Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Коганов, Универсальная биекция между перестановками Гесселя–Стенли и диаграммами связей соответствующих рангов, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm958>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:06:31

УНИВЕРСАЛЬНАЯ БИЕКЦИЯ МЕЖДУ ПЕРЕСТАНОВКАМИ ГЕССЕЛЯ–СТЕНЛИ И ДИАГРАММАМИ СВЯЗЕЙ СООТВЕТСТВУЮЩИХ РАНГОВ

Л. М. Коганов

Памяти Н. Я. Виленкина

Перестановки Гесселя–Стенли рассматривались в [1] при изучении полиномиальных последовательностей Стирлинга обоих родов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под перестановкой Гесселя–Стенли (ГС-перестановкой) ранга k будем понимать любое слово длины $2k$ в алфавите $[k] = \{1, \dots, k\}$, обладающее следующими двумя свойствами:

- а) каждая буква алфавита входит дважды;
- б) для любой буквы, между двумя ее последовательными вхождениями могут стоять лишь буквы (и даже пары букв), которые строго больше ее по величине в смысле обычного порядка на $[k]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. l -отрезком (l -интервалом) ГС-перестановки ранга k называется подслово между левым и правым вхождениями l , включая (исключая) сами вхождения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть для определенности $1 \leq l < m \leq k$. В ГС-перестановке ранга k либо l -отрезки и m -отрезки не пересекаются, либо l -отрезок целиком содержит m -отрезок.

СЛЕДСТВИЕ. Система l -отрезков, где $l = 1, 2, \dots, k$, ГС-перестановки ранга k образуют систему вложенных множеств в смысле Д. Кнута [2, раздел 2.3, с. 387–388].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. При расположении букв слова ГС-перестановки ранга k в точках с последовательными координатами $x = 1, 2, \dots, 2k$ на действительной декартовой прямой мы будем называть пробелами (пространствами в смысле [1]) подмножества $(-\infty, 1), (1, 2), \dots, (2k-1, 2k), (2k, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Существует алгоритм стандартной генерации ГС-перестановок последовательных рангов $k = 1, 2, \dots$. Он базируется на последовательном расположении внутри каждого из образованных на $(k-1)$ -м шаге $2k-1$ пространств “неразделимой” пары из двух одинаковых “старших” букв $-k, k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Диаграмма связей (д.с.) ранга k есть расположение в верхней полуплоскости декартовой плоскости k полуокружностей с диаметрами в виде отрезков оси абсцисс, концы которых соединяют попарно точки $x = 1, 2, \dots, 2k$ и не совпадают между собой.

Такие диаграммы связей (д.с.) взаимно однозначно соответствуют разбиениям базы $[2k]$ на двухэлементные блоки. Д.с. (с возможными ограничениями) изучались в ряде работ, например, в [3].

ТЕОРЕМА 2 (основная). Существует универсальная посистемная биекция между ГС-перестановками ранга k и диаграммами связей того же ранга.

СЛЕДСТВИЕ 1. Существует каноническая система кодирования ГС-перестановок ранга k словами вида $(\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_2)$, где (не путать со ссылками!) $\alpha_2 \in [3], \alpha_3 \in [5], \dots, \alpha_k \in [2k-1]$ (обозначения по Стенли). В частности, отсюда непосредственно вытекает, что число д.с. ранга k равно $(2k-1)!! = 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Существует естественный линейный лексикографический порядок на множестве всех д.с. фиксированного ранга. Существуют естественные линейный и частичный порядки на множестве всевозможных д.с.

Индекс П. В. Семенова ind для д.с. (точнее для соответствующего разбиения на двухэлементные блоки) определен в [4, с. 322]; там же указана алгоритмическая процедура его вычисления и дано инвариантное выражение [4, лемма 1, с. 323].

Следствие 3. Индекс Семенова выражается через код $(\alpha_k, \dots, \alpha_2)$ д.с.:

$$\begin{aligned} \text{ind}(\alpha_k, \dots, \alpha_2) &= [(\alpha_2 + \dots + \alpha_k) - (k-1)] \pmod{2} \\ &= [(\alpha_2 - 1) + \dots + (\alpha_k - 1)] \pmod{2}. \end{aligned}$$

Следствие 4. Агрегат Пфаффа, или пфаффиан, (определение через детерминант кососимметрической матрицы четного порядка см. в [5, отдел 1, задачи 541–549]) может трактоваться как алгебраическая сумма (перечень) весов разбиений множества $[2k]$ на двухэлементные блоки, снабженных знаками $(-1)^{\text{ind}}$, причем вес разбиения есть произведение весов составляющих блоков, а вес блока $\{i, j\}$, $i < j$, есть a_{ij} – буква, стандартно приписанная соответствию $i \rightarrow j$ аналогично тому, как это делается, к примеру, в [6, с. 21].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Плоским посаженным монотонным (или рекурсивным) деревом с $k+1$ вершинами $\{0, 1, \dots, k\}$ и фиксированным корнем 0 назовем плоское посаженное (с “мнимым” сажением для предотвращения циклических перестановок ветвей у корня) дерево, вершины которого монотонно возрастают вдоль каждой цепи, исходящей из корня 0.

ТЕОРЕМА 3. Существует взаимнооднозначное соответствие между ГС-перестановками ранга k и плоскими посаженными монотонными деревьями с множеством вершин $\{0\} \cup [k]$.

Доказательство одного из двух необходимых для биекции соответствий дается стандартным обходом де Брейна–Морселя [7, с. 29].

Следствие. Число указанных деревьев есть $(2k-1)!!$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат следствия может быть непосредственно установлен техникой производящих функций, аналогичной примененной в [8, § 4, с. 355–356] и восходящей по существу к работе [9]. При этом для экспоненциальной производящей функции $y = R_1 x + R_2 \frac{x^2}{2!} + \dots$, где R_{k+1} – число указанных деревьев, имеет место уравнение $y' = \frac{1}{1-y}$ или $[y - \frac{y^2}{2}]' = 1$, которое приводит к квадратному уравнению, имеющему в силу начальных условий $y(0) = 0$ однозначное решение $y = 1 - \sqrt{1-2x}$, при разворачивании которого с помощью биномиального ряда и после нахождения коэффициента при $x^{k+1}/(k+1)!$, вновь получаем $R_{k+1} = (2k-1)!!$, $k = 1, 2, \dots$.

Теоремы 2 и 3 позволяют установить естественный древесный порядок (посистемного древесного роста) на множестве диаграмм Фейнмана [10, формула (48.7а), с. 389] (ср. также [11, формула (3.14), гл. 15, § 3]), трактуемых в виде взвешенных (снабженных весами) д.с., а также использовать вместо диаграмм Фейнмана коды соответствующих им д.с.

Автор признателен своим коллегам: В. А. Лисковцу (Минск, Дрезден) за проверку результата основной теоремы и В. С. Шевелеву (Ростов-на-Дону) за стимулирующую переписку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gessel I., Stanley R. P. // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 1978. V. 24. № 1. P. 24–33.
 [2] Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. М.: Мир, 1976. [3] Nijenhuis A., Wilf H. S. // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 1979. V. 27. № 3. P. 356–365. [4] Семёнов П. В. // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 3. С. 321–327. [5] Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1970. [6] Коганов Л. М. // Кибернетика (Киев). 1985. № 5. С. 21–24. [7] de Bruijn N. G., Morselt B. J. M. // J. Combinatorial Theory. 1967. V. 2. № 1. P. 27–34. [8] Meir A., Moon J. W. // Recent Advances in Graph Theory / ed. M. Fielder: Academia Praha, 1975. P. 351–363. [9] Pólya G. // Classic Papers in Combinatorics / ed. I. Gessel, G.-C. Rota. Boston–Basel–Stuttgart: Birkhäuser, 1987. P. 249–257; // Amer. Math. Monthly. 1956. V. 63. P. 689–697. [10] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. М.: Наука, 1978. [11] Исихара А. Статистическая физика. М.: Мир, 1973.