Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Каменов, Решение задачи о предсказании абсолютного максимума однородной диффузии, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 3, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:19:08

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Решение задачи о предсказании абсолютного
максимума однородной диффузии

А. А. Каменов

Для произвольной однородной диффузии, удовлетворяющей стохастическому дифференциальному уравнению $dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t$, и процесса ее текущего максимума $M_t = \max_{0 \leq u \leq t} X_u$ рассмотрим задачу об оптимальной остановке

$$\sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E} h(X_\tau, M_T),$$

где $h(x, s) \in C^{2,1}$ на множестве значений, которые принимает процесс (X_t, M_t) . Как правило, функция $h(x, s)$ оценивает “близость” значения процесса в момент остановки к значению абсолютного максимума.

Отметим, что такая задача – частный случай задачи

$$V_*(x, s, t) = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_{xst} f(X_\tau, M_\tau, \tau), \quad \text{где } f'_s(x, s, t)|_{x=s} = 0 \text{ для любых } s \text{ и } t, \quad (1)$$

для функции $f(X_\tau, M_\tau, \tau) = \mathbb{E}(h(X_\tau, M_T) | X_\tau, M_\tau, \tau)$.

Можно рассмотреть, по аналогии с работой [1], соответствующие задачи для процесса $m_t = \min_{0 \leq s \leq t} X_s$ и задачи поиска инфимума по всем возможным моментам остановки. Однако они тоже очевидным образом сводятся к задаче (1), поэтому мы будем рассматривать именно эту задачу как наиболее общую.

Заметим, что процесс $\bar{X}_t = (X_t, M_t)$ – марковский, точки роста второй координаты лежат на прямой $x = s$. Поскольку вне диагонали изменяется только первая координата, то при $x < s$ инфинитезимальные генераторы процессов $\bar{X}_t$ и X_t совпадают: $\mathbb{L}_{\bar{X}} = \mathbb{L}_X$, при этом $\mathbb{L}_X$ действует на функциях, удовлетворяющих $(\partial f / \partial s)(s, s) = 0$ (подробное доказательство см., например, в [4]).

ЛЕММА 1. *Не оптимально останавливаться в точках, где $\mathcal{L}f = f'_t + \mathbb{L}_X f > 0$.*

Для точек, не лежащих на диагонали, это следует из супергармонической характеристики функции V . Для точек на диагонали инфинитезимальный генератор процесса $\bar{X}$ имеет более сложный вид. Идея доказательства состоит в том, что на диагонали не определен характеристический оператор процесса – возможно подобрать последовательность окрестностей таким образом, что предел окажется положительным, что и будет означать необходимость продолжения наблюдений.

В случае, если при некотором s верно $V_*(s, s) = f(s, s)$, т.е. в точке (s, s) на диагонали необходимо сразу останавливаться, вопрос нахождения $V_*(x, s)$ для всех $x < s$ сводится к задаче для одномерного процесса X_t , для которой известен способ решения. Интерес, следовательно, представляют те случаи, когда при $M_t = s$ необходимо останавливаться в момент достижения процессом X_t некоторого уровня $g_*(s, t) < s$

(при этом, опять-таки, для $x < g_*(s)$ вопрос нахождения $V_*(x, s)$ сводится к одномерной задаче). Далее мы выведем дифференциальное уравнение для оптимальной границы $g_*(s, t)$.

Чтобы найти уравнение для $g_*(s, t)$ (в случае, если области остановки и продолжения наблюдений действительно имеют описанный вид), запишем следующую систему дифференциальных уравнений для $V(x, s, t)$ (задачу Стефана):

$$V'_t + \mathbb{L}_X V = 0, \quad g(s) < x < s, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial s}(x, s, t) \right|_{x=s-} = 0 \quad (\text{нормальное отражение}), \quad (3)$$

$$\left. V(x, s, t) \right|_{x=g(s)+} = f(x, s, t) \quad (\text{мгновенная остановка}), \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x}(x, s, t) \right|_{x=g(s)+} = f'_x(x, s, t) \quad (\text{гладкое склеивание}). \quad (5)$$

Для решения этой системы оказывается полезным следующий факт.

ЛЕММА 2. $V'_s(x, s+, t)$ существует и на множестве продолжения наблюдений C удовлетворяет уравнению $(\partial/\partial t + \mathbb{L}_X)V'_s(x, s+, t) = 0$.

Доказательство этой леммы использует теорему об огибающей в формулировке следствия 4 из работы [2].

Обозначим Y_t процесс X_t , остановленный в момент пересечения диагонали, т. е. $Y_t = X_{t \wedge \tau_0}$, и положим $\Psi(x, y, t) = P(Y_t \geq y \mid X_0 = x)$.

Используя лемму 2, можем доказать основную теорему:

ТЕОРЕМА 1. Если выполнены условия (2)–(5), то $g(s, t)$ удовлетворяет уравнению

$$g'_s(s, t) = \frac{\sigma^2(g(s, t))}{2} \cdot \frac{\int_t^T f'_s(g(s, \theta), s, \theta) d\psi(s, t, \theta) + f''_{xs}(g(s, t), s, t)}{(f'_t + \mathbb{L}_X f)(g(s, t), s, t)}, \quad (6)$$

где $\psi(s, t, \theta)$ – функция, удовлетворяющая уравнению Вольтерра

$$\Psi'_x(g(s, t), g(s, r), r) = \int_t^r \Psi(g(s, \theta), g(s, r), r - \theta) d\psi(s, t, \theta) \quad \text{для всех } t < r \leq T.$$

Встает вопрос о выборе конкретного решения уравнения (6). Оказывается, что, как и в работе [3], имеет место принцип максимума:

ТЕОРЕМА 2. Обозначим $g_*(s, t)$ максимальное допустимое решение уравнения (6) (т. е. решение, удовлетворяющее неравенству $\mathcal{L}f(g(s, t), s, t) \leq 0$ для любых s и t таких, что $g(s, t) < s$). Тогда, если для момента остановки $\tau_* = \inf\{t > 0: X_t \leq g_*(M_t, t)\}$ выполнено $E f(X_{\tau_*}, M_{\tau_*}, \tau_*) < \infty$, а функция $\mathcal{L}f$ удовлетворяет условию однократного пересечения, то τ_* является оптимальным в задаче (1).

Автор благодарен А. Н. Ширяеву за постановку задачи, а также всем участникам семинара “Случайные процессы и стохастический анализ” за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] M. Dai, H. Jin, Y. Zhong, X. Y. Zhou, *Contemporary quantitative finance*, Springer, Berlin, 2010, 317–333. [2] P. Milgrom, I. Segal, *Econometrica*, **70**:2 (2002), 583–601. [3] G. Peskir, *Ann. Probab.*, **26**:4 (1998), 1614–1640. [4] G. Peskir, A. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Birkhäuser, Basel, 2006, xxii+500 pp.

Андрей Александрович Каменов
(Andrey A. Kamenov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: akamenov@gmail.com

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
29.04.2014