Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Егоров, Нгуен Минь Чьонг, О некоторых полулинейных краевых задачах для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 249–250

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm96>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:15:49

О НЕКОТОРЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.В. Егоров, Нгуен Минь Чыонг

1. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу

$$(1) \quad Au = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} A_{\alpha\beta} q^\beta D^\alpha u = f(q, x, u, \dots, D^{2m-1}u) \quad \text{в } \Omega,$$

$$(2) \quad B_j u = \sum_{k+|\beta| \leq m_j} B_{jk\beta} q^\beta D_\nu^k u = g_j(q, x, u, \dots, D^{m_j-1}u) \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где $j = 1, \dots, m$, $x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x_n)$, $A_{\alpha\beta}$ – сингулярные интегральные операторы в Ω , $B_{jk\beta}$ – псевдодифференциальные операторы порядка $m_j - k - |\beta|$ на $\partial\Omega$, $m_j < 2m$, D_ν – оператор дифференцирования в направлении внутренней нормали, q – комплексный параметр, $\alpha_0 \leq \arg q \leq \beta_0$ (ср. [1]).

Мы используем пространства Соболева $H_{q,s}$, зависящие от комплексного параметра q (см. [2], [3]), с нормой $\|u\|_{q,s} = (\|u\|_s^2 + |q|^{2s} \|u\|_0^2)^{1/2}$, где $\|\cdot\|_s$ – норма в классическом пространстве Соболева H_s , $s \geq 0$.

Рассмотрим псевдодифференциальные операторы A и B_j с бесконечно гладкими символами $A(q, x, \xi)$ и $B_j(q, x, \xi)$, удовлетворяющие условиям из работы [4], а именно:

(i) $A(q, x, \xi) \neq 0 \quad \forall (q, \xi), |q| + |\xi| \neq 0$;

(ii) Пусть x_0 – произвольная точка $\partial\Omega$ и в некоторой ее окрестности ω локальные координаты $y = (y', y_n) = \Phi(x)$ выбраны таким образом, что граница области $\Omega \cap \omega$ определена уравнением $y_n = 0$, а сама область расположена при $y_n > 0$. Пусть

$$\Phi(x_0) = (y', 0), \quad a(q, y', \eta) = A(q, x_0, {}^t\Phi'(x_0)\eta), \quad b_j(q, y', \eta) = B_j(q, x_0, {}^t\Phi'(x_0)\eta).$$

Тогда задача

$$a(q, y', 0, \eta', id/dy_n)v(y) = 0, \quad y > 0; \quad b_j(q, y', \eta', id/dy_n)v(0) = h_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

однозначно разрешима в пространстве функций, стремящихся к 0 при $y_n \rightarrow \infty$, при любых x_0 , q , η' таких, что $|q| + |\eta'| \neq 0$, и для любых h_j .

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что выполнены условия i), ii). Пусть функции f , g_j измеримы по x , непрерывны по ξ и удовлетворяют неравенствам

$$(3) \quad |f(q, x, u, \dots, D^{2m-1}u)| \leq M \left(1 + |q| + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} |D^\alpha u| \right), \quad x \in \Omega,$$

$$(4) \quad |g_j(q, x, u, \dots, D^{m_j-1}u)| \leq M \left(1 + |q| + \sum_{|\alpha| \leq m_j-1} |D^\alpha u| \right), \quad x \in \partial\Omega,$$

где $j = 1, \dots, m$, M – постоянная, не зависящая от q и u . Пусть $g_j(q, x, 0, \dots, 0) \in H_{q, 2m-m_j-1/2}(\partial\Omega)$, $j = 1, \dots, m$. Тогда для достаточно больших $|q|$ задача (1), (2) разрешима в $H_{q, 2m}(\Omega)$. Если функции $f(q, x, \xi)$ и $g_j(q, x, \xi)$ удовлетворяют условию Липшица по ξ , то решение единственно.

2. Рассмотрим неклассическую задачу:

$$(5) \quad Au = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} A_{\alpha\beta} q^{\beta} D^{\alpha} u = f(q, x, u, \dots, D^{2m-1} u) \quad \text{в } \Omega,$$

$$(6) \quad B_j u = \sum_{k+|\beta|=0}^{m_j} B_{jk\beta} q^{\beta} D_{\nu}^k D_{\mu} u = g_j(q, x, u, \dots, D^{m_j-1} u) \quad \text{на } \partial\Omega$$

при тех же условиях i), ii). Здесь D_{μ} – векторное поле, которое может касаться $\partial\Omega$ в точках гладкого подмногообразия $\Omega_0 \subset \partial\Omega$ размерности $n-2$, но не касательно к Ω_0 . Мы пользуемся классификацией многообразий Ω_0 , принятой в [5] или [6], и предполагаем, что Ω_0 – многообразие первого или третьего класса. Если Ω_0 принадлежит первому классу, то мы добавляем условия

$$(7) \quad D_n^k u = u_{0k}(q, x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{на } \Omega_0.$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что выполнены условия i), ii). Пусть функции f, g_j дважды непрерывно дифференцируемы по x и ξ и удовлетворяют неравенствам (3), (4) и условию Липшица по ξ . Тогда для больших $|q|$ задача (5), (6), (если Ω_0 принадлежит третьему классу) или задача (5), (6) (7) (если Ω_0 принадлежит первому классу) имеет единственное решение $u \in H_{q, 2m-1}(\Omega)$, если $g_j(q, x', 0, \dots, 0) \in H'_{q, 2m-m_j-1/2}(\partial\Omega)$, $u_{0k} \in H'_{q, 2m-k-1/2}(\Omega_0)$.*

3. Наши доказательства основываются на применении теоремы Лере–Шаудера [7] и результатов [4] для классической линейной задачи и [5] для неклассической задачи.

Эти задачи можно рассматривать и в пространствах Соболева $W_{q,l,p}$, $p \geq 2$, или в пространствах переменного порядка $W_{q,l(x),2}$. Мы планируем опубликовать эти результаты в другой заметке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Агранович М. С. // УМН. 1965. Т. 20. № 2. С. 3–120. [2] Агранович М. С., Вишик М. И. // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161. [3] Чуонг Н. М. // Матем. сб. 1988. Т. 121. № 1(5). С. 1–17. [4] Чуонг Н. М. // Матем. заметки. 1984. Т. 25. № 2. С. 221–229. [5] Егоров Ю. А., Кондратьев В. А. // Матем. сб. 1969. Т. 78. № 1. С. 148–176. [6] Егоров Ю. А. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука, 1984. [7] Leray J., Schauder J. // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1934. V. 51. P. 45–78. [8] Трунг Л. Ч. // УМН. 1989. Т. 44. № 5. С. 169–170.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
0.998