Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, С. И. Тертычный, Динамические системы на торе с тождественным отображением Пуанкаре, ассоциированные с эффектом Джозефсона, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 2, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:56:38

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Динамические системы на торе с тождественным отображением Пуанкаре, ассоциированные с эффектом Джозефсона

В. М. Бухштабер, С. И. Тертычный

Дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi}(t) + \sin \varphi(t) = B + A \cos \omega t, \quad (1)$$

где $A > 0$, B и $\omega > 0$ – вещественные константы, используется при моделировании динамики перехода Джозефсона [1], [2]. Пусть $\mu > 0$ и l – неотрицательное целое. Введем оператор $\flat$ по формуле $\flat E(z) = 2\omega z^{-l-1} [E'(z^{-1}) - \mu E(z^{-1})]$. Для вещественной константы α положим

$$\Phi(z) = -z^l \frac{e^{i\alpha/2} E(z) + i e^{-i\alpha/2} \flat E(z)}{e^{-i\alpha/2} E(z^{-1}) - i e^{i\alpha/2} \flat E(z^{-1})}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $E(z)$ есть решение уравнения

$$z^2 E'' + ((l+1)z + \mu(1-z^2))E' + (-\mu(l+1)z + \lambda)E = 0, \quad \lambda = (2\omega)^{-2} - \mu^2, \quad (2)$$

такое, что $\overline{E(z)} = E(\bar{z})$. Тогда: 1) $\flat E(z)$ также является решением уравнения (2) и $\flat \overline{E(z)} = \flat E(\bar{z})$; 2) $\flat \flat E(z) = E(z)$; 3) вещественная функция $\varphi(t)$, определяемая формулой $e^{i\varphi(t)} = \Phi(e^{i\omega t})$, является решением уравнения (1) при $A = 2\mu\omega$, $B = l\omega$; 4) любое решение уравнения (1) при $A = 2\mu\omega$, $B = l\omega$ может быть получено в таком виде при некотором значении α .

Уравнение вида (2) является специальным случаем дважды конфлюэнтного уравнения Гойна [3]. Здесь нас будет интересовать случай, когда уравнение (2) допускает решение, голоморфное в окрестности его иррегулярной особой точки $z = 0$; если такое решение существует, то оно единственно с точностью до умножения на ненулевую константу и представляет собой целую функцию. Для краткости будем называть такие решения голоморфными. Строятся голоморфные решения следующим образом.

Определим (2×2) -матрицы $R_m = \prod_{j=m}^{\infty} M_j$, $M_j = \begin{pmatrix} 1 + \lambda/(j(j-l)) & \mu^2/(j(j-l)) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $m = l+1, l+2, \dots$, где в бесконечных произведениях, которые сходятся при любых λ и μ , множители с большими значениями индекса располагаются правее сомножителей с меньшими индексами. Положим $a_0 = (1, 0) \cdot R_{l+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_k = \frac{\mu^k}{k!} (0, 1) \cdot R_{k+l} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k = 1, 2, \dots$, и введем вещественную функцию $\xi_l(\lambda, \mu) = \lambda a_0 + \mu a_1$.

ТЕОРЕМА 2. Если параметры λ, μ удовлетворяют уравнению $\xi_l(\lambda, \mu) = 0$, то ряд $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \not\equiv 0$, сходящийся при любых z , задает решение уравнения (2).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00506).

DOI: 10.4213/rm9582

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть λ и $\mu > 0$ таковы, что $\xi_l(\lambda, \mu) = 0$ и $A = 2\mu\omega$, $B = l\omega$. Тогда для любого решения $\varphi(t)$ уравнения (1) функция $\varphi(t) - l\omega t$ является периодической с периодом $T = 2\pi\omega^{-1}$.

Для динамической системы, ассоциированной с уравнением (1) (см. [4]), отображение Пуанкаре $S^1 \rightarrow S^1$ (см. [5]) задается соответствием $\tau \rightarrow \varphi(2\pi\omega^{-1}) \pmod{2\pi}$, где $\varphi(t)$ – решение с $\varphi(0) = \tau$. Переформулируя следствие 3, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. В условиях теоремы 2 указанное отображение Пуанкаре является тождественным, а число вращения потока целое и равно l .

Отметим, что значения параметров A, B, ω , при которых отображение Пуанкаре тождественно, задают “перемычку” в диаграмме областей “захвата фазы” при фиксированном ω в плоскости с координатами A, B (см. [6]).

Назовем антиподом уравнения (2) уравнение того же вида, в котором $l \in \mathbb{N}$ заменено на $-l$.

ЛЕММА 5. Если $E(z)$ – решение уравнения (2), $\tilde{E}(z)$ – решение его антипода и $\tilde{E}^{(l)}(z)$ – производная порядка l функции $\tilde{E}(z)$, то функции $bE(z)$, $\tilde{E}^{(l)}(z)$, $2\omega z^{-l+1} \times e^{\mu(z+z^{-1})}(\tilde{E}'(-z) - \mu\tilde{E}(-z))$, $e^{\mu(z+z^{-1})}\tilde{E}(-z^{-1})$ также удовлетворяют уравнению (2).

ТЕОРЕМА 6. Если уравнение (2) обладает голоморфным решением, то его антипод также допускает голоморфное решение, единственное с точностью до постоянного множителя.

ТЕОРЕМА 7. Голоморфное решение $E(z)$ уравнения (2) удовлетворяет соотношению $E(z) = a \cdot 2\omega z^{-l-1} [E'(z^{-1}) - \mu E(z^{-1})] + b \cdot e^{\mu(z+z^{-1})} \tilde{E}(-z^{-1})$, где a, b – некоторые не равные нулю функции параметров l, λ, μ .

ГИПОТЕЗА 8. Пусть $I_m(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка m [7; § 9.6]. Тогда $\det |I_{j+k+2-l}(x)| \neq 0$ при $j, k = 0, 1, \dots, l-1$ и $x > 0$.

ТЕОРЕМА 9. Если гипотеза 8 верна, то: 1) при соответствующей нормировке голоморфного решения $E(z)$ уравнения (2) и голоморфного решения $\tilde{E}(z)$ его антипода выполнено равенство $E(z) = \tilde{E}^{(l)}(z)$; 2) условие $\xi_l(\lambda, \mu) = 0$ является не только достаточным, но и необходимым для существования голоморфного решения.

Гипотеза 8 верна при $l = 1$, доказана при $l = 2$ и численно проверена при нескольких $l > 2$. Однако, даже если гипотеза 8 не верна, теорема 9 может оказаться верной.

Список литературы

- [1] А. Бароне, Г. Патерно, *Эффект Джозефсона. Физика и применения*, Мир, М., 1984. [2] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, *ЖЭТФ*, **120**:6(12) (2001), 1478–1485. [3] С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции*, Невский Диалект, СПб., 2002. [4] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, *УМН*, **67**:1 (2012), 181–182. [5] В. И. Арнольд, *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, РХД, Ижевск, 1999. [6] A. A. Glutsyuk, D. A. Filimonov, V. A. Kleptsyn, I. V. Schurov, 2013, arXiv: 1301.7159. [7] М. А. Абрамовиц, И. А. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.

В. М. Бухштабер (Victor M. Buchstaber)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
16.02.2014

С. И. Тертычный (Sergei I. Tertychnyi)
Всероссийский научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений
E-mail: mera@vniiftri.org