Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Гиндикин, Р. С. Исмаилов, А. В. Карабегов, Ю. А. Неретин, Н. И. Нессонов, Г. И. Ольшанский, Владимир Федорович Молчанов (к семидесятипятилетию со дня рождения), *УМН*, 2014, том 69, выпуск 3, 186–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:20:29

Владимир Федорович Молчанов
(к семидесятипятилетию со дня рождения)

27 февраля 2014 г. исполнилось 75 лет доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Федоровичу Молчанову, специалисту по теории представлений и некоммутативному гармоническому анализу. Он — автор 48 научных статей, а также, совместно с Н. Я. Виленкиным и А. У. Климыком, выпуска «Теория представлений и некоммутативный гармонический анализ. II» (*Encyclopaedia Math. Sci.*, 59).

Владимир Федорович родился в 1939 г. в Красноярске. Осенью 1945 г. после демобилизации отца — офицера Советской армии — семья переехала в Тамбов. Окончив в 1955 г. с золотой медалью среднюю школу № 1 г. Тамбова, В. Ф. Молчанов поступил на мехмат МГУ, далее он учился там же в аспирантуре под руководством Ф. А. Березина. С 1965 г. работает на кафедре математического анализа (с 1966 г. — заведующим) Тамбовского государственного педаго-

гического института (ныне — Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина). Обсудим вкратце наиболее известные его результаты.

1. Анализ на гиперboloидах. Кандидатская диссертация (ее результаты анонсированы в двух заметках в Докладах АН СССР 1966 г. и 1968 г., подробное изложение содержалось в позднейших статьях) была посвящена гармоническому анализу на многомерных гиперboloидах. Рассмотрим псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{p,q}$ с индефинитным скалярным произведением $\{x, y\}$. В нем рассматривается гиперboloид

$$H_{p,q}: -x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2 = 1,$$

на $H_{p,q}$ действует транзитивно псевдоортогональная группа $SO_0(p, q)$, стабилизатор базисного вектора e_{p+1} — подгруппа $SO_0(p, q-1)$. В. Ф. Молчанов получил явное спектральное разложение (псевдориманова) оператора Бельтрами–Лапласа Δ на $H_{p,q}$ и описал представления группы $SO_0(p, q)$, реализуемые в собственных подпространствах Δ . Двуполостный гиперboloид ($q = 1$) является моделью p -мерного пространства Лобачевского, к тому времени этот случай много исследовался. Кроме того, спектральное разложение было известно для $H_{2,2} \simeq SL(2, \mathbb{R})$ (Хариш-Чандра, 1952) и $H_{1,3}$ (И. М. Гельфанд, М. И. Граев, 1962).

Напомним стандартный подход к задаче в случае пространств Лобачевского $H_{p,1}$. Оператор Лапласа ограничивается на пространство $SO(p)$ -инвариантных функций, т.е. функций, зависящих от $\{x, e_{p+1}\}$. Получается дифференциальный оператор Лежандра на полупрямой. Далее проводится разложение этого оператора по собственным функциям, спектральная мера и оказывается мерой Планшереля для нашего представления.

В. Ф. Молчанов распространяет этот подход на случай гиперboloидов. Здесь, однако, встречается ряд существенных трудностей, их видно уже на примере однополостного гиперboloида $H_{1,2}$ в $\mathbb{R}^3$. Стабилизатор $SO(1,1)$ точки e_3 не компактен. Гладких собственных функций, зависящих от $\{x, e_3\}$, теперь нет, $SO(1,1)$ -инвариантные решения уравнения $\Delta f = \lambda f$ являются обобщенными функциями с сингулярным носителем на линиях уровня $\{x, e_3\} = \pm 1$. Это 4 линейных образующих гиперboloида, разделяющих его на куски. На каждом куске собственная функция является одним из двух решений уравнения Лежандра, их надо подобрать так, чтобы склеить собственное распределение. Далее нужно разложить δ -функцию в e_3 по собственным распределениям. Это было проделано для произвольных гиперboloидов в технически тяжелой работе, однако окончательный результат – разложение L^2 на гиперboloиде в прямой интеграл унитарных представлений – дается элементарными формулами (естественно, с участием Γ -функций в спектральной мере). Важнее, что результат оказался в разных отношениях любопытным и неожиданным.

Сначала о представлениях группы $SO_0(p, q)$, которые появляются в спектре. Рассмотрим изотопный конус в $\mathbb{R}^{p,q}$. Рассмотрим пространство однородных функций на этом конусе, т.е. функций, удовлетворяющих $f(tx) = |t|^\sigma (\text{sign } t)^\varepsilon f(x)$, где $\sigma \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon = 0, 1$. Псевдоортогональная группа естественным образом действует на изотропном конусе и, тем самым, в однородных функциях. Легко видеть, что однородная функция f однозначно определяется своим ограничением на произведение сфер

$$S^{p-1} \times S^{q-1}: x_1^2 + \dots + x_p^2 = 1 = x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2$$

(при этом $f(x) = (-1)^\varepsilon f(-x)$). Группа $SO(p, q)$ действует на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ конформными преобразованиями (мы снабжаем $S^{p-1} \times S^{q-1}$ *разностью* римановых метрик), она же действует в пространстве функций на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ по формуле

$$T_{\sigma,\varepsilon}(g)f(x) = f(xg)k(g, x)^\sigma,$$

где $k(g, x)$ – коэффициент растяжения преобразования g в точке x . Пространство функций на сфере S^{p-1} обычным образом раскладывается в сумму сферических гармоник $\bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{H}_i^{p-1}$. Соответственно, пространство функций на произведении сфер разлагается в прямую сумму $\mathcal{H}_i^{p-1} \otimes \mathcal{H}_j^{q-1}$. Это дает нам ограничение представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ на максимальную компактную подгруппу $K := SO(p) \times SO(q) \subset SO_0(p, q)$. Мы видим, что представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ очень “маленькие”, а именно, K -спектр является однократным (что само по себе случается нечасто) и он состоит из очень специальных представлений группы K .

Несложно проверить, что при $\text{Re } \sigma = -(p+q)/2 + 1$ представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ унитарны в $L^2(S^{p-1} \times S^{q-1})$ (“основная вырожденная серия” представлений). Пусть, для простоты обозначений, $\varepsilon = 0$ (тем самым, мы рассматриваем “четные функции”, $f(x) = f(-x)$), и пусть $p > 2$, $q > 2$, а $p+q$ четно. Рассмотрим полуторалинейную форму на пространстве гладких четных функций, заданную формулой

$$\langle f, g \rangle_\sigma = \int_{S^{p-1} \times S^{q-1}} \int_{S^{p-1} \times S^{q-1}} \{x, y\}_+^{2-p-q-\sigma} f(x) \overline{g(y)} d\mu(x) d\mu(y),$$

Рис. 1

где μ – стандартная мера на произведении сфер¹. Это выражение определено при $\sigma < 3 - p - q$ (когда интеграл сходится) и дальше продолжается аналитически на $\mathbb{C}$ с полюсами в $\sigma = 3 - p - q + k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. При вещественных нецелых σ мы получаем $T_{\sigma,1}$ -инвариантную эрмитову форму. Оказывается, что она положительно определена при $|\sigma - (p+q)/2 + 1| < 1$ (это дает “вырожденную дополнительную серию представлений”). Кроме того, форме $\langle \cdot, \cdot \rangle_\sigma$ можно придать значения и в полюсах, что позволяет построить “дискретную серию представлений”. Эти представления еще более вырождены, в них уже участвует лишь часть сферических гармоник, возможные структуры K -спектров примерно такие, как показано на рис. 1.

Построенный класс представлений группы $SO_0(p, q)$ (а также похожие представления групп $U(p, q)$, $Sp(p, q)$) является каплей в море унитарных представлений полупростых групп. Однако они в разных отношениях интересны и были предметом работ Н. Лимича, И. Нидерле, Р. Рончки (обнаруживших их одновременно с Молчановым), Р. Стрихарца, В. Россмана, А. У. Климыка, А. М. Гаврилика, Р. Хау, Енг-Ши-Тана, Т. Брансона, Б. Шпе, Б. Костанта, Т. Кобаяши и других авторов (статьи на эту тему продолжают появляться). Среди этих работ стоит отметить работу самого В. Ф. Молчанова (1977) об ограничениях представлений $T_{\sigma,\varepsilon}$ на подгруппу $SO(p, q - 1)$.

Вернемся к гиперboloиду. В. Ф. Молчанов показал, что L^2 разлагается в прямой интеграл по основной серии плюс счетная прямая сумма (не всех) представлений дискретной серии. Была также явно вычислена спектральная мера. Стоит заметить, что спектральное разложение есть у любого унитарного представления локально компактной группы и, в частности, у любого представления в пространстве L^2 , однако явно вычисленных спектральных разложений (“формула Планшереля”) известно не так уж много.

Мы видим, что спектр L^2 на гиперboloиде является разнородным. В таких случаях возникает вопрос (в духе “программы Гельфанда–Гиндикина”, 1977) о разложении L^2 на слагаемые с однотипным спектром. Хотя есть определенная уверенность, что в конкретных случаях это можно проделать, результатов здесь немного (и они, в основном, относятся к отделению голоморфных серий). В. Ф. Молчанов (в 1997 г., случай $H_{1,2}$ – в 1980 г.) получил явные формулы для проекторов, разделяющих спектры, для гиперboloидов.

2. Псевдоримановы симметрические пространства. Гиперboloиды являются частными случаями (полупростых) псевдоримановых симметрических пространств. Задача разложения L^2 на подобных пространствах привлекла широкий интерес после работы М. Фленстед-Йенсена (1980) о дискретных сериях. И сейчас,

¹Обозначение x_+^λ , см., например, в книге: И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Обобщенные функции, 1, Физматгиз, М., 1959.

по прошествии многих лет, полная ясность в этом вопросе еще не достигнута. Для некоторых семейств пространств – сами полупростые группы, пространства $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ (комплексная группа по ее вещественной форме) и пространства ранга 1 – явные формулы Планшереля были получены. Случай пространств ранга 1 исследовался многими авторами с 1960-х годов. Окончательный результат был получен В. Ф. Молчановым в 1986 г. (это наиболее часто упоминаемый результат В. Ф., он же составил содержание его докторской диссертации, 1987). Здесь и подход, и структура ответов похожи на случай гиперboloидов. Задача сводится к анализу гипергеометрического дифференциального оператора, определенного на наборе из нескольких контуров в $\mathbb{C}$, с краевыми условиями на асимптотики собственных функций в особых точках.

3. Тензорные произведения, ограничения на подгруппу, неспсевдолокальные скалярные произведения, квантование. Задачу о тензорных произведениях унитарных представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ впервые рассмотрел Л. Пуканский в 1961 г. Он получил описание спектров. Явные спектральные меры были вычислены В. Ф. Молчановым в 1979 г. Заметим, что эта задача может трактоваться в рамках анализа на однополостном гиперboloиде в $\mathbb{R}^3$. Например, основные серии представлений индуцированы с верхнетреугольной подгруппы, их тензорные произведения – диагональной подгруппы D . Однородное пространство $SL(2, \mathbb{R})/D$ эквивалентно однополостному гиперboloиду, только действие группы в пространстве функций теперь “подкручено”. Если же мы перемножаем два представления дополнительной серии, то в пространстве функций на гиперboloиде возникает нестандартное скалярное произведение.

В. Ф. Молчанов рассмотрел еще несколько задач разложения тензорных произведений и ограничений на подгруппу и в связи с этим занялся исследованием задачи о разложении “канонических представлений”. Например, в случае гиперboloидов рассматривается обычное или подкрученное действие группы $SO_0(p, q)$ на функциях, а скалярное произведение (возможно, индефинитное) задается формулой

$$\langle f, g \rangle = \int_{H_{p,q}} \int_{H_{p,q}} (1 - \{x, y\})_+^{-\sigma} f(x) \overline{g(y)} d\nu(x) d\nu(y). \quad (1)$$

По существу, это задача об ограничении представлений $T_{\sigma, \varepsilon}$ дополнительных серий $SO_0(p, q+1)$ на $SO_0(p, q)$. Но тут возникает два дополнительных нюанса. Во-первых, естественный аналог скалярного произведения (1) существует и для других симметрических пространств ранга 1, и он не всегда получается из задачи ограничения на подгруппу. Во-вторых, спектральные разложения удастся писать и для индефинитных скалярных произведений в следующем смысле: есть интегральный оператор, сплетающий действие группы и приводящий эрмитову форму к диагональному виду. Тут возникает странная и недопонятая ситуация. Индефинитные скалярные произведения сами по себе не определяют топологию, а стандартный подход с пространствами Крейна здесь не работает. В итоге непонятно, как определять спектр представления, однако спектральные разложения в природе существуют и во многих случаях написаны.

В. Ф. Молчанов распространил квантование Березина на кэлеровых многообразиях на параэрмитовы симметрические пространства G/H . Функциям на G/H ставятся в соответствие операторы в функциях на некотором грассманиане, а интегральное ядро сплетающего оператора основных серий играет роль переполненной системы векторов в квантовании Березина.

4. Действия надалгебр. Вопрос такой. Ограничим унитарное представление группы G на подгруппу M и разложим явно полученное представление в прямой интеграл неприводимых. Можно ли явно написать действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в этом

разложении? Стоит иметь в виду, что все классические римановы и псевдоримановы симметрические пространства G/H допускают (по крайней мере, локальное) действие некоторой надгруппы $\tilde{G} \supset G$. Ответ на такой вопрос был получен Ю. А. Неретиным (2001) для тензорного произведения голоморфного и антиголоморфного представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$. В прямом интеграле должна действовать алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$. Это действие пишется дифференциально-разностными операторами вида

$$f(x, s) \mapsto D_- f(x, s + i) + D_0 f(x, s) + D_+ f(x, s - i), \quad (2)$$

где $f(s) \mapsto f(s + i)$ – оператор сдвига в мнимом направлении в пространстве функций вещественной переменной, а D_- , D_0 , D_+ – явные дифференциальные операторы порядка 2 по x .

В. Ф. Молчанов в 2003–2007 гг. решил несколько такого рода задач для многомерных групп, его результаты отчасти проясняют структуру общей задачи. Рассмотрим, например, действие $SL(n+1, \mathbb{R})$ в L^2 на проективном пространстве $\mathbb{RP}^n$. Ограничим его на подгруппу $SO_0(n, 1)$. Группа $SO_0(n, 1)$ имеет на $\mathbb{RP}^n$ две открытых орбиты. Одна орбита – пространство Лобачевского, другая – факторпространство однополостного гиперboloида по центральной симметрии. Таким образом, в прямой сумме двух L^2 на орбитах $SO_0(n, 1)$ действует большая группа $SL(n+1, \mathbb{R})$. Оператор, осуществляющий спектральное разложение, переводит L^2 на пространстве Лобачевского в L^2 на произведении сферы S^{n-1} и полупрямой $\mathbb{R}^+$ с координатой σ и спектральной мерой $c(\sigma) d\sigma$. Алгебра $\mathfrak{so}(n, 1)$ теперь действует послойно на сферах дифференциальными операторами первого порядка, зависящими от σ . В. Ф. Молчанов продолжает это действие до действия на алгебры $\mathfrak{sl}(n)$. Построенные операторы имеют форму (2), но коэффициенты D_- , D_0 , D_+ теперь оказываются дифференциальными операторами четвертого порядка, причем они выражаются через генераторы алгебры Ли $\mathfrak{so}(n, 1)$ и оператор Лапласа на сфере.

Отметим “конференционную” деятельность Владимира Федоровича. Он был одним из организаторов XII школы по теории операторов в функциональных пространствах (1987), многие участники которой потом вспоминали ее как одну из лучших конференций, в которых они когда-либо участвовали. Впоследствии он вместе с возглавляемой им кафедрой организовывал конференции по теории представлений и гармоническому анализу в Тамбове в 1989, 1996, 2005, 2007, 2008, 2009, 2012 гг. с участием математиков России, Украины, ряда западно-европейских стран, Японии и США.

*С. Г. Гиндикин, Р. С. Исмаилов, А. В. Карабегов,
Ю. А. Неретин, Н. И. Нессонов, Г. И. Ольшанский*