphi i}^{\beta}(\tau_1)}{\partial x_j} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{V}_{\varphi i}^{\beta}(\tau_1)}{\partial x_j} \right| \right) \leq \widehat{c}_0 \quad (0 < \tau < T). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Полагая $\tau = 0$ в функциях

$$\frac{\partial X_{\varphi}^{\beta}(\tau)}{\partial x_j} = \frac{\partial X_{\varphi}^{\beta}(x, v, t, \tau)}{\partial x_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V_{\varphi}^{\beta}(\tau)}{\partial x_j} = \frac{\partial V_{\varphi}^{\beta}(x, v, t, \tau)}{\partial x_j},$$

из неравенства (3.8) получаем (3.3). Аналогично рассматривается случай $\mathcal{D} = \partial/\partial v_j$. Лемма 3.1 доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть при некоторых $\delta, \rho > 0$, $G_{2\delta} \neq \emptyset$, выполняется условие 1.1, и пусть $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$, $\|\varphi\|_{2,T} \leq R_1$. Тогда существует постоянная $c_0 = c_0(T, \delta, \rho, h) > 0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^3 (|\mathcal{D} X_{\varphi i}^{\beta}(x, v, \tau)| + |\mathcal{D} V_{\varphi i}^{\beta}(x, v, \tau)|) \leq c_0 \quad ((x, v) \in \Omega_0, 0 < t < T). \quad (3.9)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1.

Для фиксированной функции $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$, $\|\varphi\|_{2,T} \leq R_1$, обозначим через $\{g_{\varphi}^{\beta}\}_{\beta=\pm 1}$ решение задачи (2.2), (2.3). Положим

$$p_{\varphi}^{\beta}(y, w, \tau) = g_{\varphi}^{\beta}(S_{\varphi, \tau}^{\beta}(y, w), \tau) \quad ((y, w) \in \Omega_0, 0 \leq \tau \leq T).$$

Очевидно, что функция $p_\varphi^\beta(y, w, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p_\varphi^\beta(y, w, \tau)}{\partial \tau} = \Psi_\varphi^\beta(S_{\varphi, \tau}^\beta(y, w), \tau) \quad ((y, w) \in \Omega_0, \quad 0 < \tau < T),$$

где

$$\Psi_\varphi^\beta(z, t) = \frac{\beta e}{m_\beta} (\nabla_{z'} \varphi(z', t), \nabla_{z''} \mathring{f}^\beta(z', z'')), \quad z = (z', z''), \quad z', z'' \in \mathbb{R}^3.$$

Интегрируя это уравнение по τ от 0 до t , получим

$$p_\varphi^\beta(y, w, t) = p_\varphi^\beta(y, w, 0) + \int_0^t \Psi_\varphi^\beta(S_{\varphi, \tau}^\beta(y, w), \tau) d\tau \quad ((y, w) \in \Omega_0, \quad 0 < t < T). \quad (3.10)$$

Обозначим $\mathcal{D}_0 = Q_{3\delta/2} \times B_{\rho/2}$, $\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta = \{\eta \in \mathbb{R}^6 : \eta = S_{\varphi, t}^\beta(y, w), (y, w) \in \mathcal{D}_0\}$, $(x, v) = S_{\varphi, t}^\beta(y, w)$.

Из (3.10) следует, что

$$g_\varphi^\beta(x, v, t) = g_0^\beta(\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta(x, v)) + \int_0^t \Psi_\varphi^\beta(S_{\varphi, \tau}^\beta(\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta(x, v)), \tau) d\tau \quad (3.11)$$

$$((x, v) \in \mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta, \quad 0 \leq t \leq T).$$

Доопределим функцию $g_\varphi^\beta(x, v, t)$ вне множества $\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta$ нулем, т. е. положим

$$g_\varphi^\beta(x, v, t) = 0 \quad ((x, v) \in (\overline{Q} \times \mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta, \quad 0 \leq t \leq T). \quad (3.12)$$

Докажем, что $g_\varphi^\beta \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Напомним, что по условию теоремы 1.1

$$\text{supp } g_0^\beta \subset \mathcal{D}_0 = Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}.$$

По определению отображения $\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta$ мы имеем $\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta(\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta) = \mathcal{D}_0$. Поэтому в силу непрерывной дифференцируемости $\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta$ по x, v, t функция $g_0^\beta(\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta(x, v))$, продолженная нулем вне множества $\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta$, принадлежит пространству $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$. В силу определения функции Ψ_φ^β и непрерывной дифференцируемости отображений $S_{\varphi, \tau}^\beta$ и $\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta$ по x, v, τ и t остается убедиться, что $\text{supp } \mathring{f}^\beta \subset \mathcal{D}_{\varphi, \tau}^\beta$ ($0 \leq \tau \leq T$). В силу леммы 2.3 с $\delta' = 3\delta/2$ и $\rho' = \rho/2$ мы получим

$$\partial \mathcal{D}_{\varphi, \tau}^\beta \subset (Q_{5\delta/4} \setminus \overline{Q}_{7\delta/4}) \times (B_{3\rho/4} \setminus \overline{B}_{\rho/4}). \quad (3.13)$$

Отсюда и из условия $\text{supp } \mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$ следует, что $\text{supp } \mathring{f}^\beta \subset \mathcal{D}_{\varphi, \tau}^\beta$ ($0 \leq \tau \leq T$).

Поскольку функция g_φ^β , определенная по формулам (3.11), (3.12), принадлежит пространству $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$, из метода характеристик следует, что она является классическим решением задачи (2.2), (2.3), при этом данное решение – единственное.

Обозначим

$$F_\varphi(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta g_\varphi^\beta(x, v, t) dv \quad (x \in \overline{Q}, 0 \leq t \leq T). \quad (3.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть выполняется условие 1.1. Тогда в силу (3.13), (3.1), если $(x, v) \in \mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta ((x, v) \in \Omega_{\varphi, t}^\beta)$, то $|v| < \rho$ ($|v| < 5\rho/4$). Следовательно, в (3.14) мы интегрируем по B_ρ ($B_{5\rho/4}$), т. е. интеграл в (3.14) существует.

Пусть

$$m_k = \max_{\beta} \|g_0^\beta\|_k = \max_{\beta} \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{\eta \in Q \times \mathbb{R}^3} |\mathcal{D}^\alpha g_0^\beta(\eta)|.$$

Обозначим

$$\delta_1 = \min_{\beta} \inf_{t \in [0, T]} \text{dist}(\mathcal{D}_{0, t}^\beta, \partial\Omega_{0, t}^\beta). \quad (3.15)$$

Из равенств $\mathcal{D}_0 = Q_{3\delta/2} \times B_{\rho/2}$, $\Omega_0 = Q_\delta \times B_\rho$ и леммы 2.2 следует, что

$$\delta_1 \geq \min \left\{ \frac{\delta}{4}, \frac{\rho}{2} \right\}. \quad (3.16)$$

Пусть

$$R = \min\{R_1, R_2\}, \quad (3.17)$$

где R_1 удовлетворяет неравенству (2.16), а $R_2 > 0$ выбирается из условия

$$\frac{2eTR_2}{m_{-1}} \exp(a_0 T) < \frac{\delta_1}{8}. \quad (3.18)$$

Обозначим $M_s = \{\varphi \in C([0, T], C_0^s(\overline{Q})): \|\varphi\|_{s, T} \leq R\}$, где $s > 0$.

Из формулы (3.15), неравенства (2.21) с R вместо R_1 и неравенства (3.16) следует, что

$$\delta_2 = \min_{\beta} \inf_{\varphi \in M_{2+\sigma}} \inf_{t \in [0, T]} \text{dist}(\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta, \partial\Omega_{\varphi, t}^\beta) \geq \frac{3\delta_1}{4}. \quad (3.19)$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $\delta > 0$ таково, что $G_{2\delta} \neq \emptyset$. Предположим, что выполняются условия 1.1, 1.2 и существует стационарное решение $\{0, \check{f}^\beta\}$ задачи (1.1), (1.2), (1.4), обладающее свойствами, сформулированными в первом утверждении теоремы 1.1. Предположим также, что $\text{supp}(f_0^\beta - \check{f}^\beta) \subset (Q_{2\delta} \cap Q'_N) \times B_{\rho/4}$ при некотором $N > 0$. Тогда для любого $\varphi \in M_{2+\sigma}$ имеем $F_\varphi \in C([0, T], C_0^\sigma(\overline{Q}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первых двух пунктах доказательства будем предполагать, что $\varphi \in M_{2+\delta}$ и при каждом $t \in [0, T]$ функция $\varphi(x, t)$ имеет компактный по x носитель.

I. Обозначим

$$F_{1\varphi}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta g_{1\varphi}^\beta(x, v, t) dv, \quad (3.20)$$

$$F_{2\varphi}(x, t) = F_\varphi(x, t) - F_{1\varphi}(x, t) \quad (x \in \overline{Q}, 0 \leq t \leq T),$$

где

$$g_{1\varphi}^\beta(x, v, t) = \begin{cases} g_0^\beta(\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta(x, v)), & (x, v) \in \mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta, \quad 0 \leq t \leq T, \\ 0, & (x, v) \in (\overline{Q} \times \mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Вначале докажем, что $F_{1\varphi} \in C([0, T], C(\overline{Q}))$. Из формулы (3.20), замечания 3.1 и формулы Тейлора следует, что

$$|F_{1\varphi}(x, t + \Delta t) - F_{1\varphi}(x, t)| \leq 2|B_\rho|m_1 \sum_\beta \left\{ \sup_{x, v} |\widehat{X}_\varphi(x, v, t + \Delta t) - \widehat{X}_\varphi^\beta(x, v, t)| \right. \\ \left. + \sup_{x, v} |\widehat{V}_\varphi^\beta(x, v, t + \Delta t) - \widehat{V}_\varphi^\beta(x, v, t)| \right\}$$

для всех $x \in Q$ таких, что $\{v: (x, v) \in \mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta \cup \mathcal{D}_{\varphi, t+\Delta t}^\beta\} \neq \emptyset$, и $t, t + \Delta t \in [0, T]$. Здесь мы рассматриваем супремумы на множестве $\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta \cup \mathcal{D}_{\varphi, t+\Delta t}^\beta$.

Поскольку функции $\widehat{X}_\varphi^\beta(x, v, t)$ и $\widehat{V}_\varphi^\beta(x, v, t)$ непрерывны на компакте $\{(x, v, t): (x, v) \in S_{\varphi, t}^\beta(\overline{\mathcal{D}_{0N}}), t \in [0, T]\}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $b_0 > 0$ такое, что

$$\sup_{x \in Q} |F_{1\varphi}(x, t + \Delta t) - F_{1\varphi}(x, t)| \leq \frac{\varepsilon}{5} \quad (3.21)$$

для $t, t + \Delta t \in [0, T]$, $|\Delta t| < b_0$, где $\mathcal{D}_{0N} = \{(y, w) \in \mathcal{D}_0: |y_3| < N\}$.

II. Докажем теперь, что $F_\varphi \in C([0, T], C^\sigma(\overline{Q}))$. Обозначим

$$(\delta_{\Delta x} f)(x) = f(x + \Delta x) - f(x), \quad \delta_3 = \min\{\delta_2, 1\},$$

где $\delta_2 > 0$ задается соотношением (3.19).

Из (3.20) следует, что $(\delta_{\Delta x} F_{1\varphi})(x, t) = 0$ для всех $x \in Q$ таких, что $\{v: (x, v) \in (\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta)^{\delta_3}\} = \emptyset$, где $0 \leq t \leq T$, $|\Delta x| \leq \delta_3$, $(\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta)^{\delta_3} = \{(x, v): \text{dist}((x, v), \mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta) < \delta_3\}$. Следовательно, в силу замечания 3.1 и формулы Тейлора мы получим

$$|\delta_{\Delta x} F_{1\varphi}(x, t + \Delta t) - \delta_{\Delta x} F_{1\varphi}(x, t)| \\ \leq |B_{2\rho}| \sum_\beta \sup_{x, \Delta x, v} |\delta_{\Delta x} g_0^\beta(\widehat{S}_{\varphi, t+\Delta t}^\beta(x, v)) - \delta_{\Delta x} g_0^\beta(\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta(x, v))| \\ \leq \sum_\beta \sum_{l=1,2} \sup_{x, \Delta x, v} \Phi_l^\beta, \quad (3.22)$$

где

$$\Phi_1^\beta = |B_{2\rho}| \int_0^1 \sum_j \left\{ |\delta_{\Delta x} g_{0X_j}^\beta(\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta + \theta(\widehat{S}_{\varphi, t+\Delta t}^\beta - \widehat{S}_{\varphi, t}^\beta))(\widehat{X}_{\varphi j}^\beta(x + \Delta x, v, t + \Delta t) \right. \\ \left. - \widehat{X}_{\varphi j}^\beta(x + \Delta x, v, t))| + |\delta_{\Delta x} g_{0V_j}^\beta(\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta + \theta(\widehat{S}_{\varphi, t+\Delta t}^\beta - \widehat{S}_{\varphi, t}^\beta)) \right. \\ \left. \times (\widehat{V}_{\varphi j}^\beta(x + \Delta x, v, t + \Delta t) - \widehat{V}_{\varphi j}^\beta(x + \Delta x, v, t))| \right\} d\theta, \\ \Phi_2^\beta = |B_{2\rho}| \int_0^1 \sum_j \left\{ |g_{0X_j}^\beta(\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta + \theta(\widehat{S}_{\varphi, t+\Delta t}^\beta - \widehat{S}_{\varphi, t}^\beta))\delta_{\Delta x}(\widehat{X}_{\varphi j}^\beta(x, v, t + \Delta t) \right. \\ \left. - \widehat{X}_{\varphi j}^\beta(x, v, t))| + |g_{0V_j}^\beta(\widehat{S}_{\varphi, t}^\beta + \theta(\widehat{S}_{\varphi, t+\Delta t}^\beta - \widehat{S}_{\varphi, t}^\beta)) \right. \\ \left. \times \delta_{\Delta x}(\widehat{V}_{\varphi j}^\beta(x, v, t + \Delta t) - \widehat{V}_{\varphi j}^\beta(x, v, t))| \right\} d\theta;$$

в (3.22) и далее мы рассматриваем супремумы по $(x, v) \in (\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta)^{\delta_3} \cup (\mathcal{D}_{\varphi, t+\Delta t}^\beta)^{\delta_3}$, $0 < |\Delta x| < \delta_3$, предполагая, что $t, t + \Delta t \in [0, T]$.

Вновь используя формулу Тейлора, лемму 3.1 и непрерывность функций $\widehat{X}_\varphi^\beta(x, v, t)$ и $\widehat{V}_\varphi^\beta(x, v, t)$ на компакте $\{(x, v, t) : (x, v) \in (\overline{S_{\varphi, t}^\beta(\mathcal{D}_{0N})})^{\delta_3}, t \in [0, T]\}$, мы заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $b_1 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \varphi_1^\beta &\leq k_1(\rho)m_2\widehat{c}_0(|\widehat{X}_\varphi^\beta(x + \Delta x, v, t + \Delta t) - \widehat{X}_\varphi^\beta(x + \Delta x, v, t)| \\ &\quad + |\widehat{V}_\varphi^\beta(x + \Delta x, v, t + \Delta t) - \widehat{V}_\varphi^\beta(x + \Delta x, v, t)|)|\Delta x| < \frac{|\Delta x|\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

для всех $(x, v) \in (\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta)^{\delta_3} \cup (\mathcal{D}_{\varphi, t+\Delta t}^\beta)^{\delta_3}$, $0 < |\Delta x| < \delta_3$ и $t, t + \Delta t \in [0, T]$ таких, что $|\Delta t| < b_1$.

Следовательно,

$$\sup_{x, x+\Delta x, v} \frac{\Phi_1^\beta}{|\Delta x|^\sigma} \leq \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{для} \quad t, t + \Delta t \in [0, T], \quad |\Delta t| < b_1. \quad (3.23)$$

Ввиду формулы Тейлора и непрерывности функций $\widehat{X}_{\varphi_{x_j}}^\beta(x, v, t)$ и $\widehat{V}_{\varphi_{x_j}}^\beta(x, v, t)$ на компакте $\{(x, v, t) : (x, v) \in (\overline{S_{\varphi, t}^\beta(\mathcal{D}_{0N})})^{\delta_3}, t \in [0, T]\}$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует $b_2 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \Phi_2^\beta &\leq k_2(\rho)m_1 \sum_j \int_0^1 \{|\widehat{X}_{\varphi_{x_j}}^\beta(x + s\Delta x, v, t + \Delta t) - \widehat{X}_{\varphi_{x_j}}^\beta(x + s\Delta x, v, t)| \\ &\quad + |\widehat{V}_{\varphi_{x_j}}^\beta(x + s\Delta x, v, t + \Delta t) - \widehat{V}_{\varphi_{x_j}}^\beta(x + s\Delta x, v, t)|\} ds |\Delta x| < \frac{|\Delta x|\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

для всех $(x, v) \in (\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta)^{\delta_3} \cup (\mathcal{D}_{\varphi, t+\Delta t}^\beta)^{\delta_3}$, $0 < |\Delta x| < \delta_3$ и $t, t + \Delta t \in [0, T]$ таких, что $|\Delta t| < b_2$.

Следовательно,

$$\sup_{x, x+\Delta x, v} \frac{\Phi_2^\beta}{|\Delta x|^\sigma} \leq \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{для} \quad t, t + \Delta t \in [0, T], \quad |\Delta t| < b_2. \quad (3.24)$$

Пусть $b_3 = \min\{b_1, b_2, b_0\}$. Тогда в силу (3.21)–(3.24) и замечания 1.1 с $b = \delta_3$ для любого $\varepsilon > 0$

$$\|F_{1\varphi}(\cdot, t + \Delta t) - F_{1\varphi}(\cdot, t)\|_\sigma \leq \varepsilon \quad \text{для} \quad t, t + \Delta t \in [0, T], \quad |\Delta t| < b.$$

Следовательно, отображение $[0, T] \ni t \mapsto F_{1\varphi}(\cdot, t) \in C^\sigma(\overline{Q})$ непрерывно на $[0, T]$.

Аналогично, используя замечание 3.1, леммы 3.1, 3.2 и формулу Тейлора, мы докажем непрерывность отображения $[0, T] \ni t \mapsto F_{2\varphi}(\cdot, t) \in C^\sigma(\overline{Q})$ на отрезке $[0, T]$.

III. Остается доказать, что для $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q}))$ отображение

$$[0, T] \ni t \mapsto F_\varphi(\cdot, t) \in C^\sigma(\overline{Q})$$

непрерывно на отрезке $[0, T]$ и $F_\varphi(\cdot, t) \in C_0^\sigma(\overline{Q})$. Действительно, существует последовательность функций $\varphi_p \in C([0, T], C^{2+\sigma}(\overline{Q}))$ таких, что при каждом $t \in [0, T]$ их носители компактны в $\overline{Q}$ и $\varphi_p \rightarrow \varphi$ в $C([0, T], C^{2+\sigma}(\overline{Q}))$. Из оценки (3.28), которая будет доказана ниже, следует, что $F_{\varphi_p} \rightarrow F_\varphi$ в норме пространства $C([0, T], C^\sigma(\overline{Q}))$, при этом по доказанному выше $F_{\varphi_p} \in C([0, T], C^\sigma(\overline{Q}))$. Следовательно, $F_\varphi \in C([0, T], C^\sigma(\overline{Q}))$. Кроме того, поскольку $g_0^\beta \subset Q'_N$ и $\varphi_p(\cdot, t)$ имеют компактные носители при $t \in [0, T]$, функции $F_{\varphi_p}(\cdot, t)$ также имеют компактные носители при $t \in [0, T]$. Таким образом, по определению $F_\varphi(\cdot, t) \in C_0^\sigma(\overline{Q})$ для всех $t \in [0, T]$. Лемма 3.3 доказана.

Положим $n_{k+1} = \max_{\beta, i} \|\hat{f}_{v_i}\|_k$.

ЛЕММА 3.4. Пусть выполняются условия леммы 3.3. Тогда для любого $\varphi \in M_{2+\sigma}$

$$\|F_\varphi\|_{\sigma, T} \leq c_1(m_1 + n_2), \quad (3.25)$$

где $c_1 = c_1(T, \delta, \rho, h, \sigma) > 0$ не зависит от φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Из (3.20) и замечания 3.1 следует, что

$$|F_{1\varphi}(x, t)| \leq \sum_{\beta} \int_{|v| < \rho} |g_0^\beta(\hat{S}_{\varphi, t}(x, v))| dv \leq 2|B_\rho|m_0 \quad (x \in Q, 0 \leq t \leq T). \quad (3.26)$$

II. В силу (3.19) мы имеем $\delta_3 > 0$. Очевидно, что $(\delta_{\Delta x} F_\varphi)(x, t) = 0$ для $x \in Q$ таких, что $\{v: (x, v) \in (\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta)^{\delta_3}\} = \emptyset$, где $0 \leq t \leq T$, $|\Delta x| \leq \delta_3$. Следовательно, используя замечание 3.1, формулу Тейлора и лемму 3.1, мы получим

$$\begin{aligned} |\delta_{\Delta x} F_{1\varphi}(x, t)| &\leq \sum_{\beta} \int_{|v| < 2\rho} |\delta_{\Delta x} g_0^\beta(\hat{S}_{\varphi, t}(x, v))| dv \\ &\leq m_1 \sum_{\beta} \int_{|v| < 2\rho} \sum_i \{|\delta_{\Delta x} \hat{X}_{\varphi i}^\beta(x, v, t)| + |\delta_{\Delta x} \hat{V}_{\varphi i}^\beta(x, v, t)|\} dv \\ &\leq 2m_1 \hat{c}_0 |B_{2\rho}| |\Delta x| \end{aligned} \quad (3.27)$$

для всех $x \in Q$ таких, что $\{v: (x, v) \in (\mathcal{D}_{\varphi, t}^\beta)^{\delta_3}\} \neq \emptyset$, и $|\Delta x| \leq \delta_3$, $0 \leq t \leq T$.

Заметим, что $\delta_3 = \delta_3(T, \delta, \rho, h)$. Поэтому из (3.26), (3.27), условия $|\Delta x| \leq \delta_3 \leq 1$ и замечания 1.1 с $b = \delta_3$ следует неравенство $\|F_{1\varphi}\|_{\sigma, T} \leq k_1 m_1$. Аналогично получим $\|F_{2\varphi}\|_{\sigma, T} \leq k_2 n_2$. Здесь $k_i = k_i(T, \delta, \rho, h, \sigma) > 0$. Таким образом, мы получаем неравенство (3.25). Лемма 3.4 доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть выполняются условия леммы 3.3. Тогда для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in M_{2+\sigma}$ мы имеем

$$\|F_{\varphi_1} - F_{\varphi_2}\|_{\sigma, T} \leq c_2(m_2 + n_3) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{2, T}, \quad (3.28)$$

где $c_2 = c_2(T, \delta, \rho, h, \sigma) > 0$ не зависит от φ_1, φ_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. По определению, $\text{supp } F_{1\varphi_j}^\beta(x, v, t) \subset \mathcal{D}_{\varphi_j, t}^\beta$ ($j = 1, 2$; $0 \leq t \leq T$). Из формул (3.15), (3.18) и неравенства (2.21) с R вместо R_1 следует, что

$$\min_{\beta} \inf_{\varphi_1, \varphi_2 \in M_{2+\sigma}} \inf_{t \in [0, T]} \text{dist}(\mathcal{D}_{\varphi_k, t}^\beta, \partial\Omega_{\varphi_j, t}) \geq \frac{3\delta_1}{4},$$

т. е. $\mathcal{D}_{\varphi_1, t}^\beta \cup \mathcal{D}_{\varphi_2, t}^\beta \subset \Omega_{\varphi_j, t}$ ($j = 1, 2$). Поэтому отображения $\widehat{S}_{\varphi_j, t}^\beta(x, v)$ определены для всех $(x, v) \in \mathcal{D}_{\varphi_1, t}^\beta \cup \mathcal{D}_{\varphi_2, t}^\beta$, $0 \leq t \leq T$.

С другой стороны, в силу формулы (3.20) мы имеем $F_{1\varphi_1}(x, t) = F_{1\varphi_2}(x, t) = 0$ для всех $x \in Q$ таких, что $\{v: (x, v) \in \bigcup_{\beta} (\mathcal{D}_{\varphi_1, t}^\beta \cup \mathcal{D}_{\varphi_2, t}^\beta)\} = \emptyset$, где $0 \leq t \leq T$.

Поэтому из замечания 3.1 и формулы Тейлора мы выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned} |F_{1\varphi_1}(x, t) - F_{1\varphi_2}(x, t)| &\leq \sum_{\beta} \int_{|v| < \rho} |g_0^\beta(\widehat{S}_{\varphi_1, t}^\beta(x, v)) - g_0^\beta(\widehat{S}_{\varphi_2, t}^\beta(x, v))| dv \\ &\leq 2m_1 \sum_{\beta} \int_{|v| < \rho} \{|\widehat{X}_{\varphi_1}^\beta(x, v, t) - \widehat{X}_{\varphi_2}^\beta(x, v, t)| + |\widehat{V}_{\varphi_1}^\beta(x, v, t) - \widehat{V}_{\varphi_2}^\beta(x, v, t)|\} dv \end{aligned} \quad (3.29)$$

для всех $x \in Q$ таких, что $\{v: (x, v) \in \bigcup_{\beta} (\mathcal{D}_{\varphi_1, t}^\beta \cup \mathcal{D}_{\varphi_2, t}^\beta)\} \neq \emptyset$, где $0 \leq t \leq T$.

Оценим правую часть (3.29). Пусть $\{X_{\varphi_l}^\beta(\tau), V_{\varphi_l}^\beta(\tau)\} = \{X_{\varphi_l}^\beta(x, v, t, \tau), V_{\varphi_l}^\beta(x, v, t, \tau)\}$, $\tau \in (0, t]$, – решение системы уравнений (2.5), (2.6) для $\varphi = \varphi_l$ ($l = 1, 2$) с начальными условиями

$$X_{\varphi_l}(x, v, t, \tau)|_{\tau=t} = x, \quad V_{\varphi_l}(x, v, t, \tau)|_{\tau=t} = v, \quad (3.30)$$

где $(x, v) \in \mathcal{D}_{\varphi_1, t}^\beta \cup \mathcal{D}_{\varphi_2, t}^\beta$.

Тогда, используя формулу Тейлора, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(X_{\varphi_1}^\beta - X_{\varphi_2}^\beta) &= (V_{\varphi_1}^\beta - V_{\varphi_2}^\beta) \quad (0 < \tau < t), \\ \frac{d}{d\tau}(V_{\varphi_1}^\beta - V_{\varphi_2}^\beta) &= -\frac{\beta e}{m_\beta} \sum_{j=1}^3 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial X_j} \nabla_X \varphi_1 \right) (X_{\varphi_2}^\beta + \theta(X_{\varphi_1}^\beta - X_{\varphi_2}^\beta), \tau) d\theta \\ &\quad \times (X_{\varphi_1, j}^\beta - X_{\varphi_2, j}^\beta) - \frac{\beta e}{m_\beta} (\nabla_X \varphi_1(X_{\varphi_2}^\beta, \tau) - \nabla_X \varphi_2(X_{\varphi_2}^\beta, \tau)) \\ &\quad + \frac{\beta e}{m_\beta c} [V_{\varphi_1}^\beta - V_{\varphi_2}^\beta, B] \quad (0 < \tau < t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Переходя к новой переменной $s = \tau$ и интегрируя систему уравнений (3.31) по s от τ до t , $0 < \tau < t$, в силу начальных условий (3.30) мы имеем

$$\begin{aligned} |X_{\varphi_1}^\beta(\tau) - X_{\varphi_2}^\beta(\tau)| &\leq \int_\tau^t |V_{\varphi_1}^\beta(s) - V_{\varphi_2}^\beta(s)| ds, \\ |V_{\varphi_1}^\beta(\tau) - V_{\varphi_2}^\beta(\tau)| &\leq \frac{2e}{m_\beta} \|\varphi_1\|_{2, T} \int_\tau^t |X_{\varphi_1}^\beta(s) - X_{\varphi_2}^\beta(s)| ds \\ &\quad + \frac{2Te}{m_\beta} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1, T} + \frac{e}{m_\beta c} h \int_\tau^t |V_{\varphi_1}^\beta(s) - V_{\varphi_2}^\beta(s)| ds. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Введем новые переменные $s_1 = t - s$ и $\tau_1 = t - \tau$. Обозначим $\tilde{X}_{\varphi_j}^\beta(\tau_1) = X_{\varphi_j}^\beta(\tau)$, $\tilde{V}_{\varphi_j}^\beta(\tau_1) = V_{\varphi_j}^\beta(\tau)$ ($j = 1, 2$). Тогда из неравенств (3.32) и леммы Грону-олла получаем

$$\begin{aligned} & |X_{\varphi_1}^\beta(\tau) - X_{\varphi_2}^\beta(\tau)| + |V_{\varphi_1}^\beta(\tau) - V_{\varphi_2}^\beta(\tau)| \\ &= |\tilde{X}_{\varphi_1}^\beta(\tau_1) - \tilde{X}_{\varphi_2}^\beta(\tau_1)| + |\tilde{V}_{\varphi_1}^\beta(\tau_1) - \tilde{V}_{\varphi_2}^\beta(\tau_1)| \leq k_0 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,T}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $k_0 = k_0(T, \delta, \rho, h) > 0$ не зависит от φ_1, φ_2 .

Положим $\tau = 0$ в (3.33). Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} & |X_{\varphi_1}^\beta(0) - X_{\varphi_2}^\beta(0)| + |V_{\varphi_1}^\beta(0) - V_{\varphi_2}^\beta(0)| \\ &= |\hat{X}_{\varphi_1}^\beta(x, v, t) - \hat{X}_{\varphi_2}^\beta(x, v, t)| + |\hat{V}_{\varphi_1}^\beta(x, v, t) - \hat{V}_{\varphi_2}^\beta(x, v, t)| \\ &\leq k_0 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,T}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Из неравенств (3.29), (3.34) следует, что

$$\sup_{x \in Q} |F_{1\varphi_1}(x, t) - F_{1\varphi_2}(x, t)| \leq 4m_1 k_0 |B_\rho| \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,T}. \quad (3.35)$$

II. В силу формулы (3.20) мы имеем $\delta_{\Delta x} F_{1\varphi_j}(x, t) = 0$, $j = 1, 2$, для $x \in Q$ таких, что $\{v: (x, v) \in (\mathcal{D}_{\varphi_1, t}^\beta)^{\delta_3} \cup (\mathcal{D}_{\varphi_2, t}^\beta)^{\delta_3}\} \neq \emptyset$, где $0 \leq t \leq T$, $|\Delta x| \leq \delta_3$.

Поэтому из замечания 3.1 и формулы Тейлора следует оценка

$$\begin{aligned} & |\delta_{\Delta x}(F_{1\varphi_1}(x, t) - F_{1\varphi_2}(x, t))| \\ &\leq \sum_{\beta} \int_{|v| < 2\rho} |\delta_{\Delta x}(g_0^\beta(\hat{S}_{\varphi_1, t}^\beta(x, v)) - g_0^\beta(\hat{S}_{\varphi_2, t}^\beta(x, v)))| dv \\ &\leq \sum_{\beta} \sum_{j=1,2} I_j^\beta, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$\begin{aligned} I_1^\beta &= \int_{|v| < 2\rho} dv \int_0^1 \sum_{j=1}^3 \left\{ |\delta_{\Delta x} g_{0X_j}^\beta(\hat{S}_{\varphi_2, t}^\beta + \theta(\hat{S}_{\varphi_1, t}^\beta - \hat{S}_{\varphi_2, t}^\beta)) \right. \\ &\quad \times (\hat{X}_{\varphi_1, j}^\beta(x + \Delta x, v, t) - \hat{X}_{\varphi_2, j}^\beta(x + \Delta x, v, t))| \\ &\quad + |\delta_{\Delta x} g_{0V_j}^\beta(\hat{S}_{\varphi_2, t}^\beta + \theta(\hat{S}_{\varphi_1, t}^\beta - \hat{S}_{\varphi_2, t}^\beta))(\hat{V}_{\varphi_1, j}^\beta(x + \Delta x, v, t) \\ &\quad \left. - \hat{V}_{\varphi_2, j}^\beta(x + \Delta x, v, t))| \right\} d\theta, \\ I_2^\beta &= \int_{|v| < 2\rho} dv \int_0^1 \sum_{j=1}^3 \left\{ |g_{0X_j}^\beta(\hat{S}_{\varphi_2, t}^\beta + \theta(\hat{S}_{\varphi_1, t}^\beta - \hat{S}_{\varphi_2, t}^\beta)) \delta_{\Delta x}(\hat{X}_{\varphi_1, j}^\beta - \hat{X}_{\varphi_2, j}^\beta)| \right. \\ &\quad \left. + |g_{0V_j}^\beta(\hat{S}_{\varphi_2, t}^\beta + \theta(\hat{S}_{\varphi_1, t}^\beta - \hat{S}_{\varphi_2, t}^\beta)) \delta_{\Delta x}(\hat{V}_{\varphi_1, j}^\beta - \hat{V}_{\varphi_2, j}^\beta)| \right\} d\theta. \end{aligned}$$

Оценим I_1^β . Очевидно, что неравенство (3.34), полученное для $(x, v) \in \bigcup_{\beta} (\mathcal{D}_{\varphi_1, t}^\beta \cup \mathcal{D}_{\varphi_2, t}^\beta)$, $0 \leq t \leq T$, справедливо также для $(x, v) \in \bigcup_{\beta} ((\mathcal{D}_{\varphi_1, t}^\beta)^{\delta_3} \cup$

$(\mathcal{D}_{\varphi_2,t}^\beta)^{\delta_3}$), $0 \leq t \leq T$. Поэтому в силу леммы 3.1 мы имеем

$$I_1^\beta \leq \widehat{k}_0 \widehat{c}_0 m_2 |B_{2\rho}| \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,T} |\Delta x|. \quad (3.37)$$

Легко видеть, что

$$I_2^\beta \leq 2m_1 |B_{2\rho}| \{|\delta_{\Delta x}(\widehat{X}_{\varphi_1}^\beta - \widehat{X}_{\varphi_2}^\beta)| + |\delta_{\Delta x}(\widehat{V}_{\varphi_1}^\beta - \widehat{V}_{\varphi_2}^\beta)|\}. \quad (3.38)$$

Чтобы оценить правую часть неравенства (3.38), применим оператор $\delta_{\Delta x}$ к обеим частям системы (3.31). Тогда мы получим

$$\frac{d}{d\tau} \delta_{\Delta x}(X_{\varphi_1}^\beta - X_{\varphi_2}^\beta) = \delta_{\Delta x}(V_{\varphi_1}^\beta - V_{\varphi_2}^\beta) \quad (0 < \tau < t), \quad (3.39)$$

$$\frac{d}{d\tau} \delta_{\Delta x}(V_{\varphi_1}^\beta - V_{\varphi_2}^\beta) = -\frac{\beta e}{m_\beta} \sum_{\mu=1}^4 J_\mu^\beta \quad (0 < \tau < t), \quad (3.40)$$

где

$$\begin{aligned} J_1^\beta &= \sum_{j=1}^3 \int_0^1 \left(\delta_{\Delta x} \frac{\partial}{\partial X_j} \nabla_X \varphi_1 \right) (X_{\varphi_2}^\beta + \theta(X_{\varphi_1}^\beta - X_{\varphi_2}^\beta), \tau) d\theta \\ &\quad \times (X_{\varphi_1,j}^\beta(x + \Delta x, v, t, \tau) - X_{\varphi_2,j}^\beta(x + \Delta x, v, t, \tau)), \\ J_2^\beta &= \sum_{j=1}^3 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial X_j} \nabla_X \varphi_1 \right) (X_{\varphi_2}^\beta + \theta(X_{\varphi_1}^\beta - X_{\varphi_2}^\beta), \tau) d\theta \delta_{\Delta x}(X_{\varphi_1,j}^\beta - X_{\varphi_2,j}^\beta), \\ J_3^\beta &= \delta_{\Delta x}(\nabla_X \varphi_1(X_{\varphi_2}^\beta, \tau) - \nabla_X \varphi_2(X_{\varphi_2}^\beta, \tau)), \\ J_4^\beta &= -\frac{1}{c} [\delta_{\Delta x}(V_{\varphi_1}^\beta - V_{\varphi_2}^\beta), B]. \end{aligned}$$

Из формулы Тейлора, леммы 2.5 и неравенств (3.8), (3.33) мы выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned} |J_1^\beta| &\leq k_1 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,T} |\Delta x|^\sigma, & |J_2^\beta| &\leq k_2 |\delta_{\Delta x}(X_{\varphi_1}^\beta - X_{\varphi_2}^\beta)|, \\ |J_3^\beta| &\leq k_3 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{2,T} |\Delta x|, & |J_4^\beta| &\leq k_4 |\delta_{\Delta x}(V_{\varphi_1}^\beta - V_{\varphi_2}^\beta)|, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $k_j = k_j(T, \delta, \rho, h) > 0$, $j = 1, \dots, 4$, не зависят от φ_1, φ_2 .

В силу (3.30) начальные условия для системы дифференциальных уравнений (3.39), (3.40) имеют вид

$$\delta_{\Delta x}(X_{\varphi_1}^\beta - X_{\varphi_2}^\beta)|_{\tau=t} = 0, \quad (3.42)$$

$$\delta_{\Delta x}(V_{\varphi_1}^\beta - V_{\varphi_2}^\beta)|_{\tau=t} = 0. \quad (3.43)$$

Интегрируя систему уравнений (3.39), (3.40) от τ до t , $0 < \tau < t$, с начальными условиями (3.42), (3.43), в силу (3.41) получим

$$|\delta_{\Delta x}(X_{\varphi_1}^\beta(\tau) - X_{\varphi_2}^\beta(\tau))| \leq \int_\tau^t |\delta_{\Delta x}(V_{\varphi_1}^\beta(s) - V_{\varphi_2}^\beta(s))| ds, \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} |\delta_{\Delta x}(V_{\varphi_1}^\beta(\tau) - V_{\varphi_2}^\beta(\tau))| &\leq \frac{Te}{m_\beta}(k_1 + k_3)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{2,T}|\Delta x|^\sigma \\ &\quad + \frac{e}{m_\beta} \int_\tau^t \{k_2|\delta_{\Delta x}(X_{\varphi_1}^\beta(s) - X_{\varphi_2}^\beta(s))| \\ &\quad + k_4|\delta_{\Delta x}(V_{\varphi_1}^\beta(s) - V_{\varphi_2}^\beta(s))|\} ds. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Делая замену переменных в (3.44), (3.45) и используя лемму Гронуолла, аналогично (3.34) мы получаем

$$\begin{aligned} &|\delta_{\Delta x}(X_{\varphi_1}^\beta(0) - X_{\varphi_2}^\beta(0))| + |\delta_{\Delta x}(V_{\varphi_1}^\beta(0) - V_{\varphi_2}^\beta(0))| \\ &= |\delta_{\Delta x}(\hat{X}_{\varphi_1}(x, v, t) - \hat{X}_{\varphi_2}(x, v, t))| \\ &\quad + |\delta_{\Delta x}(\hat{V}_{\varphi_1}(x, v, t) - \hat{V}_{\varphi_2}(x, v, t))| \leq k_5\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{2,T}|\Delta x|^\sigma, \end{aligned}$$

где $k_5 = k_5(T, \delta, \rho, h) > 0$ не зависит от φ_1, φ_2 .

Таким образом, из (3.36)–(3.38) мы выводим оценку

$$\sup_{\substack{x, x+\Delta x \in Q, \\ 0 < |\Delta x| < \delta_3}} \frac{|\delta_{\Delta x}(F_{1\varphi_1}(x, t) - F_{1\varphi_2}(x, t))|}{|\Delta x|^\sigma} \leq k_6 m_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{2,T}, \quad (3.46)$$

где $k_6 = k_6(T, \delta, \rho, h) > 0$ не зависит от φ_1, φ_2 .

Из (3.35), (3.46) и замечания 1.1 следует неравенство

$$\|F_{1\varphi_1} - F_{1\varphi_2}\|_{\sigma,T} \leq k_7 m_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{2,T}.$$

Аналогично получим

$$\|F_{2\varphi_1} - F_{2\varphi_2}\|_{\sigma,T} \leq k_8 n_3 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{2,T}.$$

Здесь $k_i = k_i(T, \delta, \rho, h, \sigma) > 0$, $i = 7, 8$. Таким образом мы получаем неравенство (3.28). Лемма 3.5 доказана.

4. Доказательство теоремы 1.1

4.1. Для доказательства теоремы 1.1 нам понадобится вспомогательное утверждение, касающееся однозначной разрешимости уравнения Пуассона с условием Дирихле в бесконечном цилиндре. Близкий результат можно найти в [87]. Однако для удобства читателя мы приведем независимое достаточно простое доказательство этого утверждения.

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in Q) \quad (4.1)$$

с условием Дирихле

$$u(x) = 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (4.2)$$

Обозначим $C_0(\overline{Q}) = \{w \in C(\overline{Q}) : w(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x_3| \rightarrow \infty \text{ равномерно по } x' \in G\}$. Очевидно, что $C_0^s(\overline{Q}) \subset C_0(\overline{Q})$.

Поскольку ниже будут использоваться пространства Гёльдера $C^s(\overline{\mathcal{D}})$ в различных областях $\mathcal{D}$, мы будем обозначать норму в этих пространствах через $\|\cdot\|_{C^s(\overline{\mathcal{D}})}$.

ЛЕММА 4.1. *Для любой функции $f \in C_0^\sigma(\overline{Q})$ существует единственное решение $u \in C_0^{2+\sigma}(\overline{Q})$ задачи (4.1), (4.2) и*

$$\|u\|_{C^{2+\sigma}(\overline{Q})} \leq c_3 \|f\|_{C^\sigma(\overline{Q})}, \quad (4.3)$$

где $c_3 > 0$ не зависит от f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале будем предполагать, что функция $f \in C^\sigma(\overline{Q})$ имеет компактный носитель.

I. Докажем, что для любого решения $u \in C^2(Q) \cap C_0(\overline{Q})$ задачи (4.1), (4.2) имеет место оценка

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leq k_1 \|f\|_{C(\overline{Q})}, \quad (4.4)$$

где $k_1 > 0$ не зависит от f .

В силу принципа максимума при $f(x) \equiv 0$ ($x \in \overline{Q}$) существует единственное тривиальное решение задачи (4.1), (4.2) в пространстве $C^2(Q) \cap C_0(\overline{Q})$, которое, очевидно, удовлетворяет неравенству (4.4). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $f(x) \not\equiv 0$ ($x \in \overline{Q}$).

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta_{x'} \psi(x') = -1 \quad (x' \in G), \quad (4.5)$$

$$\psi(x') = 0 \quad (x' \in \partial G). \quad (4.6)$$

Задача (4.5), (4.6) имеет единственное решение $\psi \in C^\infty(\overline{G})$, при этом $\psi(x') \geq 0$ ($x' \in \overline{G}$). Очевидно, что функция $v(x) = A\psi(x')$ является решением задачи

$$\Delta v(x) = -A \quad (x \in Q), \quad (4.7)$$

$$v(x) = 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (4.8)$$

где $A \in \mathbb{R}$.

Положим $A = 2\|f\|_{C(\overline{Q})}$. Докажем, что $u(x) \leq A\psi(x')$ для всех $x \in \overline{Q}$. Предположим противное: существует $x^0 \in Q$ такое, что $u(x^0) > v(x^0)$. Из условия $u \in C_0(\overline{Q})$ следует существование такого числа $N > 0$, что $u(x) < u(x^0) - v(x^0)$ при $|x_3| \geq N$, $x' \in \overline{G}$ и $x^0 \in G \times (-N, N)$. Поскольку $v(x) \geq 0$, то $u(x) - v(x) < u(x^0) - v(x^0)$ при $|x_3| \geq N$, $x' \in \overline{G}$. Обозначим $Q_{N,f} = \{x \in Q : |x_3| < N, u(x) > v(x)\}$ и $w(x) = v(x) - u(x)$. По построению $x^0 \in Q_{N,f}$. Поэтому $Q_{N,f} \neq \emptyset$. Очевидно, что $w(x) = 0$ при $x \in \partial G \times [-N, N]$ и $w(x) > w(x^0)$ при $x \in (G \times \{-N\}) \cup (G \times \{N\})$. Поскольку $w(x^0) < 0$, функция $w(x)$ принимает наименьшее отрицательное значение на множестве $\overline{Q}_{N,f}$ в точке $x^1 \in Q_{N,f}$.

Поэтому $\Delta w(x^1) \geq 0$. С другой стороны, так как $A > \|f\|_{C(\overline{Q})}$, мы получим $\Delta w(x^1) < 0$. Это противоречие доказывает, что $u(x) \leq A\psi(x')$. Аналогично можно показать, что $u(x) \geq -A\psi(x')$. Таким образом, $|u(x)| \leq A\psi(x')$. Отсюда вытекает неравенство (4.4).

II. Докажем, что если $u \in C^2(Q) \cap C_0(\overline{Q})$ – решение задачи (4.1), (4.2), то $u \in C^{2+\sigma}(\overline{Q})$ и справедлива оценка (4.3).

Обозначим $Q'_N = \{x \in Q: |x_3| < N\}$. В силу леммы 6.18 из [37; гл. 6] $u \in C^{2+\sigma}(\overline{Q'_N})$ для любого $N > 0$. Отсюда и из леммы 6.5 в [37; гл. 6] следует, что для любого $N > 0$ справедлива оценка

$$\|u\|_{C^{2+\sigma}(\overline{Q'_N})} \leq k_2(\|u\|_{C(\overline{Q'_{N+1}})} + \|f\|_{C^\sigma(\overline{Q'_{N+1}})}), \quad (4.9)$$

где $k_2 > 0$ не зависит от N и f .

Из (4.9) и (4.4) вытекает неравенство

$$\|u\|_{C^{2+\sigma}(\overline{Q'_N})} \leq k_2(\|u\|_{C(\overline{Q})} + \|f\|_{C^\sigma(\overline{Q})}) \leq k_3\|f\|_{C^\sigma(\overline{Q})}. \quad (4.10)$$

Отсюда мы получаем оценку (4.3).

III. Докажем теперь, что для любой функции $f \in C^\sigma(\overline{Q})$ с компактным носителем существует решение $u \in C^2(Q) \cap C_0(\overline{Q})$ задачи (4.1), (4.2).

Введем весовое пространство $W_{2,\beta}^k(Q)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{Q})$ по норме

$$\|u\|_{W_{2,\beta}^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q e^{2\beta x_3} |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $C_0^\infty(\overline{Q})$ – множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{Q}$ функций с компактными носителями в $\overline{Q}$, $k \geq 0$ – целое, $\beta \in \mathbb{R}$. При $\beta = 0$ пространство $W_{2,\beta}^k(Q)$ совпадает с пространством Соболева $W_2^k(Q)$.

Наряду с задачей (4.1), (4.2) рассмотрим вспомогательную задачу на собственные функции и собственные значения

$$-\Delta_{x'} e(x') + \lambda^2 e(x') = 0 \quad (x' \in G), \quad (4.11)$$

$$e(x') = 0 \quad (x' \in \partial G). \quad (4.12)$$

Как известно, собственные значения задачи (4.11), (4.12) чисто мнимые, изолированные и имеют конечную кратность, при этом нуль не является собственным значением задачи (4.11), (4.12). Из теоремы 1.1 из [65] следует, что если прямая $\text{Im } \lambda = \beta$ не содержит собственных значений задачи (4.11), (4.12), то краевая задача (4.1), (4.2) имеет единственное решение $u \in W_{2,\beta}^2(Q)$ для любой правой части $f \in W_{2,\beta}^0(Q)$.

Следовательно, краевая задача (4.1), (4.2) имеет единственное решение $u \in W_{2,0}^2(Q) = W_2^2(Q)$ для любой $f \in C^\sigma(\overline{Q})$ с компактным носителем. Поскольку $f \in C^\sigma(\overline{Q})$, то в силу теоремы 9.19 из [37; гл. 9] $u \in C^{2+\sigma}(\overline{Q'_N})$ для любого $N > 0$. Кроме того, из соотношения $u \in W_2^2(Q)$ следует, что $\|u\|_{W_2^2(Q \setminus \overline{Q'_N})} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. В силу теоремы вложения Соболева $u \in C(\overline{Q})$ и

$$\|u\|_{C(\overline{Q \setminus \overline{Q'_N}})} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (4.13)$$

т.е. $u \in C_0(\overline{Q})$. Таким образом, мы доказали, что для любой функции $f \in C^\sigma(\overline{Q})$ с компактным носителем существует решение $u \in C^2(Q) \cap C_0(\overline{Q})$ задачи (4.1), (4.2). Отсюда и из пунктов I и II доказательства следует, что для любой функции $f \in C^\sigma(\overline{Q})$ с компактным носителем существует единственное решение $u \in C^{2+\sigma}(\overline{Q}) \cap C_0(\overline{Q})$ задачи (4.1), (4.2) и при этом выполняется оценка (4.3).

IV. Докажем теперь, что $u \in C_0^{2+\sigma}(\overline{Q})$. Для этого достаточно убедиться, что $\xi_N u \rightarrow u$ в $C^{2+\sigma}(\overline{Q})$ при $N \rightarrow \infty$, где $\xi_N = \xi_N(x_3) \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ – четная функция, $0 \leq \xi_N(x_3) \leq 1$ при $x_3 \in \mathbb{R}$, $\xi_N(x_3) = 1$ при $|x_3| \leq N$, $\xi_N(x_3) = 0$ при $|x_3| \geq N+1$ и $|\xi_N^{(i)}(x_3)| \leq k'_3$ при $x_3 \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$), $k'_3 > 0$ не зависит от x_3 и N .

Используя оценку нормы произведения двух функций в пространстве Гёльдера и неравенство, аналогичное (4.9), получим

$$\begin{aligned} \|(1 - \xi_N)u\|_{C^{2+\sigma}(\overline{Q})} &= \|(1 - \xi_N)u\|_{C^{2+\sigma}(\overline{Q \setminus Q'_N})} \\ &\leq k_4 \|1 - \xi_N\|_{C^{2+\sigma}(\overline{Q \setminus Q'_N})} \|u\|_{C^{2+\sigma}(\overline{Q \setminus Q'_N})} \\ &\leq k_5 \|u\|_{C^{2+\sigma}(\overline{Q \setminus Q'_N})} \\ &\leq k_6 (\|u\|_{C(\overline{Q \setminus Q'_{N-1}})} + \|f\|_{C^\sigma(\overline{Q \setminus Q'_{N-1}})}) \\ &= k_6 \|u\|_{C(\overline{Q \setminus Q'_{N-1}})}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь N таково, что $f(x) \equiv 0$ при $x \in \overline{Q \setminus Q'_{N-1}}$; $k_4, k_5, k_6 > 0$ не зависят от N и f .

Из (4.13), (4.14) следует, что

$$\|u - \xi_N u\|_{C^{2+\sigma}(\overline{Q})} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что по определению множество функций из $C^\sigma(\overline{Q})$ с компактными носителями всюду плотно в $C_0^\sigma(\overline{Q})$. Лемма 4.1 доказана.

4.2. Докажем первое утверждение в теореме 1.1. Пусть $\delta > 0$ – такое число, что $G_{2\delta} \neq \emptyset$ и $\delta < \delta_0$, и пусть для этого δ и некоторых $h, \rho > 0$ выполняется условие 1.1. Построим стационарное решение $\{0, \hat{f}^{\beta}\}$ уравнений (1.1), (1.2), обладающее свойствами

$$\hat{f}^{\beta} \in C^\infty(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3), \quad \text{supp } \hat{f}^{\beta} \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}, \quad \sup_{x,v} \hat{f}^{\beta}(x, v) > \alpha.$$

4.2a. Пусть $\hat{\varphi}(x) \equiv 0$ ($x \in \overline{Q}$). Тогда система (1.11) примет вид

$$(v, \nabla_x \hat{f}^{\beta}) + \frac{\beta e}{cm_\beta} ([v, B], \nabla_v \hat{f}^{\beta}) = 0 \quad (x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1). \quad (4.15)$$

Будем искать решение уравнения (4.15) в виде произведения двух срезающих функций, аргументами которых служат первые интегралы системы уравнений (2.5), (2.6). Различные частные решения уравнения (4.15) будем обозначать через $\hat{f}_i^{\beta}$ ($i = 1, \dots, 4$).

Очевидно, что функция $\hat{f}_1^\beta(x, v) = |v|^2$ является решением уравнения (4.15) для любых $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$ и $\beta = \pm 1$. Введем четные функции $\psi_1^\beta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ так, что $\psi_1^\beta(0) = 2\alpha > 0$, $\psi_1^\beta(\tau) \geq 0$,

$$\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_1^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^2}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_1^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^2}\right) \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

$\text{supp } \psi_1^{-1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16)$, где $0 < \rho_1 < \rho$. Поскольку $m_{+1} > m_{-1}$, то $\text{supp } \psi_1^{+1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16)$. Функция $\hat{f}_2^\beta(x, v) = \psi_1^\beta(|v|^2)$ является решением уравнения (4.15).

Будем искать теперь решение уравнения (4.15) в виде квадратичной формы с неопределенными коэффициентами:

$$\hat{f}_3^\beta(x, v) = \sum_{i,j=1}^3 (\alpha_{ij} x_i x_j + \beta_{ij} x_i v_j + \gamma_{ij} v_i v_j). \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.15) и приравнявая коэффициенты в подобных членах, получим

$$\hat{f}_3^\beta(x, v) = \left(\frac{eh}{m_\beta c} x_1 + \beta v_2 \right)^2 + \left(\frac{eh}{m_\beta c} x_2 - \beta v_1 \right)^2.$$

Введем четные функции $\psi_2^\beta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ так, что $\psi_2^\beta(0) = 1$, $\psi_2^\beta(\tau) \geq 0$,

$$\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_2^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^2}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_2^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^2}\right) \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

$\text{supp } \psi_2^{-1} \subset (-\rho_0^2, \rho_0^2)$, где $\rho_0 = 15\rho\delta_0/\delta$. Поскольку $m_{+1} > m_{-1}$, то $\text{supp } \psi_2^{+1} \subset (-\rho_0^2, \rho_0^2)$. Функция

$$\hat{f}_4^\beta(x, v) = \psi_2^\beta \left(\left(\frac{eh}{m_\beta c} x_1 + \beta v_2 \right)^2 + \left(\frac{eh}{m_\beta c} x_2 - \beta v_1 \right)^2 \right)$$

является решением уравнения (4.15).

4.2b. Докажем, что вектор-функция $\{0, \hat{f}_2^\beta \hat{f}_4^\beta\}$ является стационарным решением задачи (1.1), (1.2), (1.4), удовлетворяющим условиям теоремы 1.1.

По построению функция $\hat{f}^\beta(x, v) = \hat{f}_2^\beta(x, v) \hat{f}_4^\beta(x, v)$ удовлетворяет уравнению (4.15) и $\sup_{x,v} \hat{f}^\beta(x, v) \geq \hat{f}^\beta(0, 0) = 2\alpha > 0$. В силу леммы 4.1 остается доказать, что правая часть уравнения (1.10) тождественно равна нулю и $\text{supp } \hat{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$.

Докажем, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}^{+1}(x, v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}^{-1}(x, v) dv.$$

Сделаем замены переменных $y = (eh/c)x$ и $w = m_{+1}(v_2, -v_1, v_3)$. Обозначим $y' = (y_1, y_2)$ и $w' = (w_1, w_2)$. Тогда, используя равенства

$$\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_j^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^2}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_j^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^2}\right) \quad (j = 1, 2; \tau \in \mathbb{R})$$

и вводя переменные $x = (c/(eh))y$ и $v = (1/m_{-1})(w_2, -w_1, w_3)$, получим

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}^{+1}(x, v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1^{+1}(|v|^2) \psi_2^{+1} \left(\left(\frac{eh}{m_{+1}c} x_1 + v_2 \right)^2 + \left(\frac{eh}{m_{+1}c} x_2 - v_1 \right)^2 \right) dv \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{m_{+1}^3} \psi_1^{+1} \left(\frac{|w|^2}{m_{+1}^2} \right) \psi_2^{+1} \left(\frac{|y' + w'|^2}{m_{+1}^2} \right) dw \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{m_{-1}^3} \psi_1^{-1} \left(\frac{|w|^2}{m_{-1}^2} \right) \psi_2^{-1} \left(\frac{|y' + w'|^2}{m_{-1}^2} \right) dw \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1^{-1}(|v|^2) \psi_2^{-1} \left(\left(\frac{eh}{m_{-1}c} x_1 - v_2 \right)^2 + \left(\frac{eh}{m_{-1}c} x_2 + v_1 \right)^2 \right) dv \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}^{-1}(x, v) dv.
 \end{aligned}$$

Таким образом, правая часть уравнения (1.10) тождественно равна нулю.

Докажем теперь, что $\text{supp } \check{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$. Действительно, если $|v| > \rho_1/4$, то по построению $f_2^\beta(x, v) = \psi_1^\beta(|v|^2) = 0$. Следовательно, $\check{f}^\beta(x, v) = 0$ для $|v| > \rho_1/4$. Пусть $B_{\delta_0}(g)$ – круг наибольшего радиуса такой, что $B_{\delta_0}(g) \subset G_{2\delta}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $g = 0$. Если $|x'| > \delta_0/2$, $|v| \leq \rho_1/4$, то из условия 1.1 и неравенства $\delta_0/\delta > 1$ вытекает, что

$$\left| \frac{eh}{m_\beta c} x' + \beta z' \right| \geq \frac{eh}{m_\beta c} |x'| - |z'| > \frac{16c\rho}{e\delta} \frac{m_\beta e \delta_0}{m_\beta c} - \rho > \frac{15\rho\delta_0}{\delta},$$

где $z' = (v_2, -v_1)$.

Следовательно,

$$f_4^\beta(x, v) = \psi_2^\beta \left(\left| \frac{eh}{m_\beta c} x' + \beta z' \right|^2 \right) = 0.$$

Таким образом, $\check{f}^\beta(x, v) = 0$ для $|x'| > \delta_0/2$, $|v| \leq \rho/4$.

4.3. Для доказательства теоремы 1.1 остается показать, что при выполнении условий 1.1, 1.2 для любого $T > 0$ и всех $\check{f}_0^\beta$ и g_0^β , удовлетворяющих соотношениям

$$\text{supp } g_0^\beta \subset (Q_{2\delta} \cap Q'_N) \times B_{\rho/4}, \quad (4.17)$$

$$\|g_0^\beta\|_1 + \max_i \|f_{v_i}^\beta\|_1 < R(4\pi e c_1 c_3)^{-1}, \quad (4.18)$$

$$\|g_0^\beta\|_2 + \max_i \|f_{v_i}^\beta\|_2 < (4\pi e c_2 c_3)^{-1}, \quad (4.19)$$

существует единственное классическое решение задачи (2.1)–(2.4), при этом

$$\text{supp } g^\beta(\cdot, \cdot, t) \subset Q_{5\delta/4} \times B_\rho \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

Здесь $c_1, c_2, c_3 > 0$ – константы из лемм 3.4, 3.5 и 4.1.

Пусть $\varphi \in M_{2+\sigma}$ – произвольная функция. Тогда в силу леммы 3.3

$$F_\varphi \in C([0, T], C_0^\sigma(\overline{Q})).$$

Поэтому согласно лемме 4.1 существует единственное классическое решение $u_\varphi(x, t)$ задачи (4.1), (4.2) с $f(x) = 4\pi e F_\varphi(x, t)$ при каждом $t \in [0, T]$, причем

$$u_\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q})) \quad \text{и} \quad u_\varphi|_{\partial Q \times (0, T)} = 0.$$

Обозначим $A\varphi = u_\varphi$.

Из (3.25), (4.3) и (4.18) следует, что

$$\|A\varphi\|_{2+\sigma, T} \leq R \quad (\varphi \in M_{2+\sigma}). \quad (4.20)$$

В силу (4.19), (3.28) и (4.3) имеем

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\|_{2+\sigma, T} \leq \theta \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{2+\sigma, T} \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in M_{2+\sigma}), \quad (4.21)$$

где $\theta = 4\pi e(m_2 + n_3)c_2c_3 < 1$.

Таким образом, оператор A отображает полное метрическое пространство $M_{2+\sigma}$ в себя и является сжимающим. Поэтому по теореме Банаха оператор A имеет единственную неподвижную точку в $M_{2+\sigma}$. Таким образом, задача (2.1)–(2.4) имеет единственное классическое решение $\{\varphi, g_\varphi^\beta\}$, где φ – неподвижная точка оператора A , а функции g_φ^β определены по формулам (3.11), (3.12). Теорема 1.1 доказана.

5. Некоторые обобщения

В доказательстве теоремы 1.1 мы использовали лишь ограниченность обратного оператора к оператору Лапласа с однородным условием Дирихле, действующего из $C_0^\sigma(\overline{Q})$ в $C_0^{2+\sigma}(\overline{Q})$. При этом явный вид оператора и краевых условий не играл роли. Поэтому естественно рассматривать следующее обобщение задачи (1.1)–(1.4):

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + (v, \nabla_x f^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(-\nabla_x P \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_\beta \beta f^\beta(x, v, t) dv \right) + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^\beta \right) = 0 \quad (5.1)$$

$$(x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T, \beta = \pm 1),$$

$$f^\beta(x, v, t)|_{t=0} = f_0^\beta(x, v) \quad (x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1). \quad (5.2)$$

Здесь P – линейный ограниченный оператор, отображающий линейное пространство $C_0^\sigma(\overline{Q})$ в пространство $C_0^{2+\sigma}(\overline{Q})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из ограниченности оператора $P: C_0^\sigma(\bar{Q}) \rightarrow C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$ следует, что для любой функции $F(x, t) \in C([0, T], C_0^\sigma(\bar{Q}))$ мы имеем $(PF)(x, t) \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\bar{Q}))$ и

$$\|PF\|_{2+\sigma, T} \leq c_4 \|F\|_{\sigma, T}. \quad (5.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Вектор-функцию $\{f^\beta\}$, $f^\beta \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$, $\beta = \pm 1$, мы назовем классическим решением задачи (5.1), (5.2), если

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^\beta(\cdot, v, t) dv \in C([0, T], C_0^\sigma(\bar{Q}))$$

и $\{f^\beta\}$ удовлетворяет уравнению (5.1) и начальному условию (5.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Вектор-функцию $\{\hat{f}^\beta\}$, $\hat{f}^\beta \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3)$, мы назовем стационарным решением уравнения (5.1), если

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \hat{f}^\beta(\cdot, v) dv \in C_0^\sigma(\bar{Q})$$

и $\{\hat{f}^\beta\}$ удовлетворяет уравнению

$$(v, \nabla_x \hat{f}^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(-\nabla_x P \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta \hat{f}^\beta(x, v) dv \right) + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v \hat{f}^\beta \right) = 0 \quad (5.4)$$

$$(x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1).$$

Повторяя доказательство теоремы 1.1, в силу замечания 5.1 мы получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\delta > 0$ таково, что $G_{2\delta} \neq \emptyset$ и $\delta_0 > \delta$, и пусть для этого δ и некоторых $h, \rho > 0$ выполняется условие 1.1. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует стационарное решение $\{\hat{f}^\beta\}$ уравнения (5.1), обладающее следующими свойствами:

$$\hat{f}^\beta \in C^\infty(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3), \quad \text{supp } \hat{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4},$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta \hat{f}^\beta(x, v) dv = 0 \quad (x \in \bar{Q}), \quad \sup_{x, v} \hat{f}^\beta(x, v) > \alpha.$$

Если при этом выполнено условие 1.2, то для любого $T > 0$ и всех стационарных решений $\hat{f}^\beta$ с указанными выше свойствами и начальными функциями f_0^β , удовлетворяющих соотношениям

$$\text{supp}(f_0^\beta - \hat{f}^\beta) \subset (Q_{2\delta} \cap Q'_N) \times B_{\rho/4}, \quad (5.5)$$

$$\|f_0^\beta - \hat{f}^\beta\|_1 + \max_{i=1,2,3} \|\hat{f}_{v_i}^\beta\|_1 < R(4\pi e c_1 c_4)^{-1}, \quad (5.6)$$

$$\|f_0^\beta - \hat{f}^\beta\|_2 + \max_{i=1,2,3} \|\hat{f}_{v_i}^\beta\|_2 < (4\pi e c_2 c_4)^{-1} \quad (5.7)$$

$$(\beta = \pm 1),$$

где $N > 0$ – некоторое число, существует единственное классическое решение задачи (5.1), (5.2), при этом

$$\text{supp } f^\beta(\cdot, \cdot, t) \subset Q_{5\delta/4} \times B_\rho \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

Из раздела 4 следует, что задача (1.1)–(1.4) может быть записана в виде (5.1), (5.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Теоремы 1.1 и 5.1 обобщаются на случай, когда магнитное поле $B = B(x)$ – достаточно гладкая вектор-функция, которая имеет вид $B = (0, 0, h)$ на множестве $\bar{Q} \setminus Q_{2\delta}$. Разрешимость уравнения Власова–Пуассона в полупространстве $\mathbb{R}_+^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$ с внешним магнитным полем указанного вида на множестве $\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 2\delta\}$ рассматривалась в [110], [111].

В заключение отметим некоторые нерешенные вопросы.

1. Построение стационарных решений с компактными носителями плотностей распределения заряженных частиц f^β и ненулевым потенциалом φ в случаях полупространства и бесконечного цилиндра. Такое решение с точки зрения физики плазмы было бы более естественным, так как если плотности распределения заряженных частиц в бесконечном цилиндре не зависят от переменной x_3 , то мы получаем суммарный заряд, равный бесконечности.

2. Исследование существования и устойчивости глобальных классических решений смешанных задач для уравнений Власова–Пуассона с носителями плотностей распределения внутри области в случаях полупространства и бесконечного цилиндра для произвольных начальных данных.

3. Построение стационарных решений уравнений Власова–Пуассона в произвольных ограниченных областях, а также исследование глобальных классических решений с компактными носителями в области и их устойчивости. Одним из важных примеров таких областей с точки зрения приложений является тор (см. рис. 1). Поскольку для управления плазмой в термоядерном реакторе используется внешнее магнитное поле, некоторые области, например шар, не используются в моделировании камер реакторов. Прежде всего это связано с тем, что на сфере не существует нетривиального векторного поля. С другой стороны, в физике плазмы хорошо известен эффект “дрейфа” заряженных частиц в случае, когда магнитное поле на торе направлено по окружностям. Поэтому при исследовании классических решений уравнений Власова–Пуассона в ограниченных областях одновременно необходимо исследовать вид внешнего магнитного поля. В общем случае внешнее магнитное поле должно зависеть от потенциала электрического поля φ и плотностей распределения заряженных частиц f^β . Таким образом, мы приходим к вопросу об исследовании системы уравнений, описывающих управляемый термоядерный синтез.

4. В более точной постановке математической модели термоядерного синтеза следует учитывать магнитное поле, создаваемое движущимися частицами. Это приводит к уравнениям Власова–Максвелла. Возникает вопрос о существовании глобальных классических решений (с компактными носителями в области) смешанных задач для этих уравнений и их устойчивости в полупространстве, бесконечном цилиндре и ограниченной области.

5. В теории краевых задач для уравнений математической физики важное значение имеет вопрос об условиях, при которых обобщенное решение является классическим. В случае смешанных задач для уравнений Власова этот вопрос практически не изучен.

6. Интересным является вопрос об изучении разрешимости, асимптотики решений и формы носителей решений уравнений Власова в областях с особенностями. Такие особенности имеют вакуумные камеры реакторов типа “токамак” (ребро) и “пробочная ловушка” (нулевой угол), см. рис. 1, 2.

Я глубоко благодарен В. В. Козлову, который привлек мое внимание к изучению уравнений Власова и постоянно обсуждал со мной различные проблемы, возникающие в этой увлекательной области математической физики. Мне бы хотелось также поблагодарить за полезные обсуждения и ряд ценных советов В. В. Веденяпина, С. Б. Куксина, А. Пятницкого, Б. Фидлера и Л. Ниренберга. Я выражаю глубокую признательность начальнику лаборатории физики неравновесной плазмы Национального исследовательского центра “Курчатовский институт” В. И. Ильгисонису за обсуждение различных процессов физики плазмы и управляемого термоядерного синтеза, описываемых уравнениями Власова. Я также благодарю рецензента за критические замечания, способствовавшие улучшению работы.

Список литературы

- [1] R. Alexandre, “Weak solutions of the Vlasov–Poisson initial boundary value problem”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **16**:8 (1993), 587–607.
- [2] А. А. Арсеньев, “Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **15**:1 (1975), 136–147; англ. пер.: A. A. Arsen'ev, “Existence in the large of a weak solution of Vlasov's system of equations”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **15**:1 (1975), 131–143.
- [3] А. А. Арсеньев, “Существование и единственность классического решения системы уравнений Власова”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **15**:5 (1975), 1344–1349; англ. пер.: A. A. Arsen'ev, “Existence and uniqueness of the classical solution of Vlasov's system of equations”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **15**:5 (1975), 252–258.
- [4] А. А. Арсеньев, “Построение турбулентной меры для системы уравнений Власова”, *Матем. сб.*, **102(144)**:1 (1977), 13–32; англ. пер.: A. A. Arsen'ev, “Construction of a turbulent measure for Vlasov's system of equations”, *Math. USSR-Sb.*, **31**:1 (1977), 9–27.
- [5] А. А. Арсеньев, “О существовании обобщенных и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области”, *Дифференц. уравнения*, **15**:7 (1979), 1253–1266; англ. пер.: A. A. Arsen'ev, “The existence of generalized and stationary statistical solutions of a system of Vlasov equations in a bounded domain”, *Differ. Equ.*, **15**:7 (1980), 892–902.
- [6] А. А. Арсеньев, *Лекции о кинетических уравнениях*, Наука, М., 1992, 216 с.
- [7] C. Bardos, P. Degond, “Global existence for the Vlasov–Poisson equation in 3 space variables with small initial data”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **2**:2 (1985), 101–118.
- [8] J. Batt, “Ein Existenzbeweis für die Vlasov-Gleichung der Stelldynamik bei gemittelter Dichte”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **13** (1963), 296–308.
- [9] J. Batt, “Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics”, *J. Differential Equations*, **25**:3 (1977), 342–364.

- [10] J. Batt, “Recent developmets in the mathematical investigation of the initial value problem of stellar dynamics and plasma physics”, *Ann. Nuclear Energy*, **7**:4-5 (1980), 213–217.
- [11] J. Batt, H. Berestycki, P. Degond, B. Perthame, “Some families of solutions of the Vlasov–Poisson system”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **104**:1 (1988), 79–103.
- [12] J. Batt, K. Fabian, “Stationary solutions of the relativistic Vlasov–Maxwell system of plasma physics”, *Chinese Ann. Math. Ser. B*, **14**:3 (1993), 253–278.
- [13] J. Batt, W. Faltenbacher, E. Horst, “Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **93**:2 (1986), 159–183.
- [14] J. Batt, G. Rein, “Global classical solutions of the periodic Vlasov–Poisson system in three dimensions”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **313**:6 (1991), 411–416.
- [15] J. Batt, G. Rein, “A rigorous stability result for the Vlasov–Poisson system in three dimensions”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **164**:1 (1993), 133–154.
- [16] N. Ben Abdallah, “Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov–Poisson system”, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **17**:6 (1994), 451–476.
- [17] N. Ben Abdallah, F. Méhats, “On a Vlasov–Schrödinger–Poisson model”, *Comm. Partial Differential Equations*, **29**:1-2 (2004), 173–206.
- [18] S. Benachour, “Analyticité des solutions des équations de Vlasov–Poisson”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **16**:1 (1989), 83–104.
- [19] О. В. Бесов, “О некоторых свойствах пространства $H_p^{(r_1, \dots, r_m)}$ ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1960, № 1, 16–23.
- [20] M. Bostan, “Boundary value problem for the N -dimensional time periodic Vlasov–Poisson system”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **29**:15 (2006), 1801–1848.
- [21] F. Bouchut, “Global weak solutions of Vlasov–Poisson system for small electrons mass”, *Comm. Partial Differential Equations*, **16**:8-9 (1991), 1337–1365.
- [22] F. Bouchut, “Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **157**:1 (2001), 75–90.
- [23] W. Braun, K. Hepp, “The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles”, *Comm. Math. Phys.*, **56**:2 (1977), 101–113.
- [24] E. Caglioti, C. Maffei, “Time asymptotics for solutions of Vlasov–Poisson equation in a circle”, *J. Statist. Phys.*, **92**:1-2 (1998), 301–323.
- [25] D. Gogny, P. L. Lions, “Sur les états d’équilibre pour les densités électroniques dans les plasmas”, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **23**:1 (1989), 137–153.
- [26] J. Cooper, A. Klimas, “Boundary value problem for the Vlasov–Maxwell equation in one dimension”, *J. Math. Anal. Appl.*, **75**:2 (1980), 306–329.
- [27] P. Degond, “Global existence of smooth solutions for the Vlasov–Fokker–Planck equation in 1 and 2 space dimensions”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **19**:4 (1986), 519–542.
- [28] P. Degond, “Spectral theory of the linearized Vlasov–Poisson equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **294**:2 (1986), 435–453.
- [29] P. Degond, “Local existence of solutions of the Vlasov–Maxwell equations and convergence to the Vlasov–Poisson equations for infinite light velocity”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **8**:4 (1986), 533–558.
- [30] P. Degond, “Solutions stationnaires explicites du système de Vlasov–Maxwell relativiste”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **310**:7 (1990), 607–612.
- [31] P. Degond, P.-A. Raviart, “An asymptotic analysis of the one-dimensional Vlasov–Poisson system: the Child–Langmuir law”, *Asymptotic Anal.*, **4**:3 (1991), 187–214.

- [32] P. Degond, P.-A. Raviart, “On a penalization of the Child–Langmuir emission condition for the one-dimensional Vlasov–Poisson equation”, *Asymptotic Anal.*, **6**:1 (1992), 1–27.
- [33] R. DiPerna, P. L. Lions, “Solutions globales d’équations du type Vlasov–Poisson”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **307**:12 (1988), 655–658.
- [34] R. J. DiPerna, P. L. Lions, “Global weak solutions of Vlasov–Maxwell systems”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **42**:6 (1989), 729–757.
- [35] Р. Л. Добрушин, “Уравнения Власова”, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:2 (1979), 48–58; англ. пер.: R. L. Dobrushin, “Vlasov equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **13**:2 (1979), 115–123.
- [36] J. Duniec, “On an initial value problem for a nonlinear system of Vlasov–Maxwell equations”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Tech.*, **21** (1973), 157–162.
- [37] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989, 464 с.; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, xiii+513 pp.
- [38] R. T. Glassey, J. Schaeffer, “On symmetric solutions of the relativistic Vlasov–Poisson system”, *Comm. Math. Phys.*, **101**:4 (1985), 459–473.
- [39] R. T. Glassey, J. W. Schaeffer, “Global existence for the relativistic Vlasov–Maxwell system with nearly neutral initial data”, *Comm. Math. Phys.*, **119**:3 (1988), 353–384.
- [40] R. Glassey, J. Schaeffer, “Control of velocities generated in a two-dimensional collisionless plasma with symmetry”, *Transport Theory Statist. Phys.*, **17**:5-6 (1988), 467–560.
- [41] R. Glassey, J. Schaeffer, “Time decay for solutions to the linearized Vlasov equation”, *Transport Theory Statist. Phys.*, **23**:4 (1994), 411–453.
- [42] R. Glassey, J. Schaeffer, “On time decay rates in Landau damping”, *Comm. Partial Differential Equations*, **20**:3-4 (1995), 647–676.
- [43] R. Glassey, J. Schaeffer, “The ‘two and one-half dimensional’ relativistic Vlasov–Maxwell system”, *Comm. Math. Phys.*, **185**:2 (1997), 257–284.
- [44] R. T. Glassey, W. A. Strauss, “Singularity formation in a collisionless plasma could occur only at high velocities”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **92**:1 (1986), 59–90.
- [45] R. T. Glassey, W. A. Strauss, “Absence of shocks in an initially dilute collisionless plasma”, *Comm. Math. Phys.*, **113**:2 (1987), 191–208.
- [46] R. T. Glassey, W. A. Strauss, “High velocity particles in a collisionless plasma”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **9**:1 (1987), 46–52.
- [47] W. Greenberg, C. van der Mee, V. Protopopescu, *Boundary value problems in abstract kinetic theory*, Oper. Theory Adv. Appl., **23**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1987, x+524 pp.
- [48] C. Greengard, P.-A. Raviart, “A boundary value problem for the stationary Vlasov–Poisson equations: the plane diode”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **43**:4 (1990), 473–507.
- [49] Y. Guo, “Global weak solutions of the Vlasov–Maxwell system with boundary conditions”, *Comm. Math. Phys.*, **154**:2 (1993), 245–263.
- [50] Y. Guo, “Regularity for the Vlasov equations in a half space”, *Indiana Univ. Math. J.*, **43**:1 (1994), 255–320.
- [51] Y. Guo, “Singular solutions of the Vlasov–Maxwell system on a half line”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **131**:3 (1995), 241–304.
- [52] Y. Guo, C. Grotta Ragazzo, “On steady states in a collisionless plasma”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **49**:11 (1996), 1145–1174.

- [53] M. Hesse, K. Schindler, “Bifurcation of current sheets in plasmas”, *Phys. Fluids*, **29**:8 (1986), 2484–2492.
- [54] J. P. Holloway, J. J. Dornig, “Nonlinear but small amplitude longitudinal plasma waves”, *Modern mathematical methods in transport theory* (Blacksburg, VA, 1989), Oper. Theory Adv. Appl., **51**, Birkhäuser, Basel, 1991, 155–179.
- [55] E. Horst, “On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation. I. General theory”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **3**:1 (1981), 229–248.
- [56] E. Horst, “On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation. II. Special cases”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **4**:1 (1982), 19–32.
- [57] E. Horst, “On the asymptotic growth of the solutions of the Vlasov–Poisson system”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **16**:2 (1993), 75–85.
- [58] E. Horst, R. Hunze, “Weak solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **6**:1 (1984), 262–279.
- [59] H. J. Hwang, “Regularity for the Vlasov–Poisson system in a convex domain”, *SIAM J. Math. Anal.*, **36**:1 (2004), 121–171 (electronic).
- [60] H. J. Hwang, J. J. L. Velázquez, “On the existence of exponentially decreasing solutions of the nonlinear Landau damping problem”, *Indiana Univ. Math. J.*, **58**:6 (2009), 2623–2660.
- [61] H. J. Hwang, J. J. L. Velázquez, “On global existence for the Vlasov–Poisson system in a half space”, *J. Differential Equations*, **247**:6 (2009), 1915–1948.
- [62] R. Illner, H. Neunzert, “An existence theorem for the unmodified Vlasov equation”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **1**:4 (1979), 530–544.
- [63] С. В. Иорданский, “О задаче Коши для кинетического уравнения плазмы”, Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, **60**, Изд-во АН СССР, М., 1961, 181–194.
- [64] M. Isichenko, “Nonlinear Landau damping in collisionless plasma and inviscid fluid”, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:12 (1997), 2369–2372.
- [65] В. А. Кондратьев, “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками”, Тр. ММО, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 209–292.
- [66] В. В. Козлов, “Обобщенное кинетическое уравнение Власова”, *УМН*, **63**:4(382) (2008), 93–130; англ. пер.: V. V. Kozlov, “The generalized Vlasov kinetic equation”, *Russian Math. Surveys*, **63**:4 (2008), 691–726.
- [67] В. В. Козлов, *Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика*, НИИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2008, 204 с.
- [68] V. V. Kozlov, “The Vlasov kinetic equation, dynamics of continuum and turbulence”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **16**:6 (2011), 602–622.
- [69] R. Kurth, “Das Anfangswertproblem der Stelldynamik”, *Z. Astrophys.*, **30** (1952), 213–229.
- [70] Л. Д. Ландау, “О колебаниях в электронной плазме”, *ЖЭТФ*, **16** (1946), 574–586.
- [71] M. Lemou, F. Méhats, P. Raphael, “The orbital stability of the ground states and the singularity formation for the gravitational Vlasov Poisson system”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **189**:3 (2008), 425–468.
- [72] М. А. Леонтович, Б. Б. Кадомцев (ред.), *Вопросы теории плазмы*, вып. 11, Энергоиздат, М., 1982, 238 с.

- [73] Е. М. Лившиц, Л. П. Питаевский, *Курс теоретической физики*, т. 10: *Физическая кинетика*, ред. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Наука, М., 1979, 528 с.; англ. пер.: Е. М. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Course of theoretical physics*, v. 10, Pergamon Internat. Library Sci. Tech. Engrg. Social Stud., Pergamon Press, Oxford–Elmsford, NY, 1981, xi+452 pp.
- [74] P. L. Lions, B. Perthame, “Régularité des solutions du système de Vlasov–Poisson en dimension 3”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **311**:4 (1990), 205–210.
- [75] P. L. Lions, B. Perthame, “Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov–Poisson system”, *Invent. Math.*, **105**:1 (1991), 415–430.
- [76] G. Loeper, “Uniqueness of the solution to the Vlasov–Poisson system with bounded density”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **86**:1 (2006), 68–79.
- [77] S. Mancini, S. Totaro, “Vlasov equation with non-homogeneous boundary conditions”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **23**:7 (2000), 601–614.
- [78] C. Marchioro, M. Pulvirenti, “A note on the nonlinear stability of a spatially symmetric Vlasov–Poisson flow”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **8**:2 (1986), 284–288.
- [79] Ю. А. Марков, Г. А. Рудых, Н. А. Сидоров, А. В. Синицын, “Существование стационарных решений уравнений Власова–Максвелла и некоторые их точные решения”, *Матем. моделирование*, **1**:6 (1989), 95–107.
- [80] Ю. А. Марков, Г. А. Рудых, Н. А. Сидоров, А. В. Синицын, “Семейство решений системы Власова–Максвелла и их устойчивость”, *Матем. моделирование*, **2**:12 (1990), 88–101.
- [81] Yu. Markov, G. Rudykh, N. Sidorov, A. Sinitsyn, D. Tolstonogov, “Steady-state solutions of the Vlasov–Maxwell system and their stability”, *Acta Appl. Math.*, **28**:3 (1992), 253–293.
- [82] В. П. Маслов, “Уравнения самосогласованного поля”, *Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем.*, **11**, ВИНТИ, М., 1978, 153–234; англ. пер.: V. P. Maslov, “Equations of the self-consistent field”, *J. Soviet Math.*, **11**:1 (1979), 123–195.
- [83] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, “Линейная теория затухания Ландау”, *Матем. сб.*, **127(169)**:4(8) (1985), 445–475; англ. пер.: V. P. Maslov, M. V. Fedoryuk, “The linear theory of Landau damping”, *Math. USSR-Sb.*, **55**:2 (1986), 437–465.
- [84] S. Mischler, “On the trace problem for solutions of the Vlasov equation”, *Comm. Partial Differential Equations*, **25**:7-8 (2000), 1415–1443.
- [85] К. Миямото, *Основы физики плазмы и управляемого синтеза*, Физматлит, М., 2007, 424 с.; пер. с англ.: К. Miyamoto, *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion*, Iwanami Book Service Centre, Tokyo, 1997, 401 pp.
- [86] C. Mouhot, C. Villani, “On Landau damping”, *Acta Math.*, **207**:1 (2011), 29–201.
- [87] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991, 335 с.; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994, viii+525 pp.
- [88] H. Neunzert, “An introduction to the nonlinear Boltzman–Vlasov equation”, *Kinetic theories and the Boltzmann equation* (Montecatini, 1981), Lecture Notes in Math., **1048**, Springer, Berlin, 1984, 60–110.
- [89] H. Neunzert, K. H. Petry, “Ein Existenzsatz für die Vlasov-Gleichung mit selbstkonsistentem Magnetfeld”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **2**:4 (1980), 429–444.
- [90] K. Pfaffelmoser, “Global classical solutions of the Vlasov–Poisson system in three dimensions for general initial data”, *J. Differential Equations*, **95**:2 (1992), 281–303.

- [91] С. И. Похожаев, “О стационарных решениях уравнений Власова–Пуассона”, *Дифференц. уравнения*, **46:4** (2010), 527–534; англ. пер.: S. I. Pokhozhaev, “On stationary solutions of the Vlasov–Poisson equations”, *Differ. Equ.*, **46:4** (2010), 530–537.
- [92] M. Rammaha, “Global solutions of two-dimensional relativistic Vlasov–Poisson system”, *Transport Theory Statist. Phys.*, **16:1** (1987), 61–87.
- [93] G. Rein, “Generic global solutions of the relativistic Vlasov–Maxwell system of plasma physics”, *Comm. Math. Phys.*, **135:1** (1990), 41–78.
- [94] G. Rein, “A two-species plasma in the limit of large ion mass”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **13:2** (1990), 159–167.
- [95] G. Rein, “Existence of stationary, collisionless plasmas in bounded domains”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **15:5** (1992), 365–374.
- [96] G. Rein, “Non-linear stability for the Vlasov–Poisson system – the energy-Casimir method”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **17:14** (1994), 1129–1140.
- [97] G. Rein, “Growth estimates for the solutions of the Vlasov–Poisson system in the plasma physics case”, *Math. Nachr.*, **191:1** (1998), 269–278.
- [98] G. Rein, A. D. Rendall, “Global existence of classical solutions to the Vlasov–Poisson system in a three-dimensional, cosmological setting”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **126:2** (1994), 183–201.
- [99] G. Rein, A. D. Rendall, “Erratum: ‘Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system with small initial data’”, *Comm. Math. Phys.*, **176:2** (1996), 475–478.
- [100] Г. А. Рудых, Н. А. Сидоров, А. В. Сеницын, “Стационарные решения системы уравнений Власова–Максвелла”, *Докл. АН СССР*, **302:3** (1988), 594–597; англ. пер.: G. A. Rudykh, N. A. Sidorov, A. V. Sinitsyn, “Stationary solutions of a system of Vlasov–Maxwell equations”, *Soviet Phys. Dokl.*, **33:9** (1989), 673–674.
- [101] Г. А. Рудых, Н. А. Сидоров, А. В. Сеницын, “Разветвляющиеся стационарные решения двухчастичной системы Власова–Максвелла”, *Докл. АН СССР*, **304:5** (1989), 1109–1112; англ. пер.: G. A. Rudykh, N. A. Sidorov, A. V. Sinitsyn, “Bifurcating stationary solutions of a two-particle Vlasov–Maxwell system”, *Soviet Phys. Dokl.*, **34:2** (1989), 122–123.
- [102] А. А. Самарский, “О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **16:11** (1980), 1925–1935; англ. пер.: A. A. Samarskii, “Some problems of the theory of differential equations”, *Differ. Equ.*, **16:11** (1981), 1221–1228.
- [103] J. Schäffer, “The classical limit of the relativistic Vlasov–Maxwell system”, *Comm. Math. Phys.*, **104:3** (1986), 403–421.
- [104] J. Schäffer, “Global existence of smooth solutions to the Vlasov–Poisson system in three dimensions”, *Comm. Partial Differential Equations*, **16:8-9** (1991), 1313–1335.
- [105] Н. А. Сидоров, А. В. Сеницын, “О ветвлении решений системы Власова–Максвелла”, *Сиб. матем. журн.*, **37:6** (1996), 1367–1379; англ. пер.: N. A. Sidorov, A. V. Sinitsyn, “On bifurcation of solutions to the Vlasov–Maxwell system”, *Sib. Math. J.*, **37:6** (1996), 1199–1211.
- [106] Н. А. Сидоров, А. В. Сеницын, “Нетривиальные решения и точки бифуркации системы Власова–Максвелла”, *Докл. РАН*, **349:1** (1996), 26–28; англ. пер.: N. A. Sidorov, A. V. Sinitsyn, “Nontrivial solutions and bifurcation points of the Vlasov–Maxwell system”, *Dokl. Math.*, **54:1** (1996), 506–509.
- [107] Н. А. Сидоров, А. В. Сеницын, “Исследование точек бифуркации и нетривиальных ветвей решений стационарной системы Власова–Максвелла”, *Матем. заметки*, **62:2** (1997), 268–292; англ. пер.: N. A. Sidorov, A. V. Sinitsyn,

- “Analysis of bifurcation points and nontrivial branches of solutions to the stationary Vlasov–Maxwell system”, *Math. Notes*, **62**:2 (1997), 223–243.
- [108] Н. А. Сидоров, А. В. Синицын, “Стационарная система Власова–Максвелла в ограниченных областях”, *Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения*, ред. В. А. Треногин, А. Ф. Филиппов, Физматлит, М., 2003, 50–88.
- [109] А. А. Сковорода, *Магнитные ловушки для удержания плазмы*, Физматлит, М., 2009, 216 с.
- [110] А. Л. Скубачевский, “Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона в полупространстве”, *Докл. РАН*, **443**:4 (2012), 431–434; англ. пер.: A. L. Skubachevskii, “On the unique solvability of mixed problems for the system of Vlasov–Poisson equations in a half-space”, *Dokl. Math.*, **85**:2 (2012), 255–258.
- [111] А. Л. Скубачевский, “Смешанные задачи для уравнений Власова–Пуассона в полупространстве”, *Теория функций и уравнения математической физики*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Льва Дмитриевича Кудрявцева, Тр. МИАН, **283**, МАИК, М., 2013, 204–232; англ. пер.: A. L. Skubachevskii, “Initial-boundary value problems for the Vlasov–Poisson equations in a half-space”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **283** (2013), 197–225.
- [112] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980, 664 с.; пер. с англ.: H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Math. Library, **18**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978, 528 pp.
- [113] S. Ukai, T. Okabe, “On classical solutions in the large in time of two-dimensional Vlasov’s equation”, *Osaka J. Math.*, **15**:2 (1978), 245–261.
- [114] В. В. Веденяпин, “Краевая задача для стационарных уравнений Власова”, *Докл. АН СССР*, **290**:4 (1986), 777–780; англ. пер.: V. V. Vedenyapin, “Boundary value problems for a stationary Vlasov equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **34**:2 (1987), 335–338.
- [115] В. В. Веденяпин, “О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача”, *Докл. РАН*, **323**:6 (1992), 1004–1006; англ. пер.: V. V. Vedenyapin, “Classification of stationary solutions of the Vlasov equation on a torus and a boundary value problem”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **45**:2 (1993), 459–462.
- [116] В. В. Веденяпин, *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*, Физматлит, М., 2001, 112 с.
- [117] А. А. Власов, “О вибрационных свойствах электронного газа”, *ЖЭТФ*, **8**:3 (1938), 291–318.
- [118] А. А. Власов, *Теория многих частиц*, ГИТТЛ, М., 1950, 350 с.; англ. пер.: A. A. Vlasov, *Many-particle theory and its application to plasma*, Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York, 1961, 413 pp.
- [119] А. А. Власов, *Статистические функции распределения*, Наука, М., 1966, 356 с.
- [120] А. А. Власов, *Нелокальная статистическая механика*, Наука, М., 1978, 264 с.
- [121] Y.-H. Wan, “Nonlinear stability of stationary spherically symmetric models in stellar dynamics”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **112**:1 (1990), 83–85.
- [122] J. Weckler, “On the initial-boundary-value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **130**:2 (1995), 145–161.
- [123] S. Wollman, “Global-in-time solutions of the two-dimensional Vlasov–Poisson systems”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**:2 (1980), 173–197.

- [124] S. Wollman, “The spherically symmetric Vlasov–Poisson system”, *J. Differential Equations*, **35**:1 (1980), 30–35.
- [125] S. Wollman, “An existence and uniqueness theorem for the Vlasov–Maxwell system”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **37**:4 (1984), 457–462.
- [126] S. Wollman, “The use of the heat operator in an existence theory problem of the Vlasov equation”, *Transport Theory Statist. Phys.*, **14**:5 (1985), 567–593.
- [127] P. Zhidkov, “On local smooth solutions for the Vlasov equation with the potential of interactions $\pm r^{-2}$ ”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **2004**:61 (2004), 3275–3283.

Александр Леонидович Скубачевский
(Alexander L. Skubachevskii)

Поступила в редакцию
27.10.2013

Российский университет дружбы народов (РУДН)

E-mail: skub@lector.ru