Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лютковский, Меры на группах диффеоморфизмов неархимедовых банаховых многообразий, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm960>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:49:24

МЕРЫ НА ГРУППАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ НЕАРХИМЕДОВЫХ БАНАХОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Лютковский

В работе [1] были построены квази-инвариантные меры (КИМ) на группах диффеоморфизмов (ГД) $\text{Diff}(t, M)$ классов гладкости $C(t)$ локально-компактных многообразий (ЛКМ) M над $\mathbb{R}$ с $t = (l, b)$ при $l \in \mathbb{N}$ и $0 \leq b < 1$. В данной статье исследован случай банаховых метризуемых сепарабельных аналитических многообразий (БМ) M над неархимедовыми ЛК полями $K \supset \mathbb{Q}_p$ с $\text{Tx}M = X$ – банаховыми пространствами (БП) X [2].

Каждая непрерывная функция $f: M \rightarrow K$ имеет единственное разложение $f(x) = \sum \{a(m, f)Q_m(x) : m \in \mathbb{N}_0^n\}$, где $Q_m(x)$ и $P_m(x)$ определены в [3], [4], а $M := B(K^n, 0, 1)$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть $j(b, x) := p^z$ с $z = b \cdot \text{ord}_p x$ для $x \neq 0$ и $j(b, 0) := 0$, для $h: M \rightarrow K$: $(\Phi^{be(i)}h)(y, y + te(i)) := [h(te(i) + y) - h(y)]/j(b, t)$ и $\Phi^j h$ для $j = j(i)e(1) + \dots + j(n)e(n)$, $0 \leq j(i) : (\Phi^j h) := (\Phi^{l(i)}(\Phi^{b(i)}h))$, где $j(i) := l(i) + b(i)$, $l(i) \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq b(i) < 1$, и $b' := \{b(1), \dots, b(n)\}$, $|b'| \leq b$. Тогда $C(l, b, M \rightarrow K) := \{f: M \rightarrow K : (\Phi^v f) \text{ непрерывны на } M^s, \|f\| := \sup \{ |(\Phi^v f)| : \text{на } M^s, s = |j| + \text{sign } b(1) + \dots + \text{sign } b(n) + 1, |v| \leq l + \text{sign } b \} \}$. Пусть X и Y – БП над K , $F: U \rightarrow Y$, где U открыто в X . Назовем F дифференцируемым, если $\forall t$ в K , x в U и h в X с $x + th$ в U : $DF(x, h) = F'(x)h$, где $F'(x)$ – линейный непрерывный оператор (по h) и $DF(x, h) := \{dF(x + th)/dt \mid \{t = 0\}\} := \lim_{t \rightarrow 0} \{F(x + th) - F(x)\}/t$, $\Phi^1 F(x, h, t) := \{F(x + th) - F(x)\}/t$, имеет непрерывное продолжение на $U \times V \times S$, U и V – ОЗ окрестности x и $0 \in X$, $S = B(K, 0, 1)$, а $\|\Phi^1 F(x, h, t)\| := \sup \{\|\Phi^1 F(x, h, t)\|/\|h\| : x \in U, h \in V, t \in S\} < \infty$ и $\Phi^1 F(x, h, 0) = F'(x)h$. По индукции и с использованием $j(b, t)$ определяются $\Phi^{n,j} F(x, h(1), \dots, h(n+1); t(1), \dots, t(n+1))$ и БП $C(l, b, U \rightarrow Y)$.

ГД $\text{Diff}(t, M)$ несепарабельны и их число Суслина несчетно, если $\dim_K M = \infty$, поэтому далее через $G(t)$ обозначены сепарабельные подгруппы: для f из $G(t)$ имеется разложение $f(x) = \sum \{a(m, f(i, *))Q_m(x)e(i) : i, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0^n, x \in K^n, \lim \{a(m, f(i, *)) - \text{id}(i, *)\}J(t, m) : |m| + n + i \rightarrow \infty\} = 0$ на $B(X, 0, 1)$, где $J(t, m) := \|Q_m\|_{C(t)}$, $t = (l, b)$ или $t = (an, r)$ (аналитических на $B(X, 0, r)$). Топология на $G(t)$ дается семейством псевдометрик $d(t, V; h, g) := \|g^{-1} \circ h - \text{id}\|$, с $\|h\| := \sup \{|a(m, h(i, *))J(t, m)| : i, n, m\}$, где V гомеоморфно $B(X, 0, 1)$ и $c = (V, f, X)$ – карта атласа $\text{At}(M)$ на M . Каждая f из БП $C(t, \inf, B(X, 0, 1) \rightarrow X)$ имеет разложение $f(x) = \sum \{f(i, n; x)e(i)z(n) : i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0\}$, $\{e(i)z(n)Q_m(x) : i, n, \text{Ord } m := \max\{i : m(i) \neq 0\} = n\}$ – ортогональный базис (ОБ) [5], $f(x; n) := \sum \{f(i, n; x)e(i) : i\} \in C(t, B(K^n, 0, 1) \rightarrow X)$, где $f(i, n; x) := \{a(m, f(i, *))Q_m(x) : \text{Ord } m = n, m = (m(1), \dots, m(n)), m(j) \in \mathbb{N}_0\}$. В некоторой окрестности $G(t) \supset W'' \ni \text{id}$ плотно семейство элементов, принадлежащих однопараметрическим подгруппам $\{g^v : v \in \mathbb{Z}_p\}$ (ОП). Пусть $S(v, f) = g(v, f)$ – ОП, задаваемая потоком S с $dS(v, f)/dv = A(x)S(v, f(x))$, $S(v + z, f) = S(v, S(z, f))$ и $S(v, m)(B) := m(S(-v, B))$, тогда m называется псевдодифференцируемой вдоль векторного поля класса $C(t'')$, $A(x) \in \text{Vect}(t'', M)$, если существует $\text{PD}(b, S(v, m)(B))$ по $v \forall B \in \text{Bf}(G(t))$, где $\text{PD}(b, h(v)) := \int_{\mathbb{Z}_p} [h(v) - h(s)]z(b, v - s)dw(s)$, $z(b, v) := q^a$, $a = -(1 + b) \cdot \text{ord}_p v$ или $z(b, v) := |v - s|^a$, $a = -1 - b$ для m и меры Хаара (МХ) w со значениями в $\mathbb{Q}_q$ и $\mathbb{R}$, соответственно.

ТЕОРЕМА 1. ГД $G(t)$ имеет КИМ m относительно плотной подгруппы G' , и m псевдодифференцируема $\forall b \in \mathbb{C}$ относительно $S(v, *)$ из плотной в W'' подгруппы G'' .

Для доказательства рассмотрим $\{s(n) \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, такие что $s(n) < s(n+1) \forall n$, $A(f) := \sum \{q(k)A(k; f', P(n)f)z(n) : n \in \mathbb{N}, k = (k(1), \dots, k(n)), k(j) \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}\}$, $A(k; f', P(n)f) := \partial_1^{2i(1)} \dots \partial_{r-1}^{2i(r-1)} \partial_{r+1}^{2i(r+1)} \dots \partial_n^{2i(n)} \sum \{y(l)\partial_r^l [(f')^{-1} \partial_r^{2i(r-l)} f(x; n) : l = 0, \dots, s-1\}$ с $|k| = s(n)n$, $\sum \{q(k) : \text{Ord } k \leq n, |k| = s(n)n\} =: t(n)$, $0 < c \leq |t(n)| \leq c' < \infty \forall n$ с фиксированными c и c' , где $\{y(l)\}$ – решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений [1], $P(n)$ – проекционный оператор на

$X_n = \{f(x; n) : f \in C(t)\}$, $P(n)f(x) = f(x; n)$, где $\{e(i) : i \in \mathbb{N}\}$ – нормированный ОБ (ОНБ) в X , $M = B(X, 0, 1)$. Можно задать $R(f) := \sum \{q(k)R(k, n; f)z(n) : n \in \mathbb{N}, k = (k(1), \dots, k(n))\}$, где $L = T^{-1}$, $T(l, b) : C(l, b, M) \rightarrow C(an, M)$ – линейный топологический изоморфизм $R(k, n; f) := \partial^{a_u} F(k, n; Q(f; n))$, $F(k, n; f) := L[A](k; g', P(n)g)$, $g = Tf$, $Q(f; n) := Q(l+a, Q(l+a-1, \dots, Q(l+1, f(x; n)) \dots)$, $l+a \geq 1$, здесь каждый $Q(l+j, *)$ действует по $(x(1), \dots, x(n))$, L действует на $([A]T(l, b)f)(y+a+b+\dots+z, y+b+\dots+z, \dots, y+z, y)$ по y , так что $L([A]T(l, b)f)(y, \dots, y) = LAT(l, b)f(y)$, оператор $[A]$ обозначает A с заменой всех ∂_i на $\Phi^{e(i)}$. Пусть $f(x) \in C(l-1, b, B(K^n, 0, 1) \rightarrow K)$, тогда антидифференцирование $P(l)$ зададим формулой: $P(l)f(x) := \sum \{\partial^j f(x_m)(x_{m+u} - x_m)^{j+u} / (j+u)! : m \in \mathbb{N}_0^n, |j| = 0, \dots, l-1\}$, где $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$, $x_m = \sigma_m(x)$, $\{\sigma_m : m \in \mathbb{N}_0^n\}$ – приближение 1 в $B(K^n, 0, 1)$ [4], а $Q(l, f) := P(l)(f - \text{id}) + \text{id}$.

Пусть $\|g\|(y) \|_{E(an, -k)} = \sup \{|a(j, f)|J(an, j)/J(k, 0, j) : j\}$, где $E(an, 0, N) = C(an, N)$, $[g](y) = [A]f$, $y \in N$, т.е. $[A]C(an, M) = E(an, -k, N)$ при $M = B(K^n, 0, 1)$, так как $[\Delta] : C(an, M, 0) \rightarrow E(an, -2, M^3 \rightarrow K)$ – линейный топологический изоморфизм, разностное уравнение для $[\Delta]$ можно решить по индукции, взять соответствующую карту и воспользоваться теоремой об обратной функции. Здесь для $f(V) = B(K^n, 0, 1) =: S$ по определению $\partial S = [x = (x(1), \dots, x(n)) : \exists j \text{ с } x(j) = 0 \text{ или } 1]$, $\partial M := U\{\partial f(V) : c \in \text{At} := (c = (V, f, K))\}$. Аналогично в бесконечномерном случае и $C(t, M, h) := \{f \in C(t, M) : f|_{\partial M} = 0 \text{ при } j = 0, \dots, v(h, n)\}$ с $v(h, n) = 2h - 1$ при четном l и $2h$ при нечетном l , $G(t, h) := \{f \in G(t) : \{(f(u; x) - \text{id}(u; x)) : u = 0, \dots, n\} \in C(t, M, h(n))\}$, $h(n) = [s(n)n/2]$, $n \in \mathbb{N}$, $h := \{h(n) : n \in \mathbb{N}\}$, где $s(n) = n + 1$. Для неограниченного M “граничные” условия задаются на каждой $\partial U(k)$, т.е. подмногообразии, регулярно вложенном в M и коразмерности 1 над K .

Пусть $\{H(n) := E(t, -2s(n)n, N \rightarrow X) \mid n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность БП над K , а $c_0(H(n) : n \in \mathbb{N}) := \{f = (f(1), f(2), \dots) : f(n) \in H(n) \forall n \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(n)\|_{H(n)} = 0\} =: E$, где $t = (l, b)$ или $t = (an, r)$, $N = M^{v+1}$, $v = 2s(n)n$. Тогда при $M = B(X, 0, 1)$ существует ОЗ подгруппа W в $G(t, h)$ локально гомеоморфная ОЗ окрестности 0 в банаховом пространстве Y в E . Используя (а) произведения мер $v(dx) = h(x)w(dx)$, задаваемых с помощью МХ w на $\mathbb{Q}_p$ с подходящими локально-постоянными h на $\mathbb{Q}_p$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}_q$ ($q \neq p$), (б) теорему Прохорова [6], (в) модифицируя теоремы из §26 в [7], получим КИМ m на $G(t)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = G(an, r)$ и $\dim_K M = n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, тогда существует ОЗ подгруппа W , такая что каждая $g \in W$ принадлежит соответствующей ОП, но функция $\exp : \text{Vect}(an, M) \rightarrow G$ не является локально биективной.

Рассмотрим $W := \{f \in G : \|f - \text{id}\| \leq p^{-2}\}$ и $g(j; x) := \sum \{A(j; x)^s x/s! : s = 0, 1, \dots\}$, используя разложения по $Q_m e(i)$, достаточно рассмотреть полиномы и $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$, $|m| \leq k$, где $A(j; x) := \sum \{T(j, i; x)\partial_i : i = 1, \dots, n\}$, $T(j, i; x)$ – полиномы на j -м шаге, $P(i; x) := T(0, i; x)$, $P(x) := (f - \text{id})(x) = \sum \{P(i; x)e(i) : i = 1, \dots, n\}$, $A(0; x)A(1; x) + A(1; x) = P^\wedge(x)$, $P^\wedge(x) := \sum \{P(i; x)\partial_i : i\}$, $P^\wedge(x) = A(j; x) + \sum \{A(j-1; x)^s A(j; x)/s! : s = 1, \dots, j\}$ при $j > 1$. Тогда существует $\lim_{j \rightarrow \infty} A(j; x) =: A(j) \in \text{Vect}(an, r)$ с $W \supset \exp\{vA(x)\}x = g(v, x)$ при $v \in \mathbb{Z}_p$, $g(1, x) = f(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шавгулидзе Е. Т. // ДАН СССР. 1988. Т. 303. С. 811–814. [2] Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. М.: Мир, 1975. [3] Amice Y. // Bull. Soc. Math. France. 1964. V. 92. P. 117–180. [4] Schikhof W. H. Ultrametric calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984. [5] van Rooij A. C. M. Non-Archimedean functional analysis. New York: Marcel Dekker, 1978. [6] Бурбаки Н. Интегрирование. Гл. 1–9. М.: Наука, 1970, 1977. [7] Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975.