Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Фояш, М. С. Джолли, Р. Кравченко, Э. С. Тити, Единый подход к построению определяющих форм для двумерной системы уравнений Навье–Стокса: случай общих интерполирующих операторов, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 2, 177–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:33:43

УДК 517.954+517.957

Памяти профессора Марко Иосифовича Вишика

Единый подход к построению определяющих форм для двумерной системы уравнений Навье–Стокса: случай общих интерполирующих операторов

К. Фояш, М. С. Джолли, Р. Кравченко, Э. С. Тити

Мы показываем, что динамический поток при больших временах (глобальный аттрактор) двумерной системы Навье–Стокса вкладывается в динамический поток при больших временах обыкновенного дифференциального уравнения (называемого *определяющей формой*) в пространстве траекторий, изоморфном $C_b^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ при достаточно большом N , где N зависит от физических параметров системы Навье–Стокса. Предлагаемый единый подход основан на использовании интерполирующих операторов, построенных по произвольным определяющим параметрам системы уравнений Навье–Стокса (значениям в узлах, фурье-модам, конечным элементам объема, конечным элементам и т. п.). При таком едином подходе возникают два непосредственных небезынтересных следствия. Первое заключается в том, что определяющая форма имеет функцию Ляпунова, вследствие чего с неограниченным возрастанием времени ее решения сходятся к множеству стационарных решений определяющей формы. Вторым следствием является то, что эти стационарные решения определяющей формы можно однозначно отождествить с траекториями на глобальном аттракторе системы Навье–Стокса. Следует добавить, что данный подход является достаточно общим и применим практически без изменений к целому классу диссипативных динамических систем.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: система уравнений Навье–Стокса, определяющие формы, определяющие моды, инерциальное многообразие, диссипативные динамические системы.

DOI: 10.4213/rm9583

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	178
2. Функциональная постановка и система уравнений Навье–Стокса	180
3. Определяющая форма и формулировка основных результатов	185
3.1. Интерполирующие операторы.....	185
3.2. Определяющая форма	185

Работа выполнена при поддержке: первый автор – NSF (грант DMS-1109784), второй автор – NSF (гранты DMS-1008661, DMS-1109638), четвертый автор – NSF (гранты DMS-1009950, DMS-1109640, DMS-1109645) и Minerva Stiftung/Foundation.

© К. Фояш, М. С. Джолли, Р. Кравченко, Э. С. Тити, 2014

4. Доказательство предложения 3.1.....	189
5. Доказательство теоремы 3.2.....	190
5.1. Оценка для $\ w\ $	191
5.2. Оценка для $\ w'\ $	192
5.3. Оценки для $ Aw $ и $ A^{3/2}w $	194
5.4. Оценка для $ Aw' $	195
5.5. Липшицевость w и w' в норме $D(A)$	196
5.6. Оценка для $\ \delta\ $	196
5.7. Оценка для $\ \delta'\ $	197
5.8. Оценка для $ A\delta $	198
Список литературы	199

1. Введение

Двумерная система уравнений Навье–Стокса (2.1) и (2.2), являясь фундаментальной во многих моделях жидкости, вызывает также несомненный интерес по ряду причин чисто теоретического характера. В двумерной системе уравнений Навье–Стокса, которая обладает прямым каскадом энтропии и обратным каскадом энергии, обнаруживаются более сложные явления турбулентности, чем в трехмерной системе Навье–Стокса [3], [19], [20]. Далее, в отличие от трехмерного уравнения, для двумерной системы Навье–Стокса теория существования глобальных решений является полной (см., например, [6], [22]). Фактически, динамический поток, соответствующий двумерной системе Навье–Стокса, при больших временах полностью содержится в *глобальном аттракторе* $\mathcal{A}$ (см. (2.5)), являющемся компактным подмножеством бесконечномерного фазового пространства H соленоидальных векторных полей с конечной энергией (см., например, [6], [10], [16], [22]). Точные оценки размерности глобального аттрактора в терминах соответствующих физических параметров были впервые получены в [7] (см. также [6], [21], [22] и приведенные там библиографические ссылки). Если бы существовало *инерциальное многообразие* $\mathcal{M}$ (т. е. липшицево конечномерное многообразие, инвариантное при движении вперед), притягивающее каждое ограниченное множество с экспоненциальной скоростью, то тогда имело бы место включение $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ и в этом случае динамику на $\mathcal{A}$ можно было бы описать обыкновенным дифференциальным уравнением (называемым *инерциальной формой*) в конечномерном фазовом пространстве [6], [12], [13], [22]. Этого можно достичь сведением исходного эволюционного уравнения к уравнению, заданному на инерциальном многообразии $\mathcal{M}$. При этом вопрос о существовании инерциального многообразия для двумерной системы Навье–Стокса открыт с 80-х годов XX века!

Это достаточно удивительно, поскольку имеются даже еще более убедительные признаки конечномерного поведения двумерной системы Навье–Стокса. Решения из $\mathcal{A}$ определяются асимптотическим поведением достаточного (конечного) числа определяющих параметров. Если в пределе при $t \rightarrow \infty$ некоторое достаточно большое число низших фурье-мод (или значений в узлах, или конечных элементов объема) для двух решений из $\mathcal{A}$ сходятся друг к другу,

то такие решения совпадают (см., например, [5] по поводу единой теории определяющих параметров и проекций). По крайней мере для случая фурье-мод это эквивалентно следующему:

если для двух полных траекторий на глобальном аттракторе их проекции P_m на подпространство m низших мод совпадают (1.1) при достаточно большом m , то и сами траектории совпадают.

Введенное в [11] понятие *определяющих мод* (см. также [18] по поводу точных оценок числа определяющих мод) было использовано в [8] для построения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве $X = C_b(\mathbb{R}, P_m H)$, описывающих эволюцию траекторий в X . Мы будем называть такую систему обыкновенных дифференциальных уравнений *определяющей формой*. Траектории на глобальном аттракторе $\mathcal{A}$ двумерной системы Навье–Стокса (2.2) отождествляются с решениями типа бегущей волны определяющей формы. По сути для определяющей формы разумно рассмотреть две временные переменные: время эволюции обыкновенного дифференциального уравнения и исходную временную переменную системы Навье–Стокса, с помощью которой мы теперь будем параметризовать полные траектории в X . Несмотря на то что определяющая форма обладает бесконечномерным фазовым пространством, векторное поле, определяющее эволюцию, является глобально липшицевым. Таким образом, определяющая форма является обыкновенным дифференциальным уравнением в истинном смысле. Ключевым моментом при построении определяющей формы в [8] являлось распространение определенного в (1.1) отображения $W: P_m \mathcal{S} \rightarrow (I - P_m) \mathcal{S}$ с множества $\mathcal{S}$ полных траекторий в $\mathcal{A}$ на все пространство X . При этом продолженное отображение оказывается липшицевым, через образы при отображении восстанавливаются высшие моды, а эволюционирующая траектория в X представляет собой низшие моды.

Вводимая ниже определяющая форма обладает существенно иными свойствами. Это – система, обладающая функцией Ляпунова, причем ее стационарные решения в точности являются траекториями, лежащими на глобальном аттракторе двумерной системы Навье–Стокса. Она обладает достаточной общностью, что позволяет использовать ее с целым рядом определяющих параметров, включающих в себя значения в узлах и фурье-моды. Подход и стратегия с использованием определяющей формы достаточно универсальны и могут быть применены к другим диссипативным системам. Как и в случае определяющей формы в [8], ключевым моментом является продолжение отображения W , которое изначально определено только на проекциях траекторий из $\mathcal{A}$. Это достигается введением в систему Навье–Стокса члена обратной связи, что предлагалось в работах [1], [2]. При этом возникает интерполирующий оператор J_h , аппроксимирующий тождественное отображение на уровне h (к примеру, J_h может строиться по значениям в узлах, где h – шаг сетки). Соответствующая конструкция раскрывается в разделе 3, где также формулируются основные результаты. В разделе 2 даются предварительные вспомогательные сведения и приводятся неравенства, относящиеся к системе уравнений Навье–Стокса. В разделах 4 и 5 дается доказательство основных результатов.

2. Функциональная постановка и система уравнений Навье–Стокса

Рассмотрим двумерную систему уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= \Phi, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ \int_{\Omega} u \, dx &= 0, \quad \int_{\Omega} \Phi \, dx = 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

с периодическими граничными условиями и фундаментальной областью $\Omega = [0, L]^2$. Поле скоростей u и давление p неизвестны, Φ – заданный возмущающий член, а $\nu > 0$ – заданная постоянная вязкость.

Положим

$$\mathcal{V} = \left\{ \phi : \phi - \mathbb{R}^2\text{-значный тригонометрический полином,} \right. \\ \left. \nabla \cdot \phi = 0, \int_{\Omega} \phi(x) \, dx = 0 \right\}.$$

Для любого подмножества $Z \subset L^1_{\text{per}}(\Omega)$ положим $\dot{Z} = \left\{ \phi \in Z : \int_{\Omega} \phi(x) \, dx = 0 \right\}$.

Далее, пусть H и V обозначают замыкание $\mathcal{V}$ в $(L^2_{\text{per}}(\Omega))^2$ и $(\dot{H}^1_{\text{per}}(\Omega))^2$ соответственно. Скалярное произведение и норма на гильбертовых пространствах $(L^2_{\text{per}}(\Omega))^2$ и H обозначаются соответственно $(\cdot, \cdot)$ и $|\cdot|$; соответствующие скалярное произведение и норма на гильбертовых пространствах $(\dot{H}^1_{\text{per}}(\Omega))^2$ и V обозначаются $((\cdot, \cdot))$ и $\|\cdot\|$. В частности, для $u, v \in (\dot{H}^1_{\text{per}}(\Omega))^2$

$$((u, v)) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} \, dx.$$

Через V' мы обозначим сопряженное пространство к V .

В приведенной выше функциональной постановке система Навье–Стокса может быть записана как эволюционное уравнение в гильбертовом пространстве H (см. [6], [22])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) + \nu A u(t) + B(u(t), u(t)) &= f, \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Оператор Стокса A , билинейный оператор B и сила f задаются следующим образом:

$$A = -\mathcal{P}\Delta, \quad B(u, v) = \mathcal{P}((u \cdot \nabla)v), \quad f = \mathcal{P}\Phi. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathcal{P}$ – ортогональный проектор Лере–Гельмгольца из $(\dot{L}^2_{\text{per}}(\Omega))^2$ на H , а u, v – достаточно гладкие, так что значение оператора $B(u, v)$ имеет смысл. В данной работе мы будем предполагать, что $f \in V$.

Отметим, что $D(A) = (\dot{H}^2_{\text{per}}(\Omega))^2 \cap V$. Оператор A является самосопряженным и имеет компактный обратный. Как следствие, в пространстве H имеется

ортонормальный базис $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ из собственных функций оператора A . Именно, $Aw_j = \lambda_j w_j$, где $0 < \lambda_1 = (2\pi/L)^2 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ (см. [6], [22]). Степени A^α оператора A имеют следующий вид:

$$A^\alpha v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha (v, w_j) w_j,$$

при этом все A^α коммутируют с $\mathcal{P}$. Также отметим, что $V := D(A^{1/2})$ и

$$\|u\| = |A^{1/2}u| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, w_j)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Хорошо известно, что система Навье–Стокса (2.2) имеет глобальный аттрактор

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \left\{ u_0 \in H : \text{существует решение } u(t, u_0) \text{ системы (2.2),} \right. \\ \left. \text{причем } \sup_t \|u(t)\| < \infty \forall t \in \mathbb{R} \right\}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

т. е. $\mathcal{A}$ является максимальным ограниченным инвариантным подмножеством из V в ходе динамической эволюции системы Навье–Стокса, или, эквивалентно, является минимальным компактным подмножеством из V , которое равномерно притягивает все ограниченные множества из V в ходе динамической эволюции системы (2.2). В частности, известно, что

$$\mathcal{A} \subset \{u \in V : \|u\| \leq G\nu\kappa_0\}, \quad \text{где } G = \frac{|f|}{\nu^2\kappa_0^2}. \quad (2.6)$$

Здесь G – число Грасгофа (безразмерный физический параметр) и $\kappa_0 = \lambda_1^{1/2} = 2\pi/L$. По поводу указанных выше свойств см., например, [6], [10], [16], [22].

Ниже мы вводим ряд соотношений, которые выполняются для билинейного члена. В их число входят соотношения ортогональности

$$\langle B(u, v), w \rangle = -\langle B(u, w), v \rangle, \quad u, v, w \in V \quad (2.7)$$

(где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – соотношение двойственности между V' и V), и

$$(B(u, u), Au) = 0, \quad u \in D(A) \quad (2.8)$$

(см., например, [6], [10], [22]). Из (2.7) вытекает (ср. [6], [22]), что

$$(B(v, v), Au) + (B(v, u), Av) + (B(u, v), Av) = 0, \quad u, v \in D(A). \quad (2.9)$$

Далее через $c, c_A, c_B, c_L, c_S, c_T, c_1, c_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots$ мы будем обозначать универсальные положительные безразмерные константы. Для того чтобы оценить нелинейный член, мы воспользуемся неравенством Агмона

$$\|u\|_\infty \leq c_A |u|^{1/2} |Au|^{1/2}, \quad u \in D(A), \quad (2.10)$$

а также неравенствами Соболева и Ладыженской

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq c_S \|u\|_{H^{1/2}(\Omega)} \quad \text{для любого } u \in (\dot{H}_{\text{per}}^{1/2}(\Omega))^2, \quad (2.11)$$

$$\|u\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leq \tilde{c}_L |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \quad \text{для любого } u \in (\dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega))^2, \quad (2.12)$$

из которых следует, что

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq c_L |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \quad \text{для любого } u \in (\dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega))^2. \quad (2.13)$$

Нам также потребуются следующие варианты неравенства Пуанкаре:

$$\kappa_0 |v| \leq \|v\|, \quad u \in V, \quad \text{и} \quad \kappa_0 \|v\| \leq |Av|, \quad u \in D(A), \quad (2.14)$$

и неравенство Юнга

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{при} \quad a, b, p, q > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2.15)$$

Применяя (2.13), мы имеем

$$|(B(u, v), w)| \leq c_S |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\|^{1/2} |Av|^{1/2} |w| \quad \forall u \in V, v \in D(A), w \in H, \quad (2.16)$$

и далее, по (2.10),

$$|(B(u, v), w)| \leq c_A |u|^{1/2} |Au|^{1/2} \|v\| |w| \quad \forall u \in D(A), v \in V, w \in H. \quad (2.17)$$

При этом (см. [23])

$$|(B(w, u), v)| \leq c_T \|w\| \|u\| \left(\log \frac{e|Au|}{\kappa_0 \|u\|} \right)^{1/2} |v| \quad \forall u \in D(A), v \in H, w \in V. \quad (2.18)$$

Используя неравенство Брезиса–Галлуэ [4], мы получаем

$$|(B(w, u), v)| \leq c_B \|w\| \|u\| \left(\log \frac{e|Aw|}{\kappa_0 \|w\|} \right)^{1/2} |v| \quad \forall u \in V, v \in H, w \in D(A) \quad (2.19)$$

(по поводу другого доказательства см. [23]).

Также мы будем использовать следующее модифицированное неравенство Гронуолла ([17]; см. также [10]).

ЛЕММА 2.1. Пусть α, β – локально интегрируемые действительные функции на $(0, \infty)$, для которых при некотором $T \in (0, \infty)$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha(\tau) d\tau = \gamma > 0, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha^-(\tau) d\tau < \infty$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \beta^+(\tau) d\tau = 0,$$

где $\alpha^- = \max\{-\alpha, 0\}$ и $\beta^+ = \max\{\beta, 0\}$. Пусть также ξ – абсолютно непрерывная неотрицательная функция на $(0, \infty)$, для которой

$$\frac{d}{dt} \xi + \alpha \xi \leq \beta \quad \text{н. в. на } (0, \infty).$$

Тогда $\xi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Ниже лемма 2.1 будет применяться в комбинации со следующими оценками усредненных решений (см. [17], [18]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть u – решение системы Навье–Стокса (2.2) и пусть $T = (\nu\kappa_0^2)^{-1}$. Тогда

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |Au(\tau)|^2 d\tau \leq 2\nu^2 \kappa_0^4 G^2. \quad (2.20)$$

Если $u \in \mathcal{A}$, то

$$\limsup_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t |Au(\tau)|^2 d\tau \leq \nu^2 \kappa_0^4 G^2 \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Более того, из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что

$$\limsup_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t |Au(\tau)| d\tau \leq \nu \kappa_0^2 G \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $u(t)$ – решение системы Навье–Стокса (2.2). Тогда

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| \leq \nu \kappa_0 G \quad \text{и} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |Au(t)| \leq c\nu \kappa_0^2 G^3.$$

В частности,

$$\|u(t)\| \leq \nu \kappa_0 G \quad \text{и} \quad |Au| \leq c_0 \nu \kappa_0^2 G^3 \quad \forall u \in \mathcal{A}. \quad (2.23)$$

Более того, решения из глобального аттрактора $\mathcal{A}$ являются аналитическими по переменной времени в полосе шириной $\delta_{\text{Time}} \geq c/(\nu \kappa_0^2 G^4)$, симметричной относительно действительной прямой. При этом по формуле Коши из данных оценок следует, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq c\nu^2 \kappa_0^3 G^5 \quad \text{и} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| A \frac{du}{dt}(t) \right| \leq c\nu^2 \kappa_0^4 G^7.$$

Идейно доказательство предложения 2.3 восходит к [6]. Однако новые точные оценки из предложения 2.3 получены в [9].

Нашей дальнейшей целью является получение следующих двух оценок для $A^{1/2}B(u, v)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $u \in D(A^{3/4})$, $v \in D(A)$. Тогда

$$|A^{1/2}B(u, v)| \leq c(|A^{3/4}u| |A^{3/4}v| + |u|^{1/2} |Au|^{1/2} |Av|). \quad (2.24)$$

Далее, пусть $u \in V$, $v \in D(A^{3/2})$. Тогда

$$|A^{1/2}B(u, v)| \leq c(|A^{1/2}u| |A^{1/2}v|^{1/2} |A^{3/2}v|^{1/2} + |A^{1/4}u| |A^{5/4}v|). \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала отметим, что

$$|A^{1/2} \mathcal{P} \phi| \leq |\nabla \phi| \quad \text{для любой } \phi \in (\dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega))^2. \quad (2.26)$$

Из неравенства Соболева (2.11) имеем

$$((\partial_i u \cdot \nabla)v, w) \leq \|\partial_i u\|_{L^4} \|\nabla v\|_{L^4} |w| \leq \|\partial_i u\|_{H^{1/2}} \|\nabla v\|_{H^{1/2}} |w|. \quad (2.27)$$

Далее, из (2.26), (2.27), (2.10) и (2.12) вытекает, что

$$\begin{aligned} |A^{1/2}B(u, v)| &\leq \sum_{i=1,2} |\partial_i(u \cdot \nabla)v| = \sum_{i=1,2} |(\partial_i u \cdot \nabla)v| + \sum_{i=1,2} |(u \cdot \nabla)\partial_i v| \\ &\leq c \sum_{i=1,2} (\|\partial_i u\|_{H^{1/2}} \|\nabla v\|_{H^{1/2}} + \|u\|_{L^\infty} \|\nabla \partial_i v\|) \\ &\leq c(|A^{3/4}u| |A^{3/4}v| + |u|^{1/2} |Au|^{1/2} |Av|) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |A^{1/2}B(u, v)| &\leq \sum_{i=1,2} |\partial_i(u \cdot \nabla)v| = \sum_{i=1,2} |(\partial_i u \cdot \nabla)v| + \sum_{i=1,2} |(u \cdot \nabla)\partial_i v| \\ &\leq c \sum_{i=1,2} (\|\partial_i u\| \|\nabla v\|_{L^\infty} + \|u\|_{H^{1/2}} \|\nabla \partial_i v\|_{H^{1/2}}) \\ &\leq c(|A^{1/2}u| |A^{1/2}v|^{1/2} |A^{3/2}v|^{1/2} + |A^{1/4}u| |A^{5/4}v|). \end{aligned}$$

Отталкиваясь от доказательства неравенства Брезиса–Галлуэ [4], мы ниже устанавливаем оценку для L^∞ -нормы, которая в свою очередь нам понадобится для оптимизации оценок.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\phi \in \dot{H}_{\text{per}}^2(\Omega)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{R}^+$

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq \mathcal{L}_N |\nabla \phi| + (\sqrt{\pi} \kappa_0 N)^{-1} |\Delta \phi|, \quad (2.28)$$

где $\mathcal{L}_N = (8 + 2\pi \log N)^{1/2} (2\pi)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала отметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq |k|^2 \leq N^2} \frac{1}{|k|^2} &= 6 + \sum_{3 \leq |k|^2 \leq N^2} \frac{1}{|k|^2} \\ &\leq 6 + 4 \int_2^N \frac{dx}{x^2} + \int_1^N \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r d\theta dr \leq 8 + 2\pi \log N \end{aligned}$$

и далее, при $N \geq 3$,

$$\sum_{N+1 \leq |k|} \frac{1}{|k|^4} \leq 4 \frac{1}{(N+1)^4} + 4 \int_{N+1}^\infty \frac{dx}{x^4} + \int_{N-1}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^4} r d\theta dr \leq \frac{4\pi}{N^2}.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и равенство Парсеваля, окончательно имеем

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^\infty} &\leq \sum_{1 \leq |k| \leq N} |\hat{\phi}_k| + \sum_{|k| \geq N+1} |\hat{\phi}_k| \\ &\leq \left[\sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{1}{|k|^2} \right]^{1/2} \left[\sum_{1 \leq |k| \leq N} |k|^2 |\hat{\phi}_k|^2 \right]^{1/2} \\ &\quad + \left[\sum_{|k| \geq N+1} \frac{1}{|k|^4} \right]^{1/2} \left[\sum_{|k| \geq N+1} |k|^4 |\hat{\phi}_k|^2 \right]^{1/2} \\ &\leq (8 + 2\pi \log N)^{1/2} \frac{|\nabla \phi|}{2\pi} + \frac{2\sqrt{\pi}}{N} \frac{|\Delta \phi|}{2\pi \kappa_0}. \end{aligned}$$

3. Определяющая форма и формулировка основных результатов

3.1. Интерполирующие операторы. В данном разделе мы предлагаем унифицированный подход к использованию определяющих параметров (моды, узлы, элементы объема и т. д.) при помощи их представления через интерполирующие операторы, которые аппроксимируют тождественное отображение.

Пусть $J = J_h : (\dot{H}_{\text{per}}^2(\Omega))^2 \rightarrow (\dot{C}_{\text{per}}^\infty(\Omega))^2$ – оператор конечного ранга, аппроксимирующий тождественное отображение в следующем смысле: для каждой $\phi \in (\dot{H}_{\text{per}}^2(\Omega))^2$ имеет место включение $J\phi \in (C_{\text{per}}^\infty(\Omega))^2$ и $J\phi$ имеет нулевое пространственное среднее. Дополнительно мы предположим, что

$$|J\phi - \phi| \leq c_1 h |\nabla \phi| + c_2 h^2 |\Delta \phi|, \quad (3.1)$$

$$|\nabla(J\phi - \phi)| \leq \tilde{c}_1 |\nabla \phi| + \tilde{c}_2 h |\Delta \phi|. \quad (3.2)$$

Здесь h – малый параметр, определяющий порядок аппроксимации. Ранг оператора J_h имеет порядок $L/h \geq 1$. К примеру, такие интерполяционные многочлены индуцируются определяющими параметрами системы Навье–Стокса, такими как определяющие моды, узлы, элементы объема, проекции конечных элементов и т. д. (см., например, [5], [11], [14], [15], [17], [18] и приведенные в этих работах ссылки). Наиболее простым примером таких интерполирующих операторов является оператор проекции $J_h = P_m$ на подпространство $\text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, где $h = \lambda_{m+1}^{-1}$. В приложении к работе [1] приводятся явные примеры интерполирующих операторов, основанных на значениях в узлах и удовлетворяющих условиям (3.1), (3.2). Также стоит отметить, что в [5] предлагается общий подход к исследованию динамики при больших временах системы Навье–Стокса с использованием интерполирующих многочленов, удовлетворяющих (3.1).

3.2. Определяющая форма. В данном пункте мы вводим определяющую форму, индуцированную интерполирующими операторами J_h . В следующем утверждении раскрывается связь между динамикой при больших временах системы Навье–Стокса (2.2) и определяющей формы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $G \geq 1$, и пусть $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, – решение системы Навье–Стокса (2.2), лежащее в глобальном аттракторе $\mathcal{A}$. Предположим, что $w \in C_b(\mathbb{R}; V) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}; D(A))$ такова, что $dw/ds \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}; H)$ и

$$\frac{dw}{ds} + \nu A w + B(w, w) = f - \mu \nu \kappa_0^2 \mathcal{P} J(w - u). \quad (3.3)$$

Тогда $w = u$, если

$$\mu > 6c_T G \log(c_3 G), \quad \text{где } c_3 = (2c_T c_0)^{1/3}, \quad (3.4)$$

а h достаточно мало и удовлетворяет неравенству

$$2\mu \kappa_0^2 c_J h^2 \leq 1, \quad \text{где } c_J = c_1 + \frac{c_2^2}{2}; \quad (3.5)$$

c_T, c_0, c_1, c_2 – константы из (2.18), (2.23), (3.1) соответственно.

Доказательство предложения 3.1 дается в разделе 4. Отметим, что существование решений уравнения (3.3) в предложении 3.1 обеспечивается теоремой 3.2.

Далее мы вводим фазовое пространство для динамики, описываемой определяющей формой. Рассмотрим пространство

$$X = C_b^1(\mathbb{R}, J(\dot{H}_{\text{per}}^2(\Omega))^2),$$

на котором определены две нормы

$$\begin{aligned} \|v\|_X &= \frac{\sup_{s \in \mathbb{R}} \|v(s)\|}{\nu \kappa_0} + \frac{\sup_{s \in \mathbb{R}} \|v'(s)\|}{\nu^2 \kappa_0^3}, \\ \|v\|_{X,0} &= \frac{\sup_{s \in \mathbb{R}} \|v(s)\|}{\nu \kappa_0}. \end{aligned}$$

Пусть v – заданный элемент пространства X . Рассмотрим уравнение

$$\frac{dw}{ds} + \nu Aw + B(w, w) = f - \mu \nu \kappa_0^2 \mathcal{P}(Jw - v). \quad (3.6)$$

В теореме 3.2 мы показываем, что при определенных условиях на параметры μ и h (которые зависят от нормы $\|v\|_X$) уравнение (3.6) имеет единственное ограниченное решение $w(s)$, глобальное по $s \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $f \in V$. Рассмотрим шар $\mathcal{B}_X^\rho(0) = \{v \in X : \|v\|_X \leq \rho\}$ при некотором $\rho > 0$. Пусть числа K и μ таковы, что

$$K \geq \left(2\rho^2 + \frac{G^2}{\mu} + 1\right)^{1/2} \quad (3.7)$$

и

$$c_4 K^2 \log(c_5 K^2) < \mu < 2c_4 K^2 \log(c_5 K^2), \quad (3.8)$$

где $c_4 = 80(c_T + c_B + 1)^2$, $c_5 = \sqrt{8}(c_T + c_B + 1)$. Выберем достаточно малое h , для которого

$$2\mu h^2 \kappa_0^2 (c_1^2 + c_2) < \frac{1}{2}. \quad (3.9)$$

Тогда для любого $v \in \mathcal{B}_X^\rho(0)$ уравнение (3.6) имеет единственное решение $w(s)$, существующее глобально по $s \in \mathbb{R}$ и обладающее следующими свойствами:

- (i) $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|w(s)\| \leq \nu^2 \kappa_0^2 K^2$, (ii) $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|w'(s)\| \leq \nu^2 \kappa_0^3 C(K)$,
- (iii) $\sup_{s \in \mathbb{R}} |Aw(s)| \leq \nu \kappa_0^2 C(K)$, (iv) $\sup_{s \in \mathbb{R}} |A^{3/2} w(s)| \leq \frac{\|f\|}{\nu} + \nu \kappa_0^3 C(K)$,
- (v) $\sup_{s \in \mathbb{R}} |Aw'(s)| \leq \kappa_0 C(K) (\|f\| + \nu^2 \kappa_0^3)$.

Далее, пусть $v_1, v_2 \in \mathcal{B}_X^\rho(0)$ и w_1, w_2 – соответствующие решения уравнения (3.6). Положим $\gamma = v_1 - v_2$ и $\delta = w_1 - w_2$. Тогда:

- (vi) $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|\delta(s)\| \leq 4\nu \kappa_0 \|\gamma\|_X$, (vii) $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|\delta'(s)\| \leq \nu^2 \kappa_0^3 C(K) \|\gamma\|_X$,
- (viii) $\sup_{s \in \mathbb{R}} |A\delta(s)| \leq \nu \kappa_0^2 C(K) \|\gamma\|_X$,

где $C(K) = c \exp(cK^2 \log K)$ с некоторой универсальной постоянной $c > 0$.

Доказательство теоремы 3.2 будет дано в разделе 5.

Следующий результат непосредственно вытекает из теоремы 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *В условиях теоремы 3.2 существует непрерывное по Липшицу отображение*

$$W: \mathcal{B}_X^\rho(0) \rightarrow C_b^1(\mathbb{R}; D(A))$$

со следующими свойствами:

- (i) $W(v)(s) = w(s)$ при каждом $v \in \mathcal{B}_X^\rho(0)$ и всех $s \in \mathbb{R}$, где $w(s)$ – единственное решение уравнения (3.6), соответствующее заданному $v(s)$;
- (ii) при любых $v_1, v_2 \in \mathcal{B}_X^\rho(0)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_0} \sup_{s \in \mathbb{R}} |A(W(v_1)(s) - W(v_2)(s))| + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|W(v_1)(s) - W(v_2)(s)\| \\ & + \frac{1}{\nu \kappa_0^2} \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d}{ds} (W(v_1)(s) - W(v_2)(s)) \right\| \leq \nu \kappa_0 C(K) \|v_1 - v_2\|_X. \end{aligned}$$

Отображение $W(v)$ из следствия 3.3 играет важную роль при определении определяющей формы. Более точно, пусть u^* – стационарное решение системы Навье–Стокса (2.2). Наша определяющая форма – это уравнение

$$\frac{dv}{dt} = F(v) = -\|v - JW(v)\|_{X,0}^2 (v - Ju^*). \quad (3.10)$$

Некоторые свойства уравнения (3.10) будут раскрыты ниже в теореме 3.5, но сначала нам потребуется следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Пусть $G \geq 1$. Тогда для любого $u \in \mathcal{A}$*

$$\|J(u)\| \leq c^* \nu \kappa_0 G^3 \quad \text{и} \quad \|J(u')\| \leq c^* \nu^2 \kappa_0^3 G^7.$$

Как следствие,

$$\|J(u)\|_X \leq c^* G^7 =: R.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\|J(\phi)\| = |\nabla J(\phi)|$, то мы можем применить (3.2) и воспользоваться тем фактом, что $h\kappa_0 \leq 2\pi$ в силу (3.9), что вместе с предложением 2.3 завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть $G \geq 1$. Предположим, что выполнены условия теоремы 3.2 с $\rho = 4R$, где $R := c^* G^7$ определено в предложении 3.4. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) Векторное поле в определяющей форме (3.10) является липшицевым отображением из шара $\mathcal{B}_X^\rho(0) = \{v \in X: \|v\|_X < \rho\}$ в пространство X . Как следствие, (3.10) является обыкновенным дифференциальным уравнением в пространстве X и для него имеет место существование и единственность решения на коротком интервале времени для начальных данных из $\mathcal{B}_X^\rho(0)$.

(ii) Шар $\mathcal{B}_X^{3R}(J(u^*)) = \{v \in X: \|v - J(u^*)\|_X < 3R\} \subset \mathcal{B}_X^\rho(0)$ инвариантен при возрастании времени в ходе динамической эволюции определяющей формы (3.10). Как следствие, для (3.10) имеет место существование и единственность решения на коротком интервале времени для всех начальных данных из $\mathcal{B}_X^{3R}(J(u^*))$.

(iii) Каждое решение (3.10) с начальными данными из $\mathcal{B}_X^{3R}(J(u^*))$ сходится при $t \rightarrow \infty$ к множеству стационарных решений уравнения (3.10).

(iv) Все содержащиеся в шаре $\mathcal{B}_X^\rho(0)$ стационарные решения определяющей формы (3.10) имеют вид $v(s) = Ju(s)$ при всех $s \in \mathbb{R}$, где $u(s)$ – траектория, лежащая на глобальном аттракторе $\mathcal{A}$ системы Навье–Стокса (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать существование решения на коротком интервале времени, достаточно показать, что векторное поле (3.10) липшицево. Положим $F(v) = -g^2(v)(v - u^*)$, где $g(v) = \|v - JW(v)\|_{X,0}$. Поскольку

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|_X \leq |g^2(v_1) - g^2(v_2)| \|v_1 - u^*\|_X + |g^2(v_2)| \|v_1 - v_2\|_X,$$

то нам достаточно показать, что отображение $g: \mathcal{B}_X^\rho(0) \rightarrow \mathbb{R}$ липшицево. Отметим, что

$$\begin{aligned} |\|v_1 - JW(v_1)\|_{X,0} - \|v_2 - JW(v_2)\|_{X,0}| &\leq \|v_1 - JW(v_1) - [v_2 - JW(v_2)]\|_{X,0} \\ &\leq \|v_1 - v_2\|_{X,0} + \|JW(v_1) - JW(v_2)\|_{X,0} \end{aligned}$$

при $v_1, v_2 \in \mathcal{B}_X^\rho(0)$. Далее, из (3.2) и неравенства треугольника вытекает, что

$$\begin{aligned} \|JW(v_1) - JW(v_2)\|_{X,0} &\leq (\tilde{c}_1 + 1) \sup_{s \in \mathbb{R}} \|W(v_1)(s) - W(v_2)(s)\| \\ &\quad + \tilde{c}_2 h \sup_{s \in \mathbb{R}} |A(W(v_1)(s) - W(v_2)(s))|. \end{aligned}$$

Теперь из следствия 3.3 и неравенства $h\kappa_0 \leq 2\pi$ имеем

$$|\|v_1 - JW(v_1)\|_{X,0} - \|v_2 - JW(v_2)\|_{X,0}| \leq C(K) \|v_1 - v_2\|_X,$$

где K удовлетворяет неравенству (3.7) с $\rho = 4R$. Итак, (i) доказано.

Из предложения 3.4 вытекает, что $\mathcal{B}_X^{3R}(J(u^*)) \subset \mathcal{B}_X^\rho(0)$. Таким образом, нами доказано существование решения (3.10) на коротком интервале времени для начальных данных из $\mathcal{B}_X^{3R}(J(u^*))$. Теперь (ii) вытекает из диссипативности (3.10). Именно, для каждого фиксированного $s \in \mathbb{R}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\|v(t; s) - J(u^*)\|^2}{dt} &= -2\|v - JW(v)\|_{X,0}^2 \|v(t; s) - J(u^*)\|^2, \\ \frac{d\|v'(t; s)\|^2}{dt} &= -2\|v - JW(v)\|_{X,0}^2 \|v'(t; s)\|^2, \end{aligned}$$

где штрих обозначает дифференцирование по s . Отсюда вытекает, что шар $\mathcal{B}_X^{3R}(J(u^*))$ инвариантен при движении вперед при всех $t \geq 0$, что одновременно доказывает (ii) и (iii) (см. приводимое ниже обоснование стационарных решений для определяющей формы (3.10)).

Для доказательства утверждения (iv) отметим, что стационарные решения уравнения (3.10) в шаре $\mathcal{B}_X^\rho(0)$ имеют вид $v = Ju^*$ или $v \in \mathcal{B}_X^\rho(0)$, причем $\|v - JW(v)\|_{X,0} = 0$. В первом случае $u^* \in \mathcal{A}$, поскольку u^* является стационарным решением системы Навье–Стокса (2.2). Во втором случае $v(s) = JW(v)(s)$, т. е. $v(s) = J(w(s))$ при всех $s \in \mathbb{R}$, где $w(s)$ – решение уравнения (3.6). В этом случае из (3.6) вытекает, что $w(s)$ – ограниченное решение системы Навье–Стокса (2.2). Теперь из (2.6) следует, что $w(\cdot)$ – траектория на глобальном аттракторе $\mathcal{A}$ системы Навье–Стокса. Обратно, так как $\rho = 4R$,

то из предложения 3.4 имеем, что $J(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}_X^{3R}(J(u^*)) \subset \mathcal{B}_X^\rho(0)$. Таким образом, для каждой траектории $u(\cdot) \subset \mathcal{A}$ из предложения 3.1 и уравнения (3.6) следует, что $u(s) = W(Ju)(s)$ при всех $s \in \mathbb{R}$. В частности, $Ju = JW(Ju)$ и, значит, Ju – стационарное решение (3.10) в шаре $\mathcal{B}_X^\rho(0)$.

4. Доказательство предложения 3.1

Из (2.2) и (3.3) следует, что разность $\delta = w - u$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\delta}{ds} + \nu A\delta + B(\delta, u) + B(u, \delta) + B(\delta, \delta) = -\mu\nu\kappa_0^2 \mathcal{P}J\delta.$$

Предположим, что $\delta(\bar{s}) \neq 0$ при некотором $\bar{s} \in \mathbb{R}$. Поскольку $\delta(s)$ – непрерывная функция со значениями в V , то найдется некоторый максимальный интервал (s_0, s_1) , содержащий $\bar{s}$, на котором $\delta(s) \neq 0$ при всех $s \in (s_0, s_1)$. Умножая скалярно на $A\delta$ и учитывая соотношения (2.8), (2.9), (2.18), получаем при всех $s \in (s_0, s_1)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\delta\|^2 + \nu |A\delta|^2 &= -(B(\delta, u), A\delta) - (B(u, \delta), A\delta) - \mu\nu\kappa_0^2 (\mathcal{P}J\delta, \delta) \\ &= (B(\delta, \delta), Au) - \mu\nu\kappa_0^2 (J\delta - \delta, A\delta) - \mu\nu\kappa_0^2 \|\delta\|^2 \\ &\leq c_T \|\delta\|^2 \left(1 + \log \frac{|A\delta|^2}{\kappa_0^2 \|\delta\|^2} \right) |Au| + \mu\nu\kappa_0^2 c_1 h^2 |A\delta|^2 \\ &\quad + \mu\nu\kappa_0^2 c_2 h \|\delta\| |A\delta| - \mu\nu\kappa_0^2 \|\delta\|^2 \\ &\leq c_T \|\delta\|^2 \left(1 + \log \frac{|A\delta|^2}{\kappa_0^2 \|\delta\|^2} \right) |Au| + \mu\nu\kappa_0^2 c_J h^2 |A\delta|^2 - \frac{1}{2} \mu\nu\kappa_0^2 \|\delta\|^2. \end{aligned}$$

Далее, применяя (3.5), имеем

$$\frac{d}{ds} \|\delta\|^2 + \nu\kappa_0^2 \left[\mu + \frac{|A\delta|^2}{\kappa_0^2 \|\delta\|^2} - \frac{2c_T |Au|}{\nu\kappa_0^2} \left(1 + \log \frac{|A\delta|^2}{\kappa_0^2 \|\delta\|^2} \right) \right] \|\delta\|^2 \leq 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{ds} \|\delta\|^2 + \nu\kappa_0^2 [\mu + \theta - \alpha(1 + \log \theta)] \|\delta\|^2 \leq 0, \quad (4.1)$$

где

$$\theta = \frac{|A\delta|^2}{\kappa_0^2 \|\delta\|^2} \geq 1, \quad \alpha = \frac{2c_T |Au|}{\nu\kappa_0^2}.$$

Найдем нижнюю грань $\psi(\theta) = \theta - \alpha(1 + \log \theta)$ по всем $\theta \geq 1$. Отметим, что

$$\psi(1) = 1 - \alpha, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \psi(\theta) = \infty;$$

при этом ψ убывает при $\theta < \alpha$ и возрастает при $\theta > \alpha$. Таким образом,

$$\min_{\theta \geq 1} \psi(\theta) = \begin{cases} \psi(1) = 1 - \alpha \geq 0, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq 1, \\ \psi(\alpha) = -\alpha \log \alpha \geq 0, & \text{если } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Далее, $1 - \alpha \geq -\alpha \log \alpha$ при $\alpha \in (0, 1]$. Действительно, легко убедиться, что для $\eta(\alpha) = 1 - \alpha + \alpha \log \alpha$ выполнены соотношения $\eta(0^+) = 1$, $\eta(1) = 0$ и $\eta'(\alpha) = \log \alpha \leq 0$. Как следствие,

$$\min_{\theta \geq 1} \psi(\theta) \geq -\alpha \log \alpha. \quad (4.2)$$

Применяя (4.2) и затем (2.22) к (4.1), мы получаем, что

$$\frac{d}{ds} \|\delta\|^2 + \nu \kappa_0^2 \left[\mu - \frac{2c_T |Au|}{\nu \kappa_0^2} \log(2c_T c_0 G^3) \right] \|\delta\|^2 \leq 0,$$

поскольку $u \in \mathcal{A}$. Следовательно,

$$\|\delta(s)\|^2 \leq \exp \left\{ \left[-\nu \kappa_0^2 \mu + \frac{6c_T \log(c_3 G)}{s - \sigma_0} \int_{\sigma_0}^s |Au| d\tau \right] (s - \sigma_0) \right\} \|\delta(\sigma_0)\|^2,$$

где $c_3 = (2c_T c_0)^{1/3}$ и $s_0 < \sigma_0 < s < s_1$. Если $s_0 > -\infty$, то $\delta(s_0) = 0$, и, полагая $\sigma_0 \rightarrow s_0^+$, мы заключаем, что $\delta(s) = 0$ при $s \in (s_0, s_1)$. В противном случае из (2.22) следует, что

$$\|\delta(s)\|^2 \leq \exp \{ \nu \kappa_0^2 [-\mu + 6c_T \log(c_3 G) G] (s - \sigma_0) \} \|\delta(\sigma_0)\|^2$$

при достаточно большом $|\sigma_0|$. При $\sigma_0 \rightarrow -\infty$ из (3.4) вытекает, что $\delta(s) = 0$. Так как $s \in (s_0, s_1)$ произвольно, то, в частности, $\delta(\bar{s}) = 0$. Полученное противоречие доказывает предложение 3.1.

5. Доказательство теоремы 3.2

В данном разделе мы даем формальное доказательство для каждой из оценок, сформулированных в теореме 3.2. При этом мы указываем путь к получению строгого обоснования существования решения w уравнения (3.6), для которого, вместе с w' , выполнены эти оценки. Рассмотрим следующие галёркинские приближения для (3.6):

$$\frac{dw_n}{ds} + \nu A w_n + P_n B(w_n, w_n) = P_n f - \mu \nu \kappa_0^2 P_n \mathcal{P}(J w_n - v), \quad (5.1)$$

где P_n — ортогональная проекция пространства H на подпространство $H_n := \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ (линейную оболочку первых n собственных функций оператора Стокса A). Имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Уравнение (5.1) имеет решение $w_n(s)$ при всех $s \in \mathbb{R}$. Это решение, вместе с $(dw_n/ds)(s)$, удовлетворяет всем оценкам из теоремы 3.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Дополнив систему (5.1) начальными данными $w_n(-k\nu\kappa_0^2) = 0$, мы получим конечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной полиномиальной нелинейностью. При таком выборе начальных данных система (5.1) имеет единственное решение $w_{n,k}$ на коротком интервале времени, симметричном относительно начального момента времени $s = -k\nu\kappa_0^2$. При этом на этом малом интервале $dw_{n,k}/ds$ является единственным решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{w}_n}{ds} + \nu A \tilde{w}_n + P_n B(\tilde{w}_n, w_n) + P_n B(w_n, \tilde{w}_n) &= -\mu \nu \kappa_0^2 P_n \mathcal{P}(J \tilde{w}_n - v'), \\ \tilde{w}_n(-k\nu\kappa_0^2) &= P_n f + \mu \nu \kappa_0^2 P_n \mathcal{P} v. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Рассматривая бесконечный полуинтервал $[-k\nu\kappa_0^2, \infty)$ и используя те же аргументы, которые будут использованы нами ниже при получении оценок для $\|w\|$,

мы показываем, что такие же оценки верны и для $\|w_{n,k}(s)\|$ при $s \geq -k\nu\kappa_0^2$. Таким образом, решения $w_{n,k}(s)$ остаются ограниченными при всех $s \geq -k\nu\kappa_0^2$ и, следовательно, являются решениями (5.1) при $s \in [-k\nu\kappa_0^2, \infty)$. Далее, поскольку величина $|A((dw_{n,k}/ds)(-k\nu\kappa_0^2))| = |A(P_n f + \mu\nu\kappa_0^2 P_n \mathcal{P}v)|$ конечна и не зависит от k , можно показать, используя те же рассуждения, которые будут использованы нами ниже при получении оценок для $\|w'\|$ и $|Aw'|$, что при всех $s \in [-k\nu\kappa_0^2, \infty)$ для $|A((dw_{n,k}/ds)(s))|$ имеет место равномерная оценка, не зависящая от k .

Теперь пусть $j \in \mathbb{N}$. Используя критерий компактности Арцела–Асколи, можно найти подпоследовательность $w_{n,k(j)}$ последовательности $w_{n,k}$, сходящуюся при $k(j) \rightarrow \infty$ к w_n^j , являющемуся решением системы (5.1) на интервале $[-j\nu\kappa_0^2, j\nu\kappa_0^2]$. При этом для $w_n^j(s)$ и $(dw_n^j/ds)(s)$ выполнены все оценки из теоремы 3.2 при всех $s \in [-j\nu\kappa_0^2, j\nu\kappa_0^2]$. Окончательно, используя стандартную канторовскую диагональную процедуру, мы показываем, что $w_{n,k(k)}$ сходится к w_n при $k \rightarrow \infty$ и что w_n удовлетворяет требуемым свойствам из предложения 5.1. Предложение 5.1 доказано.

Продолжим доказательство теоремы. Учитывая предложение 5.1, мы воспользуемся теоремой Обена о компактности (см., например, [6], [22]), из которой следует, что при любых $m \in \mathbb{N}$ существует подпоследовательность $w_{n(m)}$ последовательности w_n , сходящаяся к $w^{(m)}$ в соответствующих пространствах на интервале $[-\nu\kappa_0 m, \nu\kappa_0 m]$ при $n(m) \rightarrow \infty$. Переходя к пределу и используя те же аргументы, что при рассмотрении двумерной системы Навье–Стокса, мы показываем, что $w^{(m)}$ является решением уравнения (3.6) в интервале $[-\nu\kappa_0 m, \nu\kappa_0 m]$. Вдобавок, $w^{(m)}$ и $(dw^{(m)}/ds)(s)$ удовлетворяют оценкам из теоремы 3.2 на интервале $[-\nu\kappa_0 m, \nu\kappa_0 m]$. Используя еще раз диагональную процедуру, мы показываем, что диагональная подпоследовательность $w_{n(n)}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к решению w уравнения (3.6). При этом w и w' удовлетворяют всем оценкам теоремы 3.2 при всех $s \in \mathbb{R}$. Этим мы заканчиваем формальное обоснование оценок, которые будут получены нами ниже.

5.1. Оценка для $\|w\|$. Умножая скалярно (3.6) на Aw и учитывая (2.8), имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|w\|^2 + \nu |Aw|^2 = (f, Aw) + \mu\nu\kappa_0^2 (v, Aw) - \mu\nu\kappa_0^2 (Jw - w, Aw) - \mu\nu\kappa_0^2 \|w\|^2.$$

Далее, используя (3.1), мы получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|w\|^2 + \nu |Aw|^2 &\leq \frac{|f|^2}{2\nu} + \frac{\nu}{2} |Aw|^2 + \mu\nu\kappa_0^2 \|v\|^2 + \frac{\mu\nu\kappa_0^2}{4} \|w\|^2 - \mu\nu\kappa_0^2 \|w\|^2 \\ &\quad + \frac{\mu\nu\kappa_0^2}{4} \|w\|^2 + \mu\nu\kappa_0^2 c_1^2 h^2 |Aw|^2 + \mu\nu\kappa_0^2 c_2 h^2 |Aw|^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d}{ds} \|w\|^2 + \mu\nu\kappa_0^2 \|w\|^2 + \nu(1 - 2\mu h^2 \kappa_0^2 (c_1^2 + c_2)) |Aw|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu} + 2\mu\nu\kappa_0^2 \|v\|^2. \quad (5.3)$$

Следовательно, если мы предположим, что h достаточно мало, чтобы для него было выполнено неравенство

$$2\mu h^2 \kappa_0^2 (c_1^2 + c_2) < \frac{1}{2}, \quad (5.4)$$

то, используя неравенство Гронуолла и предположение, что норма $\|w(s)\|$ ограничена, мы приходим к следующей оценке:

$$\|w(s)\|^2 \leq 2\nu^2\kappa_0^2\|v\|_X^2 + \frac{|f|^2}{\mu\nu^2\kappa_0^2} \leq \nu^2\kappa_0^2\left(2\rho^2 + \frac{G^2}{\mu}\right) \leq \nu^2\kappa_0^2K^2. \quad (5.5)$$

Далее, рассмотрим эволюционное уравнение для $w' = dw/ds$:

$$\frac{dw'}{ds} + \nu Aw' + B(w', w) + B(w, w') = -\mu\nu\kappa_0^2\mathcal{P}(Jw' - v'). \quad (5.6)$$

5.2. Оценка для $\|w'\|$. Умножая скалярно (5.6) на Aw' , учитывая (2.9), (3.1) и рассуждая аналогично, имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\|w'\|^2 + \mu\nu\kappa_0^2\|w'\|^2 + 2\nu(1 - \mu h^2\kappa_0^2(c_1^2 + c_2))|Aw'|^2 \\ \leq 2|(B(w', w'), Aw)| + 2\mu\nu\kappa_0^2\|v'\|^2 \\ \leq 2\|w'\|_{L^\infty}\|w'\| |Aw| + 2\mu\nu\kappa_0^2\|v'\|^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Применим (2.28) к $\|w'\|_{L^\infty}$. Это дает

$$\begin{aligned} \|w'\|_{L^\infty}\|w'\| |Aw| &\leq \mathcal{L}_N\|w'\|^2 |Aw| + (\pi^{1/2}\kappa_0N)^{-1}\|w'\| |Aw'| |Aw| \\ &\leq \mathcal{L}_N\|w'\|^2 |Aw| + \frac{1}{\nu\kappa_0^2\pi N^2}\|w'\|^2 |Aw|^2 + \frac{\nu}{4}|Aw'|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (5.4),

$$\frac{d}{ds}\|w'\|^2 + \alpha\|w'\|^2 \leq 2\mu\nu\kappa_0^2\|v'\|^2 \leq \mu\nu^5\kappa_0^8K^2,$$

где

$$\alpha = \mu\nu\kappa_0^2 - 2\mathcal{L}_N|Aw| - \frac{2}{\nu\kappa_0^2\pi N^2}|Aw|^2.$$

Из (5.3) и (5.4) вытекает, что

$$\frac{\nu}{2}|Aw(s)|^2 \leq -\frac{d}{ds}\|w(s)\|^2 + \mu\nu^3\kappa_0^4K^2, \quad (5.8)$$

и, следовательно, учитывая (5.5) и интегрируя, имеем

$$\int_{s-1/(\nu\kappa_0^2)}^s |Aw(\sigma)|^2 d\sigma \leq 2(1 + \mu)\nu\kappa_0^2K^2.$$

Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что

$$\int_{s-1/(\nu\kappa_0^2)}^s |Aw| d\sigma \leq (2(1 + \mu))^{1/2}K,$$

и, значит,

$$\int_{s-1/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha \geq \mu - 2^{1/2} \frac{(8 + 2\pi \log N)^{1/2}}{\pi} (1 + \mu)^{1/2}K - \frac{4(1 + \mu)}{\pi N^2}K^2.$$

Мы хотим показать, что

$$\int_{s-1/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha(\sigma) d\sigma \geq 1 \quad \text{при всех } s \in \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

Если мы выберем $N^2 = K(1 + \mu)^{1/2}$, то тогда (5.9) будет следовать из неравенства

$$\pi(\mu - 1) \geq 2^{1/2} \left[8 + \pi \log K + \frac{\pi}{2} \log(1 + \mu) \right]^{1/2} (1 + \mu)^{1/2} K + 4(1 + \mu)^{1/2} K,$$

которое заведомо выполняется, если

$$\pi^2(\mu - 1)^2 \geq 4 \left[8 + \pi \log K + \frac{\pi}{2} \log(1 + \mu) \right] (1 + \mu) K^2 + 32(1 + \mu) K^2,$$

что эквивалентно тому, что

$$\frac{(\mu - 1)^2}{1 + \mu} \geq \frac{64}{\pi^2} K^2 + \frac{4}{\pi} K^2 \log K + \frac{2}{\pi} K^2 \log(1 + \mu).$$

С учетом неравенства

$$\frac{(\mu - 1)^2}{1 + \mu} \geq \frac{1 + \mu}{4} \quad \forall \mu \geq 3$$

нам достаточно, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$\frac{1 + \mu}{4} \left[1 - \frac{8}{\pi} K^2 \frac{\log(1 + \mu)}{1 + \mu} \right] \geq \frac{64}{\pi^2} K^2 + \frac{4}{\pi} (\log K) K^2.$$

Так как $a \geq 2b \log b$, $b \geq 9$, то $a/\log a \geq b$, и мы положим $b = 16K^2/\pi$, $a = 1 + \mu$. Таким образом, если

$$1 + \mu \geq \frac{32K^2}{\pi} \log \frac{16K^2}{\pi}, \quad (5.10)$$

то нам достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{1 + \mu}{8} \geq \frac{64}{\pi^2} K^2 + \frac{4}{\pi} K^2 \log K.$$

Итак, (5.9) имеет место, если мы возьмем

$$\mu \geq 80K^2 \log K. \quad (5.11)$$

Снова полагая $N^2 = K(1 + \mu)^{1/2}$ и рассуждая аналогично, имеем при $0 \leq r \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{s-r/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha(\tau) d\tau &\geq r\mu - \left[\frac{4}{\pi} - r^{1/2} \frac{2^{1/2}}{\pi} \right. \\ &\quad \left. \times \left(8 + \pi \log K + \frac{\pi}{2} \log(1 + \mu) \right)^{1/2} \right] (1 + r\mu)^{1/2} K. \end{aligned}$$

Таким образом, если

$$\mu \leq c' K^2 \log(c' K) \quad (5.12)$$

при некотором c' , то

$$\sup_{0 \leq r \leq 1} \exp \left(- \int_{s-r/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha \right) \leq \exp(cK^2 \log K) \quad (5.13)$$

с некоторой абсолютной постоянной c . В конечном итоге мы выбираем константу c' так, чтобы (5.12) было согласовано с (5.11) (см. (5.20)).

ЛЕММА 5.2. Пусть $\beta \geq 0$ – константа, и пусть $y(s) \geq 0$ – абсолютно непрерывная ограниченная функция, для которой выполнено неравенство $y' + \alpha y \leq \beta$ при всех $s \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\int_{s-1/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha(\sigma) d\sigma \geq 1$ при всех $s \in \mathbb{R}$. Тогда

$$y(s) \leq 2 \frac{\beta}{\nu\kappa_0^2} \sup_{0 \leq r \leq 1} \exp\left(-\int_{s-r/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha(\sigma) d\sigma\right) \quad \text{при всех } s \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\int_{s-1/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha(\sigma) d\sigma \geq 1$, то $\int_{-\infty}^0 \alpha = +\infty$. Умножая неравенство $y' + \alpha y \leq \beta$ на интегрирующий множитель $\exp\left(\int_0^s \alpha(\sigma) d\sigma\right)$ и интегрируя от $-\infty$ до s , получаем

$$\begin{aligned} y(s) &\leq \beta \int_{-\infty}^s \exp\left(-\int_{\sigma}^s \alpha\right) d\sigma \\ &= \beta \int_{-\infty}^s \exp\left(-\int_{\sigma + \lfloor (s-\sigma)\nu\kappa_0^2 \rfloor / (\nu\kappa_0^2)}^s \alpha\right) \prod_{k=1}^{\lfloor (s-\sigma)\nu\kappa_0^2 \rfloor} \exp\left(-\int_{\sigma + (k-1)/(\nu\kappa_0^2)}^{\sigma + k/(\nu\kappa_0^2)} \alpha\right) d\sigma \\ &\leq \beta \sup_{0 \leq r \leq 1} \exp\left(-\int_{s-r/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha\right) \int_{-\infty}^s \prod_{k=1}^{\lfloor (s-\sigma)\nu\kappa_0^2 \rfloor} e^{-1} d\sigma \\ &= \beta \sup_{0 \leq r \leq 1} \exp\left(-\int_{s-r/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha\right) \int_{-\infty}^s e^{-\lfloor (s-\sigma)\nu\kappa_0^2 \rfloor} d\sigma \\ &= \beta \sup_{0 \leq r \leq 1} \exp\left(-\int_{s-r/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha\right) \frac{1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots}{\nu\kappa_0^2} \\ &= \frac{2\beta}{\nu\kappa_0^2} \sup_{0 \leq r \leq 1} \exp\left(-\int_{s-r/(\nu\kappa_0^2)}^s \alpha\right). \end{aligned}$$

Теперь из леммы 5.2 и неравенств (5.9), (5.13) вытекает, что

$$\|w'(s)\| \leq c\nu^2\kappa_0^3 \exp(cK^2 \log K) \quad \text{при всех } s \in \mathbb{R} \text{ и некотором } c > 0. \quad (5.14)$$

5.3. Оценки для $|Aw|$ и $|A^{3/2}w|$. Из (5.8) мы получаем

$$\frac{\nu}{2}|Aw|^2 \leq 2\|w'\| \|w\| + \mu\nu^3\kappa_0^4 K^2 \leq \frac{1}{\nu\kappa_0^2} \|w'\|^2 + \nu\kappa_0^2 \|w\|^2 + \mu\nu^3\kappa_0^4 K^2,$$

откуда, с учетом (5.14) и (5.5),

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |Aw(s)| \leq c\nu\kappa_0^2 \exp(cK^2 \log K). \quad (5.15)$$

Далее, применяя (3.6), находим, что

$$A^{1/2}w' + \nu A^{3/2}w + A^{1/2}B(w, w) = A^{1/2}f - \mu\nu\kappa_0^2 A^{1/2} \mathcal{P}Jw + \mu\nu\kappa_0^2 A^{1/2} \mathcal{P}v,$$

откуда, с учетом (2.24),

$$\begin{aligned} \nu|A^{3/2}w| &\leq \|w'\| + \|f\| + \mu\nu\kappa_0^2 \|v\| + \mu\nu\kappa_0^2 \|\mathcal{P}Jw\| \\ &\quad + c'(|A^{3/4}w|^2 + |w|^{1/2}|Aw|^{3/2}). \end{aligned}$$

Так как $h\kappa_0 \leq c$, то из (3.2) имеем

$$\|\mathcal{P}Jw\| \leq c(\|w\| + h|Aw|) \leq c\nu\kappa_0 \exp(cK^2 \log K).$$

Применяя (5.12) и (5.15), мы получаем оценку

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |A^{3/2}w(s)| \leq \frac{1}{\nu} \|f\| + \nu\kappa_0^3 c \exp(cK^2 \log K).$$

5.4. Оценка для $|Aw'|$. Умножая уравнение

$$\frac{dw'}{ds} + \nu Aw' + B(w', w) + B(w, w') = -\mu\nu\kappa_0^2 \mathcal{P}(Jw' - v')$$

скалярно на A^2w' , мы приходим к оценке

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |Aw'|^2 + \nu |A^{3/2}w'|^2 &\leq |(B(w', w), A^2w')| + |(B(w, w'), A^2w')| - \mu\nu\kappa_0^2 |Aw'|^2 \\ &\quad + \mu\nu\kappa_0^2 \|Jw' - w'\| |A^{3/2}w'| + \mu\nu\kappa_0^2 \|v'\| |A^{3/2}w'|. \end{aligned}$$

Оценивая первый нелинейный член, имеем с учетом (2.15), (2.25),

$$\begin{aligned} |(B(w', w), A^2w')| &= |A^{1/2}B(w', w)| |A^{3/2}w'| \\ &\leq \frac{1}{\nu} |A^{1/2}B(w', w)|^2 + \frac{\nu}{4} |A^{3/2}w'|^2 \\ &\leq \frac{c}{\nu} \left(|A^{1/2}w'| |A^{1/2}w|^{1/2} |A^{3/2}w|^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + |A^{1/4}w'| |A^{5/4}w| \right)^2 + \frac{\nu}{4} |A^{3/2}w'|^2. \end{aligned}$$

Для оценки второго нелинейного члена мы проинтегрируем по частям и воспользуемся тем, что $A = -\Delta$ при периодических граничных условиях, откуда, учитывая (2.7), (2.8), (2.13), (2.11), (2.15), имеем

$$\begin{aligned} |(B(w, w'), A^2w')| &= \left| \int_{\Omega} ((w \cdot \nabla)w') \cdot \Delta^2 w' dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} ((\Delta w \cdot \nabla)w') \cdot \Delta w' dx \right| + 2 \left| \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} ((\partial_j w \cdot \nabla) \partial_j w') \cdot \Delta w' dx \right| \\ &\leq c \|\Delta w\|_{L^4} \|\nabla w'\| \|\Delta w'\|_{L^4} + c \sum_{j,k=1}^2 \|\nabla w\| \|\partial_j \partial_k w'\|_{L^4}^2 \\ &\leq c \|\nabla^2 w\|_{H^{1/2}} \|w'\| \|\Delta w'\|_{H^{1/2}} + c \sum_{j,k=1}^2 \|\nabla w\| \|\partial_j \partial_k w'\|_{H^{1/2}}^2 \\ &\leq c |Aw|^{1/2} |A^{3/2}w|^{1/2} \|w'\| |Aw'|^{1/2} |A^{3/2}w'|^{1/2} + c \|w\| |Aw'| |A^{3/2}w'| \\ &\leq \frac{c}{\nu} |Aw| |A^{3/2}w| \|w'\|^2 |Aw'| + \frac{c}{\nu} \|w\|^2 |Aw'|^2 + \frac{\nu}{4} |A^{3/2}w'|^2 \\ &\leq \frac{c}{\nu^2 \kappa_0^2} |Aw|^2 |A^{3/2}w|^2 \|w'\|^4 \\ &\quad + \nu \kappa_0^2 (1 + cK^2) |Aw'|^2 + \frac{\nu}{4} |A^{3/2}w'|^2. \end{aligned}$$

Окончательно, используя (2.25), (3.2), оценки для $\|w'\|$, $|A^{3/2}w|$ и неравенство Гронуолла, мы приходим к следующей равномерной оценке:

$$|Aw'(s)| \leq \kappa_0 c \exp(cK^2 \log K)(\|f\| + \nu^2 \kappa_0^3) \quad \text{при всех } s \in \mathbb{R} \quad (5.16)$$

при условии, что $\mu \geq 2(1 + K^2)$ (что, в свою очередь, обеспечивается (5.11)).

5.5. Липшицевость w и w' в норме $D(A)$. В данном пункте мы докажем единственность ограниченных решений уравнения (3.6) и их непрерывную зависимость от исходной траектории $v \in X$ в указанном ниже смысле. В частности, эти свойства нам потребуются для введения корректно определенного отображения $v \mapsto W(v)$ из пространства X в пространство траекторий, которое определяется формулой $W(v)(s) = w(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Чтобы установить эти свойства, рассмотрим разность $\delta(s) = w_1(s) - w_2(s)$, где $w_1(s)$, $w_2(s)$ – две траектории, и запишем оценки для δ и δ' , аналогичные тем, которые мы получили для w и w' . Единственная сложность возникает только при рассмотрении нелинейного члена. Пусть $\gamma = v_1 - v_2$, $\tilde{w} = w_1 + w_2$. Тогда

$$\frac{d}{ds}\delta + \nu A\delta + \frac{1}{2}B(\tilde{w}, \delta) + \frac{1}{2}B(\delta, \tilde{w}) = -\mu\nu\kappa_0^2 \mathcal{P}(J\delta - \gamma). \quad (5.17)$$

5.6. Оценка для $\|\delta\|$. Умножая скалярно (5.17) на $A\delta$, мы получаем, как в п. 5.1,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\delta\|^2 + \nu |A\delta|^2 + \mu\nu\kappa_0^2 \|\delta\|^2 &= \mu\nu\kappa_0^2 (\gamma, A\delta) - \mu\nu\kappa_0^2 (J\delta - \delta, A\delta) \\ &\quad - \frac{1}{2} (B(\tilde{w}, \delta), A\delta) - \frac{1}{2} (B(\delta, \tilde{w}), A\delta) \\ &\leq \mu\nu\kappa_0^2 \|\gamma\|^2 + \frac{\mu\nu\kappa_0^2}{4} \|\delta\|^2 + (c_T + c_B) \|\delta\| \|\tilde{w}\| \left(\log \frac{e|A\delta|}{\kappa_0 \|\delta\|} \right)^{1/2} |A\delta| \\ &\quad + \frac{\mu\nu\kappa_0^2}{4} \|\delta\|^2 + \mu\nu\kappa_0^2 c_1^2 h^2 |A\delta|^2 + \mu\nu\kappa_0^2 c_2 h^2 |A\delta|^2, \end{aligned}$$

где для оценки нелинейных членов мы воспользовались (2.18) и (2.19). Применяя неравенство Юнга к вкладу от нелинейных членов, имеем, с учетом (5.5),

$$\frac{d}{ds} \|\delta\|^2 + \nu\kappa_0^2 \left[\mu + \frac{|A\delta|^2}{\kappa_0^2 \|\delta\|^2} - 8(c_T + c_B)^2 K^2 \left(1 + \log \frac{|A\delta|^2}{\kappa_0^2 \|\delta\|^2} \right) \right] \|\delta\|^2 \leq 2\mu\nu\kappa_0^2 \|\gamma\|^2,$$

если выполнено неравенство (3.5).

На данном шаге мы можем воспользоваться неравенством (4.2) с $\theta = |A\delta|^2 \times (\kappa_0^2 \|\delta\|^2)^{-1}$ и $\alpha = 8(c_T + c_B)^2 K^2$, что дает

$$\frac{d}{ds} \|\delta\|^2 + \nu\kappa_0^2 [\mu - 8(c_T + c_B)^2 K^2 \log(8(c_T + c_B)^2 K^2)] \|\delta\|^2 \leq 2\mu\nu\kappa_0^2 \|\gamma\|^2.$$

Таким образом, если

$$\mu > 32(c_T + c_B)^2 K^2 \log(\sqrt{8}(c_T + c_B)K), \quad (5.18)$$

то

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \|\delta(s)\| \leq 4\nu\kappa_0 \|\gamma\|_X. \quad (5.19)$$

Для обеспечения совместности (5.11) и (5.18) мы возьмем, как в (3.8),

$$c_4 K^2 \log(c_5 K^2) < \mu < 2c_4 K^2 \log(c_5 K^2), \quad (5.20)$$

где $c_4 = 80(c_T + c_B + 1)^2$ и $c_5 = \sqrt{8}(c_T + c_B + 1)$.

5.7. Оценка для $\|\delta'\|$. Запишем уравнение для δ' :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \delta' + \nu A \delta' + \frac{1}{2} B(\tilde{w}', \delta) + \frac{1}{2} B(\tilde{w}, \delta') + \frac{1}{2} B(\delta', \tilde{w}) + \frac{1}{2} B(\delta, \tilde{w}') \\ = -\mu\nu\kappa_0^2 (J\delta' - \gamma'). \end{aligned}$$

Умножая скалярно на $A\delta'$, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\delta'\|^2 + \nu |A\delta'|^2 - \frac{1}{2} (B(\delta', \delta'), A\tilde{w}) + \frac{1}{2} (B(\tilde{w}', \delta), A\delta') + \frac{1}{2} (B(\delta, \tilde{w}'), A\delta') \\ = -\mu\nu\kappa_0^2 \|\delta'\|^2 + \mu\nu\kappa_0^2 (\gamma', A\delta') - \mu\nu\kappa_0^2 (J\delta' - \delta', A\delta'). \end{aligned}$$

В отличие от (5.7) (где мы заменили w' на δ' и w на $\tilde{w}$) здесь добавляются два члена: $(B(\tilde{w}', \delta), A\delta')$ и $(B(\delta, \tilde{w}'), A\delta')$. Если мы покажем, что они ограничены величиной $\|\gamma\|_X$, умноженной на постоянную, то это нам даст липшицевость w' при помощи тех же аргументов, что и в п. 5.2.

Для начала отметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \|\delta'\|^2 + \mu\nu\kappa_0^2 \|\delta'\|^2 + 2\nu[1 - \mu h^2 \kappa_0^2 (c_1^2 + c_2)] |A\delta'|^2 \\ \leq |(B(\delta', \delta'), A\tilde{w})| + |(B(\tilde{w}', \delta), A\delta')| + |(B(\delta, \tilde{w}'), A\delta')| + 2\mu\nu\kappa_0^2 \|\gamma'\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |(B(\delta', \delta'), A\tilde{w})| &\leq \|\delta'\|_{L^\infty} \|\delta'\| |A\tilde{w}| \\ &\leq \mathcal{L}_N \|\delta'\| |A\tilde{w}| + (\pi^{1/2} \kappa_0 N)^{-1} \|\delta'\| |A\delta'| |A\tilde{w}| \\ &\leq \mathcal{L}_N \|\delta'\| |A\tilde{w}| + \frac{\|\delta'\|^2 |A\tilde{w}|^2}{2\pi\nu\kappa_0^2 N^2} + \frac{\nu}{2} |A\delta'|^2 \end{aligned}$$

и (по (2.16))

$$\begin{aligned} |(B(\delta, \tilde{w}'), A\delta')| &\leq c_L |\delta|^{1/2} \|\delta\|^{1/2} \|\tilde{w}'\|^{1/2} |A\tilde{w}'|^{1/2} |A\delta'| \\ &\leq \frac{\nu}{4} |A\delta'|^2 + c_L^2 \nu^{-1} \kappa_0^{-2} \|\delta\|^2 |A\tilde{w}'|^2. \end{aligned}$$

При этом, применяя (2.17), мы получаем

$$\begin{aligned} |(B(\tilde{w}', \delta), A\delta')| &\leq c_A |\tilde{w}'|^{1/2} |A\tilde{w}'|^{1/2} \|\delta\| |A\delta'| \\ &\leq \frac{\nu}{4} |A\delta'|^2 + c_A^2 \nu^{-1} \kappa_0^{-2} \|\delta\|^2 |A\tilde{w}'|^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \|\delta'\|^2 + \mu \nu \kappa_0^2 \|\delta'\|^2 + \nu [1 - 2\mu h^2 \kappa_0^2 (c_1^2 + c_2)] |A\delta'|^2 \\ \leq \mathcal{L}_N \|\delta'\| |A\tilde{w}| + \frac{\|\delta'\|^2 |A\tilde{w}|^2}{2\pi \nu \kappa_0^2 N^2} + 2\mu \nu \kappa_0^2 \|\gamma'\|^2 + (c_A^2 + c_L^2) \nu^{-1} \kappa_0^{-2} \|\delta\|^2 |A\tilde{w}'|^2 \\ \leq \mathcal{L}_N \|\delta'\| |A\tilde{w}| + \frac{\|\delta'\|^2 |A\tilde{w}|^2}{2\pi \nu \kappa_0^2 N^2} + 2\mu \nu^5 \kappa_0^8 \|\gamma\|_X^2 + (c_A^2 + c_L^2) \nu^{-1} \kappa_0^{-2} \|\delta\|^2 |A\tilde{w}'|^2. \end{aligned}$$

С учетом (3.5) мы можем избавиться от члена, содержащего $|A\delta'|^2$. Применяя (5.16) к неравенству $|A\tilde{w}'| \leq |Aw'_1| + |Aw'_2|$ и учитывая (5.19), имеем

$$\frac{d}{ds} \|\delta'\|^2 + \alpha \|\delta'\|^2 \leq \beta,$$

где

$$\alpha = \mu \nu \kappa_0^2 - \mathcal{L}_N \|\delta'\| |A\tilde{w}| + \frac{|A\tilde{w}|^2}{2\pi \nu \kappa_0^2 N^2}$$

и

$$\beta = 2\mu \nu^5 \kappa_0^8 \|\gamma\|_X^2 + 32c \nu \kappa_0^2 (c_A^2 + c_L^2) \exp(cK^2 \log K) (\|f\| + \nu^2 \kappa_0^3)^2 \|\gamma\|_X^2.$$

Действуя, как в п. 5.2, имеем

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \|\delta'(s)\| \leq (\|f\| + \nu^2 \kappa_0^3) C \|\gamma\|_X,$$

где $C = s \exp(cK^2 \log K)$ с некоторой универсальной постоянной s . Отметим еще раз, что (5.9) обеспечивается (5.12), так что нет необходимости менять границы изменения μ в неравенстве (5.12).

5.8. Оценка для $|A\delta|$. Из (5.17), с учетом (2.16), (2.17), (3.1), имеем

$$\begin{aligned} \nu |A\delta| &\leq |\delta'| + \frac{c_A + c_L}{2\kappa_0} |A\tilde{w}| \|\delta\| + \mu \nu \kappa_0^2 |\gamma| \\ &\quad + \mu \nu \kappa_0^2 |\delta| + \mu h \nu c_1 \kappa_0^2 \|\delta\| + \mu h^2 c_2 \nu \kappa_0^2 |A\delta|, \end{aligned}$$

откуда

$$\nu (1 - \mu h^2 c_2 \kappa_0^2) |A\delta| \leq \kappa_0^{-1} \|\delta'\| + \mu \nu \kappa_0 \|\gamma\| \left[\mu \nu \kappa_0 (1 + h c_1 \kappa_0) + \frac{c_A + c_L}{2\kappa_0} |A\tilde{w}| \right] \|\delta\|.$$

Таким образом, если выполнено (3.5), то из (5.15), (5.19) следует, что

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |A\delta(s)| \leq \frac{C}{\nu \kappa_0} (\|f\| + \nu^2 \kappa_0^3) \|\gamma\|_X,$$

где $C = s \exp(cK^2 \log K)$ с некоторой универсальной постоянной $s > 0$.

Список литературы

- [1] A. Azouani, E. Olson, E. S. Titi, *Continuous data assimilation using general interpolant observables*, 2013, 25 pp., [arXiv: 1304.0997](#); *J. Nonlinear Sci.* (to appear).
- [2] A. Azouani, E. S. Titi, *Feedback control of nonlinear dissipative systems by finite determining parameters – a reaction-diffusion paradigm*, 2013, 21 pp., [arXiv: 1301.6992](#).
- [3] Дж. К. Бэтчелор, *Теория однородной турбулентности*, ИЛ, М., 1955, 200 с.; пер. с англ.: G. K. Batchelor, *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge Monogr. Mech. Appl. Math., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1953, x+197 pp.
- [4] H. Brézis, T. Gallouet, “Nonlinear Schrödinger evolution equations”, *Nonlinear Anal.*, **4**:4 (1980), 677–681.
- [5] B. Cockburn, D. Jones, E. S. Titi, “Estimating the number of asymptotic degrees of freedom for nonlinear dissipative systems”, *Math. Comp.*, **66**:219 (1997), 1073–1087.
- [6] P. Constantin, C. Foias, *Navier–Stokes equations*, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1988, x+190 pp.
- [7] P. Constantin, C. Foias, R. Temam, “On the dimension of the attractors in two-dimensional turbulence”, *Phys. D*, **30**:3 (1988), 284–296.
- [8] C. Foias, M. S. Jolly, R. Kravchenko, E. S. Titi, “A determining form for the 2D Navier–Stokes equations: The Fourier modes case”, *J. Math. Phys.*, **53**:11 (2012), 115623, 30 pp.
- [9] C. Foias, M. Jolly, R. Lan, R. Rupam, Y. Yang, *Time analyticity with higher norm estimates for the 2D Navier–Stokes equations*, 2013, [arXiv: 1312.0929](#); *IMA J. Appl. Math.* (to appear).
- [10] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam, “Navier–Stokes equations and turbulence”, *Encyclopedia Math. Appl.*, **83**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, xiv+347 pp.
- [11] C. Foias, G. Prodi, “Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des équations de Navier–Stokes en dimension 2”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **39** (1967), 1–34.
- [12] C. Foias, G. R. Sell, R. Temam, “Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations”, *J. Differential Equations*, **73**:2 (1988), 309–353.
- [13] C. Foias, G. R. Sell, E. S. Titi, “Exponential tracking and approximation of inertial manifolds for dissipative nonlinear equations”, *J. Dynam. Differential Equations*, **1**:2 (1989), 199–244.
- [14] C. Foias, R. Temam, “Asymptotic numerical analysis for the Navier–Stokes equations”, *Nonlinear dynamics and turbulence*, Interaction Mech. Math. Ser., Pitman, Boston, MA, 1983, 139–155.
- [15] C. Foias, R. Temam, “Determination of the solutions of the Navier–Stokes equations by a set of nodal values”, *Math. Comp.*, **43**:167 (1984), 117–133.
- [16] J. K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Math. Surveys Monogr., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, x+198 pp.
- [17] D. A. Jones, E. S. Titi, “Determining finite volume elements for the 2D Navier–Stokes equations”, *Phys. D*, **60**:1-4 (1992), 165–174.
- [18] D. A. Jones, E. S. Titi, “Upper bounds on the number of determining modes, nodes and volume elements for the Navier–Stokes equations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **42**:3 (1993), 875–887.
- [19] R. H. Kraichnan, “Inertial ranges in two-dimensional turbulence”, *Phys. Fluids*, **10**:7 (1967), 1417–1423.
- [20] C. E. Leith, “Diffusion approximation for two-dimensional turbulence”, *Phys. Fluids*, **11**:3 (1968), 671–673.

- [21] V. X. Liu, “A sharp lower bound for the Hausdorff dimension of the global attractors of the 2D Navier–Stokes equations”, *Comm. Math. Phys.*, **158**:2 (1993), 327–339.
- [22] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, 2nd ed., Appl. Math. Sci., **68**, Springer-Verlag, New York, 1997, xxii+648 pp.
- [23] E. S. Titi, “On a criterion for locating stable stationary solutions to the Navier–Stokes equations”, *Nonlinear Anal.*, **11**:9 (1987), 1085–1102.

Киприан Фояш
(Ciprian Foias)

Texas A&M University, College Station, USA

E-mail: foias@math.tamu.edu

Поступила в редакцию

27.10.2013

Майкл С. Джолли
(Michael S. Jolly)

Indiana University, Bloomington, USA

E-mail: msjolly@indiana.edu

Ростислав Кравченко
(Rostyslav Kravchenko)

Chicago University, Chicago, USA

E-mail: rkchenko@gmail.com

Эдрисс С. Тити
(Edriss S. Titi)

Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel;

University of California, Irvine, USA

E-mail: etiti@math.uci.edu