Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Устиновский, О моделях колец когомологий пространств с действием тора, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 4, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:38:40

О моделях колец когомологий пространств с действием тора

Ю. М. Устиновский

Моделью градуированной алгебры A^* называется такая градуированная дифференциальная алгебра (B^*, d_B) , что $H[B^*, d_B] = A^*$. В этой заметке мы строим модели для колец рациональных когомологий топологических пространств с действием тора и когомологий Дольбо комплексных многообразий с действием комплексного тора. Подобные модели оказываются полезным инструментом при доказательстве частных случаев классической гипотезы Гальперина о торическом ранге [1] и при изучении некелеровой комплексной геометрии (см. [2]). Мы исправим ошибки, допущенные в построениях подобной модели в [2; предложение 5.1] и в [3; лемма 1.2], доказав существование соответствующих моделей при условии формальности гомотопического пространства орбит действия тора. Мы приведем пример неформального пространства, кольцо когомологий которого не описывается этой моделью. При доказательстве теоремы 1 и построении примера (теорема 2) используется техника рациональной теории гомотопий (см. [4], [5]).

Пусть X – гомотопическое пространство с действием тора $T^m = (S^1)^m$, $X_{T^m} := X \times_{T^m} ET^m$ – конструкция Бореля, или гомотопическое пространство орбит, $f: X_{T^m} \rightarrow BT^m$ – классифицирующее отображение главного T^m -расслоения $X \times ET^m \rightarrow X_{T^m}$. Отметим, что если действие $T^m: X$ свободно, то $X_{T^m} \simeq_{\text{he}} X/T^m$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что пространство X_{T^m} формально. Тогда спектральная последовательность Лере–Серра $(E_*^{*,*}, d_*)$ расслоения $T^m \rightarrow X \times ET^m \rightarrow X_{T^m}$ вырождается в члене E_3 и имеет место изоморфизм*

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq H[E_2, d_2] = H[H^*(X_{T^m}, \mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m, \mathbb{Q}), d_u], \quad (1)$$

где дифференциал задан на мультипликативных образующих: $d_u|_{H^*(X_{T^m}, \mathbb{Q})} = 0$, $d_u|_{H^1(T^m, \mathbb{Q})}$ совпадает с $\varphi: H^1(T^m, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^2(BT^m, \mathbb{Q}) \xrightarrow{f^*} H^2(X_{T^m}, \mathbb{Q})$.

ТЕОРЕМА 2. *Существует такое неформальное гладкое замкнутое многообразие X со свободным гладким действием тора, что спектральная последовательность Лере–Серра не вырождается в члене E_3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $(\mathcal{M}^*(Y), \partial)$ – минимальная модель алгебры рациональных кусочно линейных дифференциальных форм на топологическом пространстве Y . Согласно общему результату [4; пример 2.72] имеет место изоморфизм

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq H[\mathcal{M}^*(X_{T^m}) \otimes H^*(T^m, \mathbb{Q}), d], \quad H^*(T^m, \mathbb{Q}) = \Lambda(u_1, \dots, u_m), \quad (2)$$

где $d = \partial + d_u$ удовлетворяет правилу Лейбница, $d_u|_{\mathcal{M}(Y)} = 0$, а форма $d_u u_i \in \mathcal{M}^2(X_{T^m})$ реализует класс $\varphi(u_i) \in H^*(X_{T^m}, \mathbb{Q})$. Введем в алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{M}^*(X_{T^m}) \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_m)$ биградуировку $\text{bideg } u_i = (0, -1)$, $\text{bideg } v = (\deg v, 0)$, где $v \in \mathcal{M}^{\deg v}(X_{T^m})$. Пусть $(\mathcal{E}_*^{*,*}, d_*^{\mathcal{E}})$ – спектральная последовательность, ассоциированная с фильтрацией $F^i \mathcal{B} = \bigoplus_{k \geq i-m} \mathcal{B}^{*,k}$. Нетрудно проверить, что $(\mathcal{E}_1, d_1^{\mathcal{E}})$ совпадает с членом (E_2, d_2) спектральной последовательности Лере–Серра (см. (1)). Итак, утверждение теоремы выполнено тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_*$ вырождается в члене $\mathcal{E}_2$.

Так как X_{T^m} формально, по определению имеет место квазиизоморфизм

$$(\mathcal{M}^*(X_{T^m}), \partial) \rightarrow (H^*(X_{T^m}, \mathbb{Q}), 0),$$

который согласно [5; лемма 14.2] продолжается до квазиизоморфизма $(\mathcal{M}^*(X_{T^m}) \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_m), d) \rightarrow (H^*(X_{T^m}, \mathbb{Q}) \otimes \Lambda^*(u_1, \dots, u_m), d_u)$. Следовательно, согласно (2) имеет место изоморфизм (1). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Мы построим такое многообразие X , что соответствующая спектральная последовательность $\mathcal{E}_{**}^*$ из доказательства теоремы 1 не вырождается во втором члене.

Рассмотрим минимальную алгебру $(\mathcal{M}, d) = (S(x_1, x_2) \otimes \Lambda(y_1, y_2, y_3), d)$, где $\deg x_i = 2$, $\deg y_i = 3$, $dx_i = 0$, $dy_1 = x_1^2$, $dy_2 = x_2^2$, $dy_3 = x_1x_2$. Нетрудно проверить, что аддитивно ее когомологии порождены: в степени 0 единицей, в степени 2 элементами $[x_1]$, $[x_2]$, в степени 5 элементами $[x_2y_1 - x_1y_3]$, $[x_1y_2 - x_2y_3]$, в степени 7 элементом $[x_1^2y_2 - x_1x_2y_3] = [x_2^2y_1 - x_1x_2y_3]$. Согласно примеру 2.91 из [4] существует многообразие M с такой минимальной моделью. Отметим, что многообразие M заведомо не является формальным, так как тройное произведение Масси $\langle x_1, x_1, x_2 \rangle = [y_1x_2 - x_1y_2]$ нетривиально.

Индукцируем на M главное T^2 -расслоение при помощи отображения $f: M \rightarrow BT^2$ такого, что $f^*: H^2(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(BT^2, \mathbb{Q})$ – изоморфизм. Путем гомотопии можно добиться того, что образ f лежит в конечном остове $(CP^N)^2 \subset BT^2$ и f является гладким отображением. Пусть X – тотальное пространство этого расслоения. Так как f^* – изоморфизм, в модели (2) можно считать, что $du_i = x_i$. Тогда дифференциал d повышает фильтрацию элемента $w = u_1 \wedge u_2 x_1 - u_2 y_1 + u_1 y_3$ на 2: $dw = -x_2 y_1 + x_1 y_3$, значит, $[w]$ выживает в $\mathcal{E}_2$, но не выживает в $\mathcal{E}_\infty$, так как $dw \neq 0$. Теорема 2 доказана.

Тем самым, утверждение о том, что спектральная последовательность Лере–Серра расслоения $X \times ET^m \rightarrow X_{T^m}$ вырождается в члене E_3 [2], [3], в общем случае неверно.

С помощью аналогичных методов удастся доказать результат о когомологиях Дольбо главных расслоений, чьим слоем является голоморфный тор. Пусть $T_{\mathbb{C}}^{2l} = \mathbb{C}^l / \mathbb{Z}^{2l}$ свободно и голоморфно действует на комплексном многообразии X , и пусть M – пространство орбит. В этом случае существует аналог спектральной последовательности Лере–Серра – спектральная последовательность Бореля, вычисляющая $H_{\bar{\partial}}(X)$ (см. [6]). Вместе с моделью [4; теорема 4.65], аналогичной (2), это позволяет доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что односвязное комплексное многообразие M Дольбо-формально (например, кэлерово) и $H^2(M, \mathbb{C})$ имеет разложение Ходжа. Тогда спектральная последовательность Бореля главного расслоения $T^m \rightarrow X \rightarrow M$ вырождается в члене E_3 и имеет место изоморфизм*

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(X) \simeq H[E_2, d_2] = H[H_{\bar{\partial}}^{*,*}(M) \otimes H_{\bar{\partial}}^{*,*}(T_{\mathbb{C}}^{2l}), \bar{\partial}_u], \quad (3)$$

где дифференциал $\bar{\partial}_u$ задан на мультипликативных образующих: $\bar{\partial}_u|_{H_{\bar{\partial}}^{*,*}(M)} = 0$, а на $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(T_{\mathbb{C}}^{2l}) \oplus H_{\bar{\partial}}^{0,1}(T_{\mathbb{C}}^{2l}) = H^1(T_{\mathbb{C}}^{2l}, \mathbb{C})$ совпадает с $(1, 0)$ -компонентой дифференциала d_u из теоремы 1.

Автор крайне признателен С. Гальперину за указание на ошибку в работе [3]. Также автор хотел бы поблагодарить своих научных руководителей В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова за привлечение внимания к проблеме торического ранга, многочисленные плодотворные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] S. Halperin, *Aspects of topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985, 293–306.
 [2] Т. Höfer, *J. Math. Kyoto Univ.*, **33**:1 (1993), 227–259. [3] Ю. М. Устиновский, *Дальневост. матем. журн.*, **12**:1 (2012), 98–107. [4] Y. Félix, J. Oprea, D. Tanré, *Algebraic models in geometry*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008. [5] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, Springer-Verlag, New York, 2001. [6] Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973.