Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Магазинов, Гипотеза Вороного для удлинений параллелоэдров Вороного, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 4, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:42:31

Гипотеза Вороного для удлинений параллелоэдров Вороного

А. Н. Магазинов

1. Определения и обозначения. *Параллелоэдром* (см. [1]) называется выпуклый многогранник P , допускающий разбиение $T(P)$ грань-в-грань аффинного пространства своими транслятами (параллельными копиями).

Пусть Λ – d -мерная решетка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{0} \in \Lambda$, а Ω – положительно определенная квадратичная форма от d переменных. Тогда многогранник

$$P_V = P_V(\Lambda, \Omega) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{y}^T \Omega \mathbf{y} = \min_{\mathbf{x}' \in \Lambda} (\mathbf{y} - \mathbf{x}')^T \Omega (\mathbf{y} - \mathbf{x}') \right\}$$

называется *параллелоэдром Вороного* решетки Λ относительно формы Ω .

Г. Ф. Вороной [2] сформулировал гипотезу о том, что каждый параллелоэдр является параллелоэдром Вороного. Полное доказательство или опровержение гипотезы Вороного остается открытой проблемой. Тем не менее для многих важных специальных классов параллелоэдров гипотеза Вороного верна (см. [2]–[5]).

Рассмотрим специальный класс параллелоэдров – параллелоэдры вида $P + I$, где P – параллелоэдр, I – отрезок, а под сложением понимается взятие суммы Минковского. Параллелоэдр вида $P + I$ назовем *удлинением* параллелоэдра P . Заметим, что не для всякой пары параллелоэдра P и отрезка I сумма Минковского $P + I$ является параллелоэдром.

В работе [6] В. П. Гришухин доказал гипотезу Вороного для удлинений $(d-2)$ -примитивных параллелоэдров. Эти параллелоэдры, в силу результата Житомирского [3], образуют подкласс класса параллелоэдров Вороного. В [6] поставлена также задача доказать гипотезу Вороного для всех параллелоэдров вида $P + I$, где P – параллелоэдр Вороного.

В данной работе дается набросок доказательства гипотезы Вороного для удлинений параллелоэдров Вороного. Таким образом, решается задача В. П. Гришухина и усиливается результат Р. Эрдала [4] о том, что гипотеза Вороного верна для зонотопов, являющихся параллелоэдрами.

Дадим необходимые определения.

Если P – параллелоэдр, а I – такой отрезок, что $P + I$ – также параллелоэдр, то направление отрезка I назовем *свободным* для параллелоэдра P (см., например, [6]).

Следуя [5], скажем, что параллелоэдр P *приводим*, если он представим в виде *прямой суммы* параллелоэдров меньшей размерности: $P = P_1 \oplus P_2$ (т. е. такой суммы Минковского, что линейные оболочки слагаемых P_1 и P_2 являются дополнительными подпространствами).

Для имеющего центр симметрии многогранника Q обозначим его центр через $c(Q)$. *Фасетным вектором* гиперграни F параллелоэдра P называется вектор $2c(F) - 2c(P)$ (центральная симметрия многогранников P и F следует из работы Г. Минковского [7]).

Будем говорить, что d -мерный параллелоэдр P имеет *крест, покрывающий фасетные векторы*, если в $\mathbb{R}^d$ существуют две гиперплоскости α_1, α_2 такие, что каждый фасетный вектор параллелоэдра P параллелен хотя бы одной из этих гиперплоскостей.

2. Основные результаты. Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 [8]. Пусть P и $P + I$ – параллелоэдры, причем P – параллелоэдр Вороного. Тогда и $P + I$ – параллелоэдр Вороного.

Следующие утверждения являются ключевыми при доказательстве теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть параллелоэдр Вороного P имеет бесконечное множество свободных направлений. Тогда P приводим.

ТЕОРЕМА 3. Пусть P – параллелоэдр Вороного и имеет крест, покрывающий фазетные векторы. Тогда P приводим.

Приведем схему доказательства теоремы 1.

Сначала устанавливается эквивалентность теорем 1 и 2. Отметим, что утверждение о том, что теорема 1 следует из теоремы 2, приведено (хотя и без доказательства) в [9; теорема 3.18].

Далее доказываем теорему 2 индукцией по размерности параллелоэдра P . Одновременно с теоремой 2 доказывается и теорема 3.

Обозначим утверждение “теорема 2 верна для всех параллелоэдров P размерности не более d ” через $A(d)$. Аналогично определим утверждения $B(d)$ для теоремы 3.

Основание индукции: утверждение $A(d)$ верно при $d \leq 4$, утверждение $B(d)$ верно при $d \leq 2$. Это мгновенно следует из того, что известна классификация всех параллелоэдров до размерности 4 включительно (см. [10]).

Собственно индукция осуществляется по следующей схеме:

$$\dots \implies B(n) \implies A(n+2) \implies B(n+1) \implies A(n+3) \implies \dots$$

Таким образом, для любого натурального d будут доказаны утверждения $A(d)$ и $B(d)$. Следовательно, будут доказаны теоремы 2 и 3.

Поскольку верна теорема 2, верна и теорема 1.

Список литературы

- [1] Е. С. Фёдоров, *Начала учения о фигурах*, Тип. Имп. АН, СПб., 1885, 279 с.; Изд-во АН СССР, М.–Л., 1953, 409 с. [2] G. F. Voronoï, *J. Reine Angew. Math.*, **134** (1908), 198–287; **136** (1909), 67–181. [3] О. Zitomirskij, *Журн. Ленингр. физ.-матем. об-ва*, **2:2** (1929), 131–151. [4] R. M. Erdahl, *European J. Combin.*, **20:6** (1999), 527–549. [5] A. Ordine, *Proof of the Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case*, Thesis (Ph.D.), Queen’s University, Canada, 2005, 131 с. [6] В. П. Гришухин, *Матем. сб.*, **197:10** (2006), 15–32; англ. пер.: V. P. Grishukhin, *Sb. Math.*, **197:10** (2006), 1417–1433. [7] H. Minkowski, *Gött. Nachr.*, 1897, 198–219. [8] A. Magazinov, *Voronoi’s conjecture for extensions of Voronoi parallelohedra*, 2013, 27 pp., arXiv:1308.6225. [9] A. Végh, *Rácsok, kör-és gömbelrendezések*, Thesis (Ph.D.), BME, Budapest, 2006, 115 с., <http://www.doktori.hu/index.php?menuid=193&vid=9821&nyita=N&lang=EN>. [10] B. N. Delaunay, *Изв. АН СССР. VII сер. Отд. физ.-матем. наук*, 1929, № 1, 79–110; № 2, 147–164.

Александр Николаевич Магазинов
(Aleksandr N. Magazinov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: magazinov-al@yandex.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
28.03.2014