Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Горский, Комплексы подслов и 2-усеченные кубы,
УМН, 2014, том 69, выпуск 3, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 04:22:32

Комплексы подслов и 2-усеченные кубы

М. А. Горский

Пусть W – конечная группа Коксетера, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ – множество простых отражений, порождающее W . Рассмотрим слово $\mathbf{Q} := \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_m$ в алфавите простых отражений ($\mathbf{q}_i \in S \ \forall i = 1, \dots, m$) и элемент π группы W . Комплекс подслов $\Delta(\mathbf{Q}; \pi)$ – это чистый симплицальный комплекс на множестве вершин $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m\}$, соответствующих буквам (точнее, их позициям) в слове $\mathbf{Q}$. Набор вершин образует симплекс, если дополнение в $\mathbf{Q}$ к соответствующему подслову содержит приведенное выражение π . Максимальные симплексы отвечают дополнениям приведенных выражений π в слове $\mathbf{Q}$. Комплексы подслов были введены А. Кнутсоном и Э. Миллером в работе [1]. Они же показали в [2], что $\Delta(\mathbf{Q}; \pi)$ является сферическим тогда и только тогда, когда произведение Демажюра слова $\mathbf{Q}$ равно π ; в противном случае $\Delta(\mathbf{Q}; \pi)$ является триангулированным шаром. Для сферических комплексов подслов важными являются вопросы существования, комбинаторного описания и геометрических реализаций двойственных им многогранников.

В группе W существует и единствен элемент максимальной длины, обозначаемый w_o . Мы будем рассматривать комплексы подслов вида $\Delta(\mathbf{c}w_o; w_o)$, где $\mathbf{c}$ – приведенное выражение элемента Коксетера, w_o – произвольное приведенное выражение w_o . Эти комплексы допускают реализацию *кирпичными многогранниками* В. Пило–К. Штумпа [3], которые мы будем обозначать $\mathbf{B}(\mathbf{c}w_o; w_o)$. Для каждого элемента Коксетера c в группе W определены c -кластерный комплекс типа W и двойственный ему многогранник – (обобщенный) c -ассоциаэдр типа W . Эти объекты важны в теории кластерных алгебр. С. Чебальос, Ж.-Ф. Лаббе и К. Штумп [4] доказали, что комплексы $\Delta(\mathbf{c}w_o(\mathbf{c}); w_o)$, где $w_o(\mathbf{c})$ – так называемое $\mathbf{c}$ -сортирующее слово для w_o , являются c -кластерными комплексами типа W . Следовательно, многогранники $\mathbf{B}(\mathbf{c}w_o(\mathbf{c}); w_o)$ реализуют c -ассоциаэдры типа W . Выбор элемента Коксетера c эквивалентен выбору колчана Q , являющегося ориентацией диаграммы Коксетера группы W . Пусть $\mathbf{c}'$ – приведенное выражение произвольного (возможно, равного c) элемента Коксетера c' в группе W , и пусть Q' – соответствующий колчан. Пусть $\tilde{Q}_{c,c'}$ – колчан, полученный из Q стиранием всех ребер, ориентированных по-разному в Q и в Q' (вершины не стираем); $\tilde{W}_{c,c'}$ – группа Коксетера, ориентацией диаграммы которой является $\tilde{Q}_{c,c'}$. Мы можем рассмотреть c как элемент Коксетера в $\tilde{W}_{c,c'}$.

ТЕОРЕМА 1. $\Delta(\mathbf{c}w_o(\mathbf{c}'); w_o)$ является c -кластерным комплексом типа $\tilde{W}_{c,c'}$, а $\mathbf{B}(\mathbf{c}w_o(\mathbf{c}'); w_o)$ реализует соответствующий обобщенный ассоциаэдр. В частности, пусть $\mathbf{c}_{\text{rev}}$ обозначает слово $\mathbf{c}$, написанное задом наперед, тогда $\mathbf{B}(\mathbf{c}w_o(\mathbf{c}_{\text{rev}}); w_o)$ является (комбинаторным) кубом.

Доказательство получается с помощью аргументов, аналогичных аргументам из работы [4]. Мы используем лемму 2.3 из [4] и проверяем, что все утверждения из [4; раздел 5], кроме леммы 5.5 и предложения 5.6, верны для произвольного приведенного выражения w_o , а не только для $\mathbf{c}$ -сортирующего слова.

Рассмотрим теперь произвольное приведенное выражение w_o элемента w_o . Существует биекция Lg_{c, w_o} между множеством букв слова $\mathbf{c}w_o = c_1 c_2 \dots c_n w_1 w_2 \dots w_N$ и множеством $\Phi_{\geq -1} = -\Pi \sqcup \Phi_+$ почти положительных (т. е. простых отрицательных и всех положительных) корней системы корней Φ , связанной с W :

$$\text{Lg}(c_i) = -\alpha_{c_i}; \quad \text{Lg}(w_j) = w_1 w_2 \dots w_{j-1}(\alpha_{w_j}),$$

где $\alpha_w \in \Phi$ – корень, соответствующий $w \in W$. Выбор w_o задает полный порядок $<_{w_o}$ на Φ_+ : $\alpha <_{w_o} \beta$, если $\text{Lg}^{-1}(\alpha)$ идет в w_o раньше $\text{Lg}^{-1}(\beta)$. Известно, что такой порядок удовлетворяет следующему условию: для любой подсистемы корней ранга 2 в Φ

с каноническими образующими α, β либо $a_1\alpha + b_1\beta <_{\mathbf{w}_o} a_2\alpha + b_2\beta$, если выполнено $a_1 < a_2$, либо $a_1\alpha + b_1\beta <_{\mathbf{w}_o} a_2\alpha + b_2\beta$, если $a_1 > a_2$. Иначе говоря, положительные корни любой подсистемы ранга 2 упорядочены в одном из двух естественных направлений. Выбор $\mathbf{c}$ также задает полный порядок на Φ_+ : $<_{\mathbf{c}} = <_{\mathbf{w}_o(\mathbf{c})}$. Корень $\gamma \in \Phi_+$ мы будем называть $(\mathbf{c}, \mathbf{w}_o)$ -стабильным, если для любой некоммутативной подсистемы $\langle \alpha, \beta \rangle$ ранга 2, содержащей γ и такой, что $\gamma \neq \alpha, \beta$, мы имеем

$$\alpha <_{\mathbf{c}} \beta \Leftrightarrow \alpha <_{\mathbf{w}_o} \beta.$$

Это условие зависит от $\mathbf{c}$, но не от $\mathbf{s}$. Пусть $\text{Stab}(\mathbf{c}, \mathbf{w}_o)$ – множество $(\mathbf{c}, \mathbf{w}_o)$ -стабильных корней. Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. (i) Вершины $\Delta(\mathbf{c}\mathbf{w}_o; \mathbf{w}_o)$ и, эквивалентно, гипергрani $\mathbf{B}(\mathbf{c}\mathbf{w}_o; \mathbf{w}_o)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с простыми отрицательными и $(\mathbf{c}, \mathbf{w}_o)$ -стабильными положительными корнями в системе Φ .

(ii) Пусть выражения $\mathbf{w}_o, \mathbf{w}'_o$ таковы, что $\text{Stab}(\mathbf{c}, \mathbf{w}_o) \subset \text{Stab}(\mathbf{c}, \mathbf{w}'_o)$. Тогда комплекс $\Delta(\mathbf{c}\mathbf{w}'_o; \mathbf{w}_o)$ получается из комплекса $\Delta(\mathbf{c}\mathbf{w}_o; \mathbf{w}_o)$ последовательностью подразбиений ребер. Аналогично, многогранник $\mathbf{B}(\mathbf{c}\mathbf{w}'_o; \mathbf{w}_o)$ получается из многогранника $\mathbf{B}(\mathbf{c}\mathbf{w}_o; \mathbf{w}_o)$ последовательностью усечений граней коразмерности 2.

Доказательство опирается на результаты работы [5], где было показано, как движения кос в группе W индуцируют композиции подразбиений ребер и обратных операций на комплексах подслов. Далее, мы показываем, что найдутся два корня $\alpha, \beta \in \text{Stab}(\mathbf{c}, \mathbf{w}_o)$, $\alpha <_{\mathbf{w}_o} \beta$, $\beta <_{\mathbf{w}'_o} \alpha$, между которыми (относительно порядка $<_{\mathbf{w}_o}$) нет других корней из $\text{Stab}(\mathbf{c}, \mathbf{w}_o)$. Остается показать, что движениями кос можно переставить буквы, соответствующие корням из отрезка $[\alpha, \beta]_{\mathbf{w}_o}$, так, чтобы β шло раньше α . В качестве перестановки можно взять $\mathbf{c}$ -сортирующее слово, тогда результат получается из свойства слов для группы W .

Класс 2-усеченных кубов, т.е. многогранников, получающихся из куба последовательностью усечений граней коразмерности 2, обладает интересными свойствами и включает в себя важные семейства многогранников (см. [6]). Каждый 2-усеченный куб является флаговым многогранником (т.е. любое множество его гиперграней имеет непустое пересечение, как только любая пара из этого множества имеет непустое пересечение). Из теорем 1 и 2 мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любой многогранник вида $\mathbf{B}(\mathbf{c}\mathbf{w}_o; \mathbf{w}_o)$ является 2-усеченным кубом и, следовательно, флаговым. В частности, любой обобщенный ассоциаэдр является 2-усеченным кубом.

Список литературы

- [1] A. Knutson, E. Miller, *Ann. of Math.* (2), **161**:3 (2005), 1245–1318. [2] A. Knutson, E. Miller, *Adv. Math.*, **184**:1 (2004), 161–176. [3] V. Pilaud, C. Stump, *Brick polytopes of spherical subword complexes: a new approach to generalized associahedra*, 2011 (v3 – 2014), 52 pp., [arXiv: 1111.3349](https://arxiv.org/abs/1111.3349). [4] C. Ceballos, J.-P. Labbé, C. Stump, *J. Algebraic Combin.*, **39**:1 (2014), 17–51. [5] M. Gorsky, *Subword complexes and edge subdivisions*, 2013, 12 с., [arXiv: 1305.5499](https://arxiv.org/abs/1305.5499); М. Горский, “Комплексы подслов и подразбиения ребер”, *Тр. МИАН* (в печати). [6] V. M. Buchstaber, V. D. Volodin, *Associahedra, Tamari lattices, and related structures*, Tamari memorial Festschrift, *Progr. Math.*, **299**, Birkhäuser, Basel, 2012, 161–186.

Михаил Александрович Горский
(Mikhail A. Gorsky)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: mike.gorsky@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией

28.05.2014