Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Дружинин, О гомотопически инвариантных предпучках с Witt-трансферами, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 3, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:15:06

О гомотопически инвариантных предпучках с Witt-трансферами

А. Э. Дружинин

В. А. Воеводский в [1] построил триангулированную категорию мотивов $DM^-(k)$, И. А. Панин поставил задачу построения триангулированной категории Witt-мотивов. Первым шагом в построении этой категории является доказательство теоремы 3 ниже.

Пусть k – поле характеристики, не равной 2. Пусть Sm_k – категория аффинных гладких многообразий над полем k . Определим аддитивную категорию Wor_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Объекты категории Wor_k совпадают с объектами Sm_k ; морфизмы $Wor_k(X, Y)$ – группа Витта категории $k[X \times Y]$ -модулей, конечно порожденных и проективных над $k[X]$, с двойственностью $P \mapsto \widehat{P_{k[X]}} = \widehat{Hom_{k[X]}(P, k[X])}$ (в соответствии с определением 27 из [2]); композиция морфизмов $\Phi \in Wor_k(X, Y)$ и $\Psi \in Wor_k(Y, Z)$ определяется как тензорное произведение над $k[Y]$ соответствующих квадратичных пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. (i) Определен функтор $Sm_k \rightarrow Wor_k$. Этот функтор на объектах действует тождественно, а регулярное отображение $f: X \rightarrow Y$ переводит в морфизм, определяемый бимодулем ${}_{k[X]}k[X]_{k[Y]}$ и каноническим изоморфизмом $k[X]_{k[Y]} \simeq Hom_{k[X]}(k[X]_{k[Y]}, k[X])$.

(ii) Категорию Wor_k можно расширить на пары (X_1, X_2) , где X_2 – открытое подмножество X_1 , определив морфизмы между парами $i_X: X_2 \hookrightarrow X_1$, $i_Y: Y_2 \hookrightarrow Y_1$:

$$\begin{aligned} & Wor_k((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) \\ &= \text{coker}(Wor_k(X_1, Y_2) \xrightarrow{(i_Y \circ -, - \circ i_X)} Wor_k^{\rightarrow}(X_2 \rightarrow X_1, Y_2 \rightarrow Y_1)), \end{aligned}$$

где $Wor_k^{\rightarrow}$ – категория стрелок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Объекты категории $\overline{Wor}_k$ совпадают с объектами Wor_k ; морфизмы определяются так: $\overline{Wor}_k(X, Y) = \text{coker}(Wor_k(\mathbb{A}^1 \times X, Y) \xrightarrow{(- \circ i_0) - (- \circ i_1)} Wor_k(X, Y))$, где $i_0, i_1: X \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times X$ – нулевое и единичное сечения $\mathbb{A}^1 \times X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Предпучок абелевых групп с Witt-трансферами – это произвольный предпучок $F: Wor_k \rightarrow Ab$ абелевых групп на категории Wor_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предпучок с Witt-трансферами называется *гомотопически инвариантным*, если он гомотопически инвариантен после ограничения на Sm_k . Такой предпучок пропускается через $Wor_k \rightarrow \overline{Wor}_k$. Обратное, всякий предпучок на $Wor_k \rightarrow \overline{Wor}_k$ гомотопически инвариантен.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{F}$ – гомотопически инвариантный предпучок с Witt-трансферами, тогда для двух вложенных окрестностей по Зарисскому $U \subset V$ точки z в $\mathbb{A}_K^1$ (где $K = k(X)$ – поле частных многообразия X) ограничение

$$i^*: \frac{\mathcal{F}(V - z)}{\mathcal{F}(V)} \rightarrow \frac{\mathcal{F}(U - z)}{\mathcal{F}(U)}$$

является изоморфизмом (i обозначает вложение U в V).

Доказательство теоремы 1 выводится из следующей леммы.

ЛЕММА 1. Морфизм включения $[i]: (U, U - z) \rightarrow (V, V - z)$ в $\overline{Wor}_k$ является изоморфизмом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{F}$ – гомотопически инвариантный предпучок с Witt-трансферами и $\pi: X' \rightarrow X$ – этальный морфизм гладких кривых над полем K , являющимся полем частных некоторого гладкого аффинного многообразия. Пусть $z \in X$ – замкнутая точка такая, что $\pi^{-1}(z)$ состоит из одной точки, скажем, z' , и индуцированный на полях вычетов этих двух точек гомоморфизм является изоморфизмом. Тогда π индуцирует изоморфизм

$$\pi^*: \frac{\mathcal{F}(U - z)}{\mathcal{F}(U)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{F}(U' - z')}{\mathcal{F}(U')}, \quad \text{где } U = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,z}), \quad U' = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X',z'}).$$

Доказательство теоремы 2 выводится из следующей леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $\pi: X \rightarrow X'$ определен в теореме 2, и пусть канонические классы X и X' тривиальны, пусть $U = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})$, $U' = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X',z'})$, а i и i' – вложения U и U' в X и X' соответственно. Тогда:

- (a) существует $\Phi \in \operatorname{Wor}_K((U, U - z), (X', X' - z'))$ такой, что $[\pi \circ \Phi] = [i]$ в $\overline{\operatorname{Wor}}_K((U, U - z), (X, X - z))$;
 (b) существует $\Psi \in \operatorname{Wor}_K((U, U - z), (X', X' - z'))$ такой, что $[\Psi \circ \pi] = [i']$ в $\overline{\operatorname{Wor}}_K((U', U' - z'), (X', X' - z'))$.

ТЕОРЕМА 3. Для гомотопически инвариантного предпучка $\mathcal{F}$ с Witt-трансферами ассоциированный пучок в топологии Нисневича $\mathcal{F}_{\text{Nis}}$ гомотопически инвариантен.

Доказательство теоремы 3 выводится из двух лемм (доказанных в [3] и [4]).

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{F}$ – гомотопически инвариантный пучок с Witt-трансферами. Тогда пучки $\mathcal{F}_{\text{Zar}}$ и $\mathcal{F}_{\text{Nis}}$ совпадают при ограничении на $\mathbb{A}_K^1$ для произвольного поля K , являющегося полем частных некоторого гладкого многообразия.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{F}$ – гомотопически инвариантный пучок с Witt-трансферами. Тогда каноническое отображение $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{\text{Zar}}(U)$ сюръективно для любого открытого по Зарисскому подмножества $U \subset \mathbb{A}_K^1$, где K – произвольное поле, являющееся полем частных некоторого гладкого многообразия.

Автор благодарен И. А. Панину за постановку задачи.

Список литературы

- [1] V. Voevodsky, “Triangulated category of motives over a field”, *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., **143**, eds. V. Voevodsky, A. Suslin, E. Friedlander, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, 188–238. [2] P. Balmer, “Witt groups”, *Handbook of K-theory*, v. 2, eds. E. M. Friedlander, D. R. Grayson, Springer, Berlin, 2005, 539–576. [3] А. Э. Дружинин, Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с Witt-трансферами при пучковании в топологии Зарисского, Препринт 07/2014, ПОМИ, СПб., 2014, 10 с., <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2014/14-07.html>. [4] А. Дружинин, Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с Witt-трансферами при пучковании в топологии Нисневича, Препринт 8/2014, ПОМИ, СПб., 2014, 14 с., <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2014/14-08.html>.

Андрей Эдуардович Дружинин
 (Andrei E. Druzhinin)
 Санкт-Петербургский государственный университет
 E-mail: andrei.druzh@gmail.com

Представлено Д. О. Орловым
 Принято редколлегией
 22.05.2014