Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Бенди́ков, А. А. Григо́рьян, К. Питтэ, В. Вёсс, Изо-
тропные марковские полугруппы на ультраметрических
пространствах, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 4, 3–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9602>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:45:00

УДК 519.217.5+519.217.13+517.518.14

Посвящается памяти

В. С. Владимирова (1923–2012)

и М. Х. Тайблесона (1929–2004)

Изотропные марковские полугруппы на ультраметрических пространствах

А. Д. Бенди́ков, А. А. Григо́рьян, К. Питтэ, В. Вёсс

Пусть (X, d) – сепарабельное ультраметрическое пространство с компактными шарами. Для заданных эталонной меры μ на X и функции распределения расстояний σ на $[0, \infty)$ строится симметричная марковская полугруппа $\{P^t\}_{t \geq 0}$, действующая в $L^2(X, \mu)$. Пусть $\{\mathcal{X}_i\}$ – соответствующий марковский процесс. Получены верхние и нижние оценки его переходной плотности и функции Грина, дан критерий его невозвратности, оценены его моменты и описаны марковский генератор $\mathcal{L}$ и его спектр, который является чисто точечным. В частном случае, когда $X = \mathbb{Q}_p^n$, где $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел, наша конструкция воспроизводит лапласиан Тайблесона (спектральный множитель) и наша теория также применима к изучению лапласиана Владимирова. Даже в этой хорошо изученной области несколько наших результатов являются новыми. Также изучается связь между марковским процессом $\{\mathcal{X}_i\}$ и процессом Кигами на границе дерева, который индуцирован случайным блужданием на дереве. В заключение приводятся примеры, иллюстрирующие взаимосвязь между операторами дробного дифференцирования и случайными блужданиями.

Библиография: 66 названий.

Ключевые слова: ультраметрическое пространство с мерой, метрические деревья, изотропные марковские полугруппы, марковские генераторы, ядро теплопроводности, переходная плотность, поле p -адических чисел, оператор Владимирова–Тайблесона, простое случайное блуждание на дереве, форма Дирихле, гармонические функции конечной энергии, следы гармонических функций конечной энергии.

DOI: 10.4213/rm9602

Работа была начата и закончена в Университете Билефельда при поддержке Специального исследовательского отдела (SFB 701) Немецкого исследовательского совета. Первый автор поддержан Научно-исследовательским фондом Польского Правительства (грант № 2012/05/B/ST 1/00613). Второй автор поддержан Немецким исследовательским советом (SFB 701). Третий автор поддержан Национальным советом научных исследований (CNRS), Франция. Четвертый автор поддержан Австрийским научным фондом (проекты FWF W1230-N13 и FWF P24028-N18).

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	4
2. Изотропная полугруппа и ядро теплопроводности.....	11
2.1. Усредняющий оператор.....	11
2.2. Основные свойства изотропных полугрупп.....	12
2.3. Спектральная функция.....	15
2.4. Оценки ядра теплопроводности.....	20
2.5. Тепловые ядра в $\mathbb{Q}_p$	24
2.6. Функция Грина и невозвратность.....	28
3. Изотропный лапласиан и его спектр.....	31
3.1. Субординация.....	31
3.2. L^2 -спектр.....	32
3.3. Форма Дирихле и плотность скачков.....	38
3.4. L^p -спектр лапласиана.....	40
4. Моменты марковского процесса.....	43
5. Анализ в $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_p^n$	49
5.1. Оператор p -адической дробной производной.....	49
5.2. Сферически симметричные марковские полугруппы.....	53
5.3. Пространства произведений.....	57
6. Случайные блуждания на дереве и процессы со скачками на его границе.....	66
6.1. Корневые деревья и их границы.....	66
6.2. Изотропные процессы со скачками на границе дерева.....	70
6.3. Простые случайные блуждания на дереве.....	70
6.4. Гармонические функции конечной энергии и их граничные значения.....	73
6.5. Процессы со скачками на границе дерева.....	73
7. Двойственность случайных блужданий на деревьях и изотропных процессах на их границах.....	78
7.1. Ответ на вопрос I.....	79
7.2. Ответ на вопрос II.....	82
7.3. Некомпактный случай.....	86
8. Случайное блуждание, связанное с p -адической дробной производной.....	93
8.1. Оператор p -адической дробной производной на $\mathbb{Z}_p$	93
8.2. Простое случайное блуждание на корневом дереве T_p°	95
8.3. Случайное блуждание, соответствующее $\mathfrak{D}^\alpha$ на $\mathbb{Q}_p$	97
Список литературы.....	98

1. Введение

В последние три десятилетия наблюдается возрастающий интерес к различным конструкциям марковских цепей на ультраметрических (вполне несвязных) пространствах, таких как канторово множество или поле p -адических чисел. В этой работе мы вводим и изучаем класс симметричных марковских полугрупп и их марковских генераторов на ультраметрических пространствах.

Наша конструкция очень прозрачна и приводит к ряду новых результатов, а также к лучшему пониманию ранее известных результатов.

Пусть (X, d) будет метрическим пространством. Метрика d называется *ультраметрикой*, если она удовлетворяет ультраметрическому неравенству

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}, \quad (1.1)$$

которое, очевидно, сильнее обычного неравенства треугольника. В этом случае (X, d) называется ультраметрическим пространством.

Мы будем всегда дополнительно предполагать, что рассматриваемое ультраметрическое пространство (X, d) сепарабельно и что каждый замкнутый шар

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \quad (1.2)$$

компактен. Из последнего условия вытекает, что (X, d) полно.

Из свойства ультраметричности (1.1) следует, что шары в ультраметрическом пространстве (X, d) выглядят совсем не так, как известные всем евклидовы шары. В частности, любые два ультраметрических шара одного радиуса либо не пересекаются, либо совпадают. Следовательно, множество всех различных шаров одного и того же радиуса r образует разбиение пространства X .

Одним из наиболее известных примеров ультраметрического пространства является поле $\mathbb{Q}_p$ p -адических чисел, наделенное p -адической нормой $\|x\|_p$ и p -адической ультраметрикой $d(x, y) = \|x - y\|_p$. Более того, для любого целого $n \geq 1$ p -адическое n -пространство $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p$ также является ультраметрическим пространством с ультраметрикой $d_n(x, y)$, определяемой равенством

$$d_n(x, y) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}.$$

Если группа изометрий ультраметрического пространства (X, d) действует транзитивно на X , то (X, d) на самом деле является локально компактной абелевой группой, что, в частности, имеет место для $\mathbb{Q}_p^n$.

В литературе различают следующие два подкласса ультраметрических пространств:

- (i) (X, d) дискретно и бесконечно;
- (ii) (X, d) совершенно (т.е. X не содержит изолированных точек).

Различные конструкции марковских процессов в случае (ii) с дополнительным условием, что X является локально компактной абелевой группой, развивали Ст. Н. Эванс [22], С. Харан [29], [30], Р. С. Исмагилов [33], А. Н. Кочубей [38], [39], С. Альбеверии и В. Карвовски [1], [2], С. Альбеверии и К. Жао [3], М. Дель Муто и А. Фига-Таламанка [42], [43], Х. Х. Родригес-Вега и В. А. Зунига-Галиндо [50], [66]. Они изучали X -значные безгранично делимые случайные величины и процессы, используя средства анализа Фурье; ссылки общего характера см. в книгах Э. Хьюитта и К. А. Росса [31], М. Х. Тайблесона [55] и А. Н. Кочубея [39]. Отметим, что спектральные множители Тайблесона на $\mathbb{Q}_p^n$ являются ранними предшественниками рассматриваемых здесь лапласианов.

Дж. Пирсон и Дж. Беллиссард [45] и Дж. Кигами [36], [37] рассматривали случайные блуждания на канторовом множестве и соответственно на канторовом множестве с выколотой точкой. В [36], [37] основное внимание уделялось

взаимосвязи между случайными блужданиями на деревьях и процессами со скачками на их границах. В этом контексте упомянем также работы Д. Алдуса и Ст. Н. Эванса [4] и З.-К. Чена, М. Фукушимы и Дж. Йинга [15]. Мы вернемся к работе Дж. Кигами в последних трех разделах настоящей работы.

Совершенно иной подход развивался В. С. Владимировым, И. В. Воловичем и Е. И. Зеленовым [57], [59]. Они занимались p -адическим анализом (распределения Брюа, преобразования Фурье и т. п.), связанным с концепцией p -адической квантовой механики, и ввели класс псевдодифференциальных операторов на $\mathbb{Q}_p$ и на $\mathbb{Q}_p^n$. В частности, они изучали p -адический лапласиан, определяемый на $\mathbb{Q}_p^3$, и соответствующее p -адическое уравнение Шрёдингера. В частности, они в явном виде вычислили (в виде разложения в ряд) некоторые ядра теплопроводности, а также функцию Грина p -адического лапласиана. В связи с теорией псевдодифференциальных операторов на произвольных вполне несвязных группах упомянем здесь раннюю работу Л. Салофф-Коста [51].

Дискретные ультраметрические пространства (X, d) (как в (i)) рассматривались в работе А. Бендикова, А. Григорьяна и К. Питтэ [7], непосредственно предшествующей настоящей работе. Среди примеров таких пространств упомянем класс локально конечных групп: счетная группа G локально конечна, если любое ее конечное подмножество порождает конечную подгруппу. Каждая локально конечная группа G является объединением возрастающей последовательности конечных подгрупп $\{G_n\}$. Ультраметрику d в G можно определить так: $d(x, y)$ – минимальное значение n , для которого x и y принадлежат одному и тому же классу смежности группы G_n .

Поскольку локально конечные группы не являются конечно порожденными, основные понятия геометрической теории групп, такие как словарная метрика, рост объема, изопериметрические неравенства и т. п. (ср., например, с [16], [28], [46]–[48], [52], [56], [61]), в этой постановке не применимы. Вместо словарной метрики в этой ситуации может быть использовано понятие ультраметрики (см. [5]–[7]).

Выбирая генерирующее множество для каждой подгруппы G_n локально конечной группы G , мы тем самым определяем случайное блуждание, т. е. марковское ядро на G_n . Беря выпуклую комбинацию марковских ядер по всем G_n , получаем марковское ядро на G , которое определяет случайное блуждание на G . Такие случайные блуждания изучали Д. А. Дарлинг и П. Эрдеш [17], Х. Кестен и Ф. Спизер [35], Л. Флатто и Дж. Питт [26], Н. Фериг и С. А. Молчанов [25], М. А. Касымджанова [34], Д. И. Картрайт [13], Г. Ф. Лоулер [40], С. Брофферрио и В. Вёсс [11], см. также работу А. Бендикова и Л. Салофф-Коста [9]. В частности, работа [40] содержит замечательный общий критерий возвратности таких случайных блужданий. Дальнейшие результаты о марковских процессах на ультраметрических пространствах можно найти в [18], [19], [23], [24], [41], [49].

Многие из результатов в вышеупомянутых работах покрываются нашим подходом через ультраметрики. Мы развиваем средства для анализа одного естественного класса марковских процессов на ультраметрических пространствах, не предполагая наличия какой-либо групповой структуры. В частности, характер наших рассуждений позволяет внести в рассмотрение произвольную меру

Радона μ на X (вместо меры Хаара в случае групп), которая используется как мера скорости для марковского процесса.

Итак, для заданного ультраметрического пространства (X, d) зафиксируем меру Радона μ на X с полным носителем и определим семейство $\{Q_r\}_{r>0}$ усредняющих операторов, действующих на неотрицательных или ограниченных борелевских функциях $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$Q_r f(x) = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f d\mu. \quad (1.3)$$

Заметим, что $0 < \mu(B_r(x)) < \infty$ для всех $x \in X$ и $r > 0$. Оператор Q_r имеет ядро

$$K_r(x, y) = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \mathbf{1}_{B_r(x)}(y). \quad (1.4)$$

Оно симметрично относительно x, y , поскольку $B_r(x) = B_r(y)$ для любого $y \in B_r(x)$. Ясно, что Q_r является марковским оператором на пространстве $\mathcal{B}_b(X)$ ограниченных борелевских функций на X , т. е. $Q_r f \geq 0$, если $f \geq 0$, и $Q_r 1 = 1$. Отсюда следует, что Q_r продолжается до ограниченного самосопряженного оператора в $L^2(X, \mu)$.

Выберем функцию σ , удовлетворяющую следующим предположениям:

$$\begin{aligned} \sigma: [0, \infty] \rightarrow [0, 1] & \text{ — строго монотонно возрастающая непрерывная слева} \\ & \text{функция, для которой } \sigma(0+) = 0 \text{ и } \sigma(\infty) = 1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Тогда оператор

$$P f = \int_0^\infty Q_r f d\sigma(r), \quad (1.6)$$

как и Q_r , является марковским оператором в $\mathcal{B}_b(X)$, а также ограниченным самосопряженным оператором в $L^2(X, \mu)$.

Оператор P определяет марковскую цепь с дискретным временем $\{\mathcal{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ на X со следующим правилом перехода: случайная точка $\mathcal{X}_{n+1}$ является μ -равномерно распределенной в $B_r(\mathcal{X}_n)$, где радиус r выбирается случайным образом в соответствии с вероятностным распределением σ . По этой причине мы называем σ *функцией распределения расстояний*.

Заметим, что оператор P определяется тройкой (d, μ, σ) . Мы называем P *изотропным марковским оператором*, связанным с (d, μ, σ) . Изотропный марковский оператор P обладает уникальными свойствами, проистекающими из ультраметрического свойства. Прежде всего отметим простое тождество

$$Q_r Q_s = Q_s Q_r = Q_{\max\{r, s\}}. \quad (1.7)$$

Действительно, в любом шаре B радиуса r любая точка $x \in B$ является центром B . Поскольку значение $Q_r f(x)$ есть среднее значение функции f в B , мы видим, что $Q_r f(x)$ не зависит от $x \in B$; т. е. $Q_r f = \text{const}$ на B . Если $s \leq r$, то применение Q_s к $Q_r f$ не изменяет эту константу, откуда получаем $Q_s Q_r f = Q_r f$. С другой стороны, если $s > r$, то любой шар радиуса s является объединением конечного числа непересекающихся шаров радиуса r .

Так как интегралы от f и $Q_r f$ по любому такому шару равны, мы получим $Q_s Q_r f = Q_s f$.

Поскольку в силу (1.7) $Q_r^2 = Q_r$, мы получаем, что Q_r является *ортотпроектором*¹ в L^2 . В частности, $\text{spes } Q_r \subset [0, 1]$.

Из (1.6) следует, что спектральные проекторы в спектральном разложении оператора P являются усредняющими операторами Q_r с точностью до замены переменных (ср. с (2.6)). Тот факт, что спектральные проекторы сами являются марковскими операторами, привносит новое понимание, новые технические возможности и результаты нового типа, которые не имеют аналога в других ситуациях, где речь идет о более привычных марковских процессах.

В частности, марковский оператор P неотрицательно определен, что позволяет определить степени P^t для всех $t \geq 0$. Тогда $\{P^t\}_{t \geq 0}$ – симметричная сильно непрерывная марковская полугруппа. Из (1.6) следует, что P^t допускает при $t > 0$ следующее представление:

$$P^t f(x) = \int_0^\infty Q_r f(x) d\sigma^t(r). \quad (1.8)$$

С другой стороны, можно *определить* P^t формулой (1.8), а затем использовать формулу (1.7) для доказательства того, что $P^s P^t = P^{s+t}$.

Полугруппа $\{P^t\}_{t \geq 0}$ определяет марковский процесс с непрерывным временем $\{\mathcal{X}_t\}_{t \geq 0}$. Поскольку n -й переходный оператор марковской цепи с дискретным временем $\{\mathcal{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть P^n , видим, что марковская цепь с дискретным временем совпадает с ограничением марковского процесса с непрерывным временем $\{\mathcal{X}_t\}$ на целые значения t . Это позволяет сосредоточиться только на изучении процесса с непрерывным временем $\{\mathcal{X}_t\}_{t \geq 0}$.

Мы называем марковскую полугруппу $\{P^t\}_{t \geq 0}$, определяемую формулами (1.3)–(1.8), *изотропной полугруппой*, а процесс со скачками $\{\mathcal{X}_t\}_{t \geq 0}$ *изотропным процессом*, связанным с тройкой (d, μ, σ) .

Кратко опишем содержание настоящей работы, которая посвящена изучению изотропных полугрупп.

В разделе 2 строится вышеупомянутая изотропная полугруппа и приводятся явные формулы для ее ядра теплопроводности $p(t, x, y)$ (т. е. переходной плотности процесса $\{\mathcal{X}_t\}$). Как указано выше, наш подход основан на наблюдении, что составляющие блоки оператора P , а именно усредняющие операторы Q_r из (1.3), являются ортогональными проекторами в $L^2(X, \mu)$, что позволяет задействовать на ранней стадии методы спектральной теории и функционального исчисления.

Устанавливаются некоторые основные свойства ядра теплопроводности, например его непрерывность вне диагонали, и доказываются верхние и нижние оценки в терминах t и $d(x, y)$.

К примеру, в $\mathbb{Q}_p$ с p -адической ультраметрикой $\|x - y\|_p$ и мерой Хаара μ естественным выбором функции распределения расстояний является

$$\sigma(r) = \exp\left(-\left(\frac{p}{r}\right)^\alpha\right), \quad \alpha > 0. \quad (1.9)$$

¹Для сравнения упомянем, что аналогичный усредняющий оператор в $\mathbb{R}^n$ также ограничен и самосопряжен, но имеет непустую отрицательную часть спектра. В частности, он не является ортопроектором.

В этом случае соответствующее ядро теплопроводности допускает оценку

$$p_t(x, y) \simeq \frac{t}{(t^{1/\alpha} + \|x - y\|_p)^{1+\alpha}} \quad (1.10)$$

для всех $t > 0$ и $x, y \in \mathbb{Q}_p$. Заметим, что оценка (1.10) напоминает оценку ядра теплопроводности для симметричного α -устойчивого процесса в $\mathbb{R}$.

Также получены явное выражение для функции Грина изотропной полугруппы и критерий невозвратности в терминах роста объема. В отличие от ранее известных критериев невозвратности (ср. с [40]) наш критерий не предполагает никакой групповой структуры.

В разделе 3 рассматриваются спектральные свойства *изотропного лапласиана* $\mathcal{L}$, который по определению является (положительно определенным) генератором изотропной полугруппы, т.е. $P^t = e^{-t\mathcal{L}}$. Дается полное описание спектра $\mathcal{L}$, в частности, показывается, что спектр является чисто точечным. Приводится также явная форма всех собственных функций оператора $\mathcal{L}$ и показывается, что спектры его продолжений в пространствах L^p , $1 \leq p < \infty$, не зависят от p .

Необычным свойством изотропного лапласиана $\mathcal{L}$ является то, что для любой возрастающей биекции $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ оператор $\psi(\mathcal{L})$ также является изотропным лапласианом (для другой функции распределения расстояний). В частности, $\mathcal{L}^\alpha$ – изотропный лапласиан для любого $\alpha > 0$. Напомним для сравнения, что для произвольного симметричного марковского генератора $\mathcal{L}$ оператор $\mathcal{L}^\alpha$ порождает марковскую полугруппу только при $0 < \alpha \leq 1$.

В разделе 4 получены двусторонние оценки моментов изотропного процесса $\{\mathcal{X}_t\}$.

В случае, когда X – локально компактная группа, наши результаты применимы с произвольной мерой Радона μ вместо меры Хаара. Некоторые из вышеупомянутых вопросов, например оценки ядра теплопроводности и функции Грина, особенно чувствительны к выбору меры μ . С другой стороны, спектр лапласиана и оценки моментов не зависят от μ . Эти величины сильно зависят от выбора ультраметрики d , в то время как собственные функции зависят и от d , и от μ .

В разделе 5 мы сравниваем наш изотропный лапласиан с другими ранее известными “дифференциальными” операторами в $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_p^n$. Понятие оператора дробной производной $\mathfrak{D}^\alpha$ на функциях, определенных на $\mathbb{Q}_p$, было введено В. С. Владимировым [57] с помощью преобразования Фурье в $\mathbb{Q}_p$. Оператор $\mathfrak{D}^\alpha$ совпадает с оператором Тайблесона [55], введенным в совершенно ином контексте как множитель Рисса на $\mathbb{Q}_p^n$. Мы показываем, что $\mathfrak{D}^\alpha$ совпадает с нашим изотропным лапласианом $\mathcal{L}_\alpha$, связанным с функцией распределения расстояний (1.9). В частности, отсюда следует, что ядро теплопроводности оператора $\mathfrak{D}^\alpha$ удовлетворяет оценке (1.10). Заметим, что ранее была известна только верхняя оценка для ядра теплопроводности оператора $\mathfrak{D}^\alpha$ (ср. с [39; гл. 4.1, лемма 4.1]). Мы также даем простое доказательство ранее известной явной формулы для функции Грина оператора $\mathfrak{D}^\alpha$.

Используя функциональное исчисление оператора $\mathfrak{D}^1$, мы даем полное описание класса всех инвариантных относительно вращений марковских генерато-

ров на $\mathbb{Q}_p$. Этот класс включает изотропные лапласианы, но не исчерпывается ими. Как следствие, мы получаем, что класс всех инвариантных относительно вращений марковских процессов в $\mathbb{Q}_p$ совпадает с классом марковских процессов, построенным С. Альбеверии и В. Карвовски [2] путем использования гораздо более сложных технических средств.

Далее мы рассматриваем операторы “частных производных” на $\mathbb{Q}_p^n$. p -адический лапласиан Владимирова на $\mathbb{Q}_p^n$ определяется как прямая сумма операторов $\mathfrak{D}^\alpha$, действующих раздельно по каждой координате. Хотя этот оператор не является изотропным лапласианом, его можно изучать в рамках нашей теории, что дает простые прямые доказательства многих результатов из [59], не использующие анализа Фурье и теории распределений Брюа.

Еще одно многомерное обобщение оператора $\mathfrak{D}^\alpha$ – это оператор Тайблессона $\mathfrak{T}^\alpha$ в $\mathbb{Q}_p^n$, который определяется с помощью преобразования Фурье в $\mathbb{Q}_p^n$. Мы показываем, что оператор $\mathfrak{T}^\alpha$ является изотропным лапласианом, что позволяет получить точные аналитические результаты.

В разделе 6 мы используем тот факт, что каждое локально компактное ультраметрическое пространство возникает как граница локально конечного дерева. С помощью этого факта мы связываем случайные блуждания² на дереве с изотропными процессами на его границе. Дж. Кигами в [36] начинает с невозвратного простого случайного блуждания на дереве и строит естественно связанный с ним процесс со скачками на границе дерева: имея форму Дирихле случайного блуждания на дереве, процесс на границе индуцирован формой Дирихле, которая воспроизводит энергию гармонической функции на дереве через ее граничные значения. Этот подход аналогичен известному интегралу Дугласа [21] в единичном диске. Используя его, Дж. Кигами [36] предпринимает подробный анализ процесса на границе.

Рассматривая сначала компактный случай, мы отвечаем в разделе 7 на очевидный вопрос о том, как связан подход Дж. Кигами с нашим подходом. Связь в основном взаимно однозначна: каждый граничный процесс, индуцированный случайным блужданием, является изотропным процессом в нашем понимании. Обратно, мы показываем, что с точностью до единственной линейной замены времени каждый изотропный процесс на границе дерева возникает из однозначно определенного случайного блуждания как в [36]. Дополнительно мы объясняем, как граничный процесс на дереве преобразуется в изотропный процесс на некомпактном ультраметрическом пространстве, заданном проколотой границей дерева. Это следует сравнить с [37].

Наконец, в разделе 8 мы явно строим случайные блуждания на деревьях, которые соответствуют операторам p -адической дробной производной на (компактной) группе $\mathbb{Z}_p$ p -адических целых чисел и на всем $\mathbb{Q}_p$.

Авторы благодарят С. Альбеверии, Дж. Беллиссарда, П. Диакониса, В. Херфорта, А. Н. Кочубея, С. А. Молчанова, Л. Салофф-Коста, И. В. Воловича и Е. И. Зеленова за плодотворные обсуждения и ценные замечания.

²Простые случайные блуждания с дискретным временем на дереве очень хорошо изучены – см. главу 9 в книге В. Вёсса [63].

2. Изотропная полугруппа и ядро теплопроводности

Повсюду в этой работе (X, d) – ультраметрическое пространство, которое предполагается сепарабельным и таким, что все замкнутые d -шары $B_r(x)$ компактны.

2.1. Усредняющий оператор. Напомним, что для любого $r > 0$ оператор

$$Q_r f(x) = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f d\mu$$

является ортопроектором в $L^2 \equiv L^2(X, \mu)$ (ср. с (1.3)) и образ оператора Q_r является подпространством $\mathcal{V}_r$ пространства L^2 , состоящим из всех функций, принимающих постоянные значения на каждом шаре радиуса r .

Ясно, что семейство $\{\mathcal{V}_r\}_{r>0}$ монотонно убывает относительно включений множеств. Следовательно, существует предел

$$Q_\infty := s\text{-}\lim_{r \rightarrow \infty} Q_r$$

в сильной операторной топологии, который является ортопроектором на $\mathcal{V}_\infty = \bigcap_{r>0} \mathcal{V}_r$. Значит, $\mathcal{V}_\infty$ состоит из постоянных функций. Если $\mu(X) = \infty$, то $\mathcal{V}_\infty = \{0\}$ и $Q_\infty = 0$, в то время как в случае $\mu(X) < \infty$ имеем $\dim \mathcal{V}_\infty = 1$ и

$$Q_\infty f = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu. \quad (2.1)$$

Положим также $Q_0 := \text{id}$.

ЛЕММА 2.1. Семейство $\{Q_r\}_{r \in [0, \infty)}$ ортопроекторов сильно непрерывно справа по r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $r \mapsto Q_r$ сильно непрерывно в $r = 0$, т. е.

$$s\text{-}\lim_{s \rightarrow 0+} Q_s = \text{id}. \quad (2.2)$$

Пусть f – непрерывная функция на X с компактным носителем. Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$Q_s f(x) \rightarrow f(x) \quad \text{при } s \rightarrow 0.$$

Поскольку семейство $\{Q_s f\}_{s \in (0, 1)}$ равномерно ограничено величиной $\sup |f|$ и имеет равномерно компактные носители, по теореме о мажорируемой сходимости следует, что

$$\|Q_s f - f\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Поскольку пространство непрерывных функций с компактным носителем всюду плотно в L^2 , соотношение (2.3) распространяется на все $f \in L^2$, откуда следует (2.2).

Далее, докажем, что $r \mapsto Q_r$ сильно непрерывно справа при любом $r > 0$, т. е.

$$s\text{-}\lim_{s \rightarrow r+} Q_s = Q_r. \quad (2.4)$$

Достаточно показать, что

$$\|Q_s f - Q_r f\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow r+ \quad (2.5)$$

для любой непрерывной функции f с компактным носителем. Действительно, для любого $x \in X$ функция $r \mapsto Q_r f(x)$ непрерывна справа в силу (1.3) (так как шары замкнуты), откуда (2.5) следует по теореме о мажорируемой сходимости. Лемма доказана.

Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ положим

$$E_\lambda = \begin{cases} Q_{1/\lambda}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda \leq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Заметим, что $E_{0+} = Q_\infty$. Из вышеупомянутых свойств оператора Q_r следует, что семейство $\{E_\lambda\}$ ортопроекторов в L^2 является непрерывным слева разложением единицы. Следовательно, для любой борелевской функции $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ интеграл

$$\int_{[0, \infty)} \varphi(\lambda) dE_\lambda$$

определяет самосопряженный неотрицательно определенный оператор, который ограничен тогда и только тогда, когда φ ограничена.

2.2. Основные свойства изотропных полугрупп. Теперь рассмотрим оператор P , определенный равенством (1.6) с функцией σ , удовлетворяющей условиям (1.5). Заметим, что интеграл в (1.6) сходится в сильной операторной топологии, так как

$$\int_0^\infty \|Q_r f\|_{L^2} d\sigma(r) < \infty$$

для любой функции $f \in L^2$. С другой стороны, для любой $f \in \mathcal{B}_b(X)$ интеграл (1.6) сходится поточечно. Более того, в этом случае функция Pf непрерывна, потому что функция

$$x \mapsto \int_\varepsilon^\infty Q_r f(x) d\sigma(r)$$

для любого $\varepsilon > 0$ локально постоянна и, значит, она непрерывна и равномерно сходится к $Pf(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Как уже было отмечено, P – самосопряженный оператор в L^2 и $\text{sp} P \subset [0, 1]$. В частности, для любого $t > 0$ корректно определена степень P^t . Положим также $P^0 := \text{id}$. В следующем утверждении собраны основные свойства оператора P^t .

ТЕОРЕМА 2.2. (а) Семейство $\{P^t\}_{t \geq 0}$ является сильно непрерывной симметричной марковской полугруппой на $L^2(X, \mu)$.

(б) Для любого $t > 0$ оператор P^t имеет представление (1.8), т. е.

$$P^t f = \int_{[0, \infty)} Q_r f d\sigma^t(r).$$

(с) Для любого $t > 0$ оператор P^t допускает интегральное ядро $p(t, x, y)$, т. е. для всех $f \in \mathcal{B}_b$ и $f \in L^2$

$$P^t f(x) = \int_X p(t, x, y) f(y) d\mu(y), \quad (2.7)$$

где $p(t, x, y)$ задается равенством

$$p(t, x, y) = \int_{[d(x, y), \infty)} \frac{d\sigma^t(r)}{\mu(B_r(x))}. \quad (2.8)$$

Функция $p(t, x, y)$ называется *ядром теплопроводности* полугруппы $\{P^t\}$. Из (2.8) ясно, что $p(t, x, y) < \infty$ для всех $t > 0$ и $x \neq y$, в то время как при определенных условиях $p(t, x, x)$ может быть равно ∞ .

Для $f \in \mathcal{B}_b$ тождество (2.7) выполняется поточечно, т. е. для всех $x \in X$, в то время как для $f \in L^2$ оно является тождеством двух L^2 -функций, т. е. выполняется для μ -почти всех x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрирование по частям в (1.6) дает

$$Pf = \int_{[0, \infty)} Q_r f d\sigma(r) = Q_\infty f - \int_{(0, \infty)} \sigma(r) dQ_r f \quad (2.9)$$

для любой $f \in L^2$. Делая замену $\lambda = 1/r$ и используя (2.6), получаем

$$Pf = E_{0+} f + \int_{(0, \infty)} \sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right) dE_\lambda f = \int_{[0, \infty)} \sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right) dE_\lambda f,$$

где мы полагаем $\sigma(\infty) = 1$. Отсюда получаем спектральное разложение оператора P в следующем виде:

$$P = \int_{[0, \infty)} \sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right) dE_\lambda. \quad (2.10)$$

Следовательно,

$$P^t = \int_{[0, \infty)} \sigma^t\left(\frac{1}{\lambda}\right) dE_\lambda. \quad (2.11)$$

(а) Полугрупповое тождество $P^t P^s = P^{t+s}$ является непосредственным следствием (2.11) и функционального исчисления. Условие строгой непрерывности

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0+} P^t = \text{id}$$

также следует из (2.11), поскольку $\sigma(1/\lambda) > 0$ при $\lambda \in [0, \infty)$ и, тем самым, $\sigma^t(1/\lambda) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0+$.

(б) Обращая рассуждение в выводе (2.11) из (2.9), получаем, что (2.11) влечет

$$P^t f = \int_{[0, \infty)} Q_r f d\sigma^t(r).$$

(с) Из (b), (1.3) и теоремы Фубини следует, что для любой $f \in \mathcal{B}_b$

$$\begin{aligned} P^t f(x) &= \int_{[0, \infty)} \left(\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_X \mathbf{1}_{B_r(x)}(y) f(y) d\mu(y) \right) d\sigma^t(r) \\ &= \int_X \left(\int_{[d(x, y), \infty)} \frac{1}{\mu(B_r(x))} d\sigma^t(r) \right) f(y) d\mu(y) \\ &= \int_X p(t, x, y) f(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Для $f \in L^2$ утверждение доказывается посредством стандартной аппроксимации.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В доказательстве теоремы 2.2 мы не использовали в полную силу тот факт, что σ является *строго* монотонно возрастающей функцией (ср. с (1.5)). Для этой теоремы достаточно предполагать, что σ монотонно возрастает и $\sigma(r) > 0$ при $r > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если взять (1.8) в качестве определения оператора P^t , то полугрупповое тождество $P^t P^s = P^{t+s}$ можно доказать с помощью (1.7). Действительно, для любых заданных $s, t > 0$ и $f \in L^2$ имеем

$$\begin{aligned} P^s P^t f(x) &= \int_0^\infty d\sigma^s(r) \int_0^\infty d\sigma^t(r') Q_r Q_{r'} f(x) \\ &= \int_0^\infty d\sigma^s(r) \int_0^\infty d\sigma^t(r') Q_{\max\{r, r'\}} f(x). \end{aligned}$$

Пусть ξ_1 и ξ_2 – две независимые случайные величины с распределениями σ^s и σ^t соответственно. Тогда распределением случайной величины $\xi = \max\{\xi_1, \xi_2\}$ является σ^{t+s} . Следовательно,

$$P^s P^t f(x) = \mathbb{E}(Q_{\max\{\xi_1, \xi_2\}} f(x)) = \int_0^\infty Q_r f(x) d\sigma^{t+s}(r) = P^{t+s} f(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Для всех $x, y \in X$ и $t > 0$ имеем $p(t, x, y) > 0$,

$$p(t, x, y) = p(t, y, x)$$

и

$$p(t, x, y) \leq \min\{p(t, x, x), p(t, y, y)\}. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительность $p(t, x, y)$ следует из (2.8) и строгой монотонности σ .

В интеграле (2.8) имеем $r \geq d(x, y)$, откуда следует, что $B_r(x) = B_r(y)$ и $p(t, x, y) = p(t, y, x)$. Симметрия ядра теплопроводности также следует из того, что P^t самосопряжен.

В силу (2.8) имеем

$$p(t, x, y) = \int_{[d(x, y), \infty)} \frac{d\sigma^t(r)}{\mu(B_r(x))} \leq \int_{[0, \infty)} \frac{d\sigma^t(r)}{\mu(B_r(x))} = p(t, x, x),$$

откуда следует (2.12). Следствие доказано.

Заметим, что в общем случае ядро теплопроводности удовлетворяет лишь оценке

$$p(t, x, y) \leq \sqrt{p(t, x, x)p(t, y, y)}.$$

Оценка (2.12), очевидно, сильнее, что отражает особое свойство ультраметрики.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Для любого $t > 0$ функция

$$x, y \mapsto \begin{cases} \frac{1}{p(t, x, y)}, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \quad (2.13)$$

является ультраметрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$F(x, r) = \left(\int_{[r, +\infty)} \frac{d\sigma^t(s)}{\mu(B_s(x))} \right)^{-1} \quad \text{при } r > 0,$$

$F(x, 0) = 0$ и отметим следующие два свойства функции F :

(а) $r \mapsto F(x, r)$ монотонно возрастает по r ;

(б) $F(x, r) = F(y, r)$ при условии $r \geq d(x, y)$, так как в этом случае $B_s(x) = B_s(y)$ для всех $s \geq r$.

Для любой функции F с этими свойствами $\rho(x, y) := F(x, d(x, y))$ является ультраметрикой, так как симметрия следует из (б), а ультраметрическое неравенство (1.1) следует из (а) и (б): если $d(x, y) \leq d(x, z)$, то

$$\rho(x, y) = F(x, d(x, y)) \leq F(x, d(x, z)) = \rho(x, z),$$

а если $d(x, y) \leq d(y, z)$, то

$$\rho(x, y) = F(y, d(x, y)) \leq F(y, d(y, z)) = \rho(y, z).$$

Следствие доказано.

2.3. Спектральная функция. Для марковской полугруппы P , связанной с тройкой (d, μ, σ) , определим внутреннюю ультраметрику d_* равенством

$$\frac{1}{d_*(x, y)} = \log \frac{1}{\sigma(d(x, y))}. \quad (2.14)$$

Поскольку d_* выражается в виде строго монотонно возрастающей функции от d , обращающейся в нуль в нуле, получаем, что d_* является ультраметрикой на X . Обозначим через $B_r^*(x)$ метрические шары, определенные ультраметрикой d_* .

ЛЕММА 2.7. Для любого $r \geq 0$ положим

$$s = \frac{1}{\log(1/\sigma(r))}.$$

Тогда следующее тождество выполняется для всех $x \in X$:

$$B_s^*(x) = B_r(x).$$

Следовательно, метрики d и d_* определяют одно и то же множество шаров и одну и ту же топологию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} B_s^*(x) &= \{y \in X : d_*(x, y) \leq s\} \\ &= \{y \in X : \sigma(d(x, y)) \leq \sigma(r)\} \\ &= \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \\ &= B_r(x), \end{aligned}$$

где мы использовали тот факт, что σ строго монотонно возрастает. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Для любого $x \in X$ определим *спектральную функцию* $N(x, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ формулой

$$N(x, \tau) = \frac{1}{\mu(B_{1/\tau}^*(x))} \quad (2.15)$$

(см. рис. 1, 2 и 3).

Определим $\sigma_*(r)$ как функцию распределения “обратного экспоненциального распределения”, т. е. положим

$$\sigma_*(r) = \exp\left(-\frac{1}{r}\right), \quad r > 0. \quad (2.16)$$

Как функция распределения расстояний, в дальнейшем σ_* будет играть важную роль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Изотропный марковский оператор P , связанный с тройкой (d, μ, σ_*) , будем называть *стандартным* марковским оператором, связанным с (d, μ) .

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть d_* и σ_* определены равенствами (2.14) и (2.16).

(а) Тройки (d, μ, σ) и (d_*, μ, σ_*) индуцируют одинаковые изотропные марковские операторы.

(б) Ядро теплопроводности $p(t, x, y)$, связанное с тройкой (d, μ, σ) , для всех $x, y \in X$ и $t > 0$ удовлетворяет следующим тождествам:

$$p(t, x, y) = \int_0^{t/d_*(x, y)} N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds \quad (2.17)$$

и

$$p(t, x, y) = t \int_0^{1/d_*(x, y)} N(x, \tau) \exp(-\tau t) d\tau. \quad (2.18)$$

Следовательно, $p(t, x, y)$ – конечная непрерывная функция от t, x, y для всех $t > 0$ и $x \neq y$.

Как следует из (а), любой изотропный марковский оператор является в то же время стандартным марковским оператором, связанным с (d_*, μ) .

Рис. 1. График функции $\tau \mapsto N(x, \tau)$ в случае, когда $\mu(X) < \infty$

Рис. 2. График функции $\tau \mapsto N(x, \tau)$ в случае, когда $\mu(x) > 0$

Рис. 3. График функции $\tau \mapsto N(x, \tau)$ в случае, когда $\mu(x) = 0$ и $\mu(X) = \infty$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Достаточно показать, что

$$p(t, x, y) = \int_{[d_*(x, y), \infty)} \frac{d\sigma_*^t(u)}{\mu(B_u^*(x))}, \quad (2.19)$$

где по теореме 2.2 правая часть представляет собой ядро теплопроводности, связанное с тройкой (d_*, μ, σ_*) . Рассмотрим функцию

$$u(r) = \frac{1}{\log(1/\sigma(r))}, \quad r \in [0, \infty),$$

и заметим, что

- 1) $u(d(x, y)) = d_*(x, y)$, $u(\infty) = \infty$;
- 2) $\sigma_*(u(r)) = \exp(-1/u(r)) = \sigma(r)$;
- 3) $B_{u(r)}^*(x) = B_r(x)$ в силу леммы 2.7.

Делая замену $u = u(r)$ в интеграле правой части (2.19), получаем

$$\int_{[d_*(x, y), \infty)} \frac{d\sigma_*^t(u)}{\mu(B_u^*(x))} = \int_{[d(x, y), \infty)} \frac{d\sigma^t(r)}{\mu(B_r(x))},$$

что вместе с (2.8) влечет (2.19). Ясно, что (2.18) следует из (2.17), так как $d_*(x, x) = 0$.

(b) Замена $s = t/u$ в (2.19) дает

$$\begin{aligned} p(t, x, y) &= \int_{[d_*(x, y), \infty)} \frac{d \exp(-t/u)}{\mu(B_u^*(x))} \\ &= \int_{t/d_*(x, y)}^0 \frac{de^{-s}}{\mu(B_{t/s}^*(x))} \\ &= \int_0^{t/d_*(x, y)} N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds, \end{aligned}$$

что доказывает (2.17). Еще одна замена $s = t\tau$ преобразует (2.17) в (2.18).

Теорема доказана.

В случае $x = y$ из (2.17) и (2.18) получаем

$$p(t, x, x) = \int_0^\infty N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds = t \int_0^\infty N(x, \tau) \exp(-\tau t) d\tau. \quad (2.20)$$

В зависимости от функции $N(x, \tau)$ диагональное значение $p(t, x, x)$ может быть равно ∞ . Для любого $x \in X$ положим

$$T(x) := \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\log N(x, \tau)}{\tau}. \quad (2.21)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.11. Функция $t \mapsto p(t, x, x)$ монотонно убывает, и для всех $t > T(x)$ выполнено неравенство $p(t, x, x) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Монотонность функции $p(t, x, x)$ следует из первого тождества в (2.20), в то время как второе утверждение следует из второго тождества в (2.20). Заметим также, что если предел $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\log N(x, \tau)}{\tau}$ существует и потому равен $T(x)$, то $p(t, x, x) = \infty$ при $t < T(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. *Предположим, что $T(x) < \infty$ для некоторого $x \in X$.*

(а) *Для всех $y \in X$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t, x, y) = \frac{1}{\mu(X)},$$

где сходимость локально равномерна по $y \in X$.

(б) *Для всех $y \in X$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t, x, y)}{p(t, x, x)} = 1,$$

где сходимость локально равномерна по $y \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) При $t \rightarrow \infty$ имеем

$$N\left(x, \frac{s}{t}\right) \rightarrow N(x, 0) = \frac{1}{\mu(X)}$$

и $t/d_*(x, y) \rightarrow \infty$. Отсюда и из (2.17) получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t, x, y) = \int_0^\infty \frac{1}{\mu(X)} e^{-s} ds = \frac{1}{\mu(X)},$$

как только покажем, что интеграл и предел перестановочны. Последнее следует из теоремы о мажорируемой сходимости. Действительно, условие $T(x) < \infty$ влечет, что для некоторых $A, a > 0$ и всех $\tau > 0$

$$N(x, \tau) \leq A \exp(a\tau), \quad (2.22)$$

откуда

$$N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} \leq A \exp\left(\left(\frac{a}{t} - 1\right)s\right) \leq A \exp\left(-\frac{1}{2}s\right) \quad (2.23)$$

при $t > 2a$, так что условие мажорирования выполнено.

(б) Положим $r = d_*(x, y)$. Из (2.17) и (2.20) следует, что

$$p(t, x, x) - p(t, x, y) = \int_{t/r}^\infty N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds.$$

Считая, что $t > 2a$, и применяя (2.23), получаем

$$p(t, x, x) - p(t, x, y) \leq A \int_{t/r}^\infty e^{-s/2} ds = 2A \exp\left(-\frac{t}{2r}\right),$$

в то время как

$$p(t, x, x) \geq \int_{t/(4r)}^\infty N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds \geq N\left(x, \frac{1}{4r}\right) \exp\left(-\frac{t}{4r}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{p(t, x, x) - p(t, x, y)}{p(t, x, x)} \leq \frac{2A \exp(-t/(4r))}{N(x, 1/(4r))} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Предложение доказано.

2.4. Оценки ядра теплопроводности. Целью этого пункта является получение некоторых оценок изотропного ядра теплопроводности. Напомним, что по теореме 2.10

$$p(t, x, y) = \int_0^{t/d_*(x, y)} N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds. \quad (2.24)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Будем говорить, что монотонно возрастающая функция $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяют *свойству удвоения*, если существует такая постоянная $D > 0$, что

$$\Phi(2s) \leq D\Phi(s) \quad \text{для всех } s > 0.$$

Известно (теорема Поттера), что если Φ удовлетворяет свойству удвоения, то имеет место неравенство

$$\Phi(s_2) \leq D \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^\gamma \Phi(s_1) \quad \text{для всех } 0 < s_1 < s_2, \quad \text{где } \gamma = \log_2 D. \quad (2.25)$$

ТЕОРЕМА 2.14. *Предположим, что для некоторого $x \in X$ функция $\tau \mapsto N(x, \tau)$ удовлетворяет свойству удвоения. Тогда*

$$\begin{aligned} \frac{ct}{t + d_*(x, y)} N\left(x, \frac{1}{t + d_*(x, y)}\right) \\ \leq p(t, x, y) \leq \frac{Ct}{t + d_*(x, y)} N\left(x, \frac{1}{t + d_*(x, y)}\right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

для всех $t > 0$, $y \in X$ и некоторых постоянных $C, c > 0$, зависящих от постоянной удвоения.

В дальнейшем мы будем использовать отношение $f \simeq g$ между двумя положительными функциями f, g , которое означает, что дробь f/g ограничена сверху и снизу положительными постоянными для указанной области значений переменных. В частности, мы можем коротко записать (2.26) в виде

$$p(t, x, y) \simeq \frac{t}{t + d_*(x, y)} N\left(x, \frac{1}{t + d_*(x, y)}\right) \quad (2.27)$$

для фиксированного x и всех $y \in X$ и $t > 0$.

ПРИМЕР 2.15. Предположим, что для некоторых $x \in X$ и $\alpha > 0$

$$N(x, \tau) \simeq \tau^\alpha \quad \text{для всех } \tau > 0.$$

Тогда в силу (2.27) имеем

$$p(t, x, y) \simeq \frac{t}{(t + d_*(x, y))^{1+\alpha}} \simeq \frac{t}{(t^2 + d_*(x, y)^2)^{(1+\alpha)/2}},$$

т. е. $p(t, x, y)$ ведет себя как распределение Коши в “ α -мерном” пространстве.

ПРИМЕР 2.16. Более общо, предположим, что для некоторых $\alpha, \beta \geq 0$

$$N(x, \tau) \simeq \begin{cases} \tau^\alpha, & 0 < \tau \leq 1, \\ \tau^\beta, & \tau > 1. \end{cases} \quad (2.28)$$

Тогда в силу (2.27) получаем

$$p(t, x, y) \simeq \begin{cases} \frac{t}{(t + d_*(x, y))^{1+\beta}}, & t + d_*(x, y) \leq 1, \\ \frac{t}{(t + d_*(x, y))^{1+\alpha}}, & t + d_*(x, y) > 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Например, пусть X – дискретная локально конечная группа, например, $X = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}(n_k)$, а μ – мера Хаара, нормированная условием $\mu(x) = 1$. С дискретной ультратметрикой получаем в силу (2.15), что $N(x, \tau) \simeq 1$ для достаточно больших τ . Дополнительно предполагая, что

$$N(x, \tau) \simeq \tau^\alpha \quad \text{для малых } \tau,$$

видим, что (2.28), а потому и (2.29) выполняются с $\beta = 0$ (ср. с [13]).

ПРИМЕР 2.17. Предположим, что функция $\tau \mapsto N(x, \tau)$ удовлетворяет свойству удвоения и для некоторого $\alpha > 0$

$$N(x, \tau) \simeq \left(\log \frac{1}{\tau} \right)^{-\alpha} \quad \text{при } \tau < \frac{1}{2}.$$

Тогда в силу (2.27) имеем

$$p(t, x, y) \simeq \frac{t}{(t + d_*(x, y)) \log^\alpha(t + d_*(x, y))},$$

как только $t + d_*(x, y) > 2$.

ПРИМЕР 2.18. Предположим, что для некоторого $\alpha > 0$

$$N(x, \tau) \simeq \exp(-\tau^{-\alpha}).$$

В этом случае теорема 2.14 не применима. Непосредственная оценка интеграла в (2.24) дает в этом случае

$$p(t, x, y) \leq \frac{C_3 t}{t + d_*(x, y)} \exp(-c_3(t^{\alpha/(\alpha+1)} + d_*(x, y)^\alpha))$$

и

$$p(t, x, y) \geq \frac{C_4 t}{t + d_*(x, y)} \exp(-c_4(t^{\alpha/(\alpha+1)} + d_*(x, y)^\alpha))$$

для всех $x, y \in X$, $t > 0$ и некоторых положительных постоянных C_3, C_4, c_3, c_4 .

Для доказательства теоремы 2.14 мы используем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2.19. Для всех $x, y \in X$ и $t > 0$ выполняются следующие оценки:

$$(a) \quad p(t, x, y) \leq \frac{t}{d_*(x, y)} N\left(x, \frac{1}{d_*(x, y)}\right); \quad (2.30)$$

$$(b) \quad p(t, x, y) \geq \frac{1}{2e} \begin{cases} \frac{t}{d_*(x, y)} N\left(x, \frac{1}{2d_*(x, y)}\right), & t \leq d_*(x, y), \\ N\left(x, \frac{1}{2t}\right), & t \geq d_*(x, y); \end{cases} \quad (2.31)$$

$$(c) \quad p(t, x, x) \geq \frac{1}{e} N\left(x, \frac{1}{t}\right). \quad (2.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Неравенство (2.30) следует из (2.24) в силу монотонности функции $\tau \mapsto N(x, \tau)$, которая дает

$$N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} \leq N\left(x, \frac{1}{d_*(x, y)}\right).$$

(b) Положим $a = \min\left(1, \frac{t}{d_*(x, y)}\right)$. Из (2.24) следует, что

$$p(t, x, y) \geq \int_{a/2}^a N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds \geq N\left(x, \frac{a}{2t}\right) \frac{a}{2e},$$

что равносильно (2.31).

(c) В силу (2.20) имеем

$$p(t, x, x) \geq \int_1^\infty N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds \geq N\left(x, \frac{1}{t}\right) \int_1^\infty e^{-s} ds,$$

откуда следует (2.32).

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.20. Следующие неравенства выполняются для всех $x, y \in X$ и $t > 0$:

$$p(t, x, y) \geq \frac{1}{2e} \frac{t}{t + d_*(x, y)} N\left(x, \frac{1}{2(t + d_*(x, y))}\right) \quad (2.33)$$

и

$$p(t, x, y) \leq 2e \frac{t}{t + d_*(x, y)} p\left(\frac{t + d_*(x, y)}{2}, x, x\right). \quad (2.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижняя оценка (2.33) сразу следует из (2.31). Чтобы доказать (2.34), заметим, что в силу (2.30) и (2.32) выполняется неравенство

$$p(t, x, y) \leq e^{\frac{t}{d_*(x, y)}} p(d_*(x, y), x, x),$$

что дает (2.34) в случае $t \leq d_*(x, y)$, так как функция $p(\cdot, x, x)$ монотонно убывает. В случае $t > d_*(x, y)$ неравенство (2.34) тривиально следует из (2.12), т. е. из

$$p(t, x, y) \leq p(t, x, x),$$

снова с использованием монотонности $p(\cdot, x, x)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.21. Для любого заданного $x \in X$ следующие два свойства равносильны:

(i) для некоторой постоянной C и всех $t > 0$

$$p(t, x, x) \leq CN\left(x, \frac{1}{t}\right); \quad (2.35)$$

(ii) функция $\tau \mapsto N(x, \tau)$ удовлетворяет свойству удвоения, т. е. для некоторой постоянной D

$$N(x, 2\tau) \leq DN(x, \tau).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) $\Rightarrow$ (i). Оценка (2.35) вытекает из (2.20) и (2.25) следующим образом:

$$\begin{aligned} p(t, x, x) &= N\left(x, \frac{1}{t}\right) \int_0^\infty \frac{N(x, s/t)}{N(x, 1/t)} e^{-s} ds \\ &\leq DN\left(x, \frac{1}{t}\right) \int_0^\infty \max\{1, s^\gamma\} e^{-s} ds \\ &= CN\left(x, \frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Из верхней оценки (2.35) следует, что для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} CN\left(x, \frac{1}{t}\right) &\geq p(t, x, x) \geq \int_2^\infty N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds \\ &\geq e^{-2} N\left(x, \frac{2}{t}\right), \end{aligned}$$

откуда вытекает свойство удвоения функции $N(x, \cdot)$.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.14. Нижняя оценка в (2.26) следует из (2.33), верхняя оценка следует из (2.34) и (2.35). Теорема доказана.

В заключение этого пункта приведем достаточные условия для справедливости свойства удвоения функции $N(x, \cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.22. Будем говорить, что монотонно возрастающая функция $\Psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяют *обратному свойству удвоения*, если имеется такая постоянная $\delta \in (0, 1)$, что для всех $r > 0$ выполнено неравенство

$$\Psi(r) \geq 2\Psi(\delta r).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.23. *Зафиксируем некоторое $x \in X$. Функция $\tau \mapsto N(x, \tau)$ удовлетворяет свойству удвоения, если выполняются следующие два условия:*

(i) *функция $\Psi(r) = -1/\log \sigma(r)$ удовлетворяет обратному свойству удвоения;*

(ii) *функция объема $r \mapsto \mu(B_r(x))$ удовлетворяет свойству удвоения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем следующие сокращенные обозначения для шаров с центром в x : $B_r = B_r(x)$ и $B_r^* = B_r^*(x)$. Из определения 2.8 спектральной функции следует, что функция $\tau \mapsto N(x, \tau)$ удовлетворяет свойству удвоения тогда и только тогда, когда функция $s \mapsto \mu(B_s^*)$ удовлетворяет этому свойству. Положим $\Phi = \Psi^{-1}$ и заметим, что обратное свойство удвоения для Ψ равносильно свойству удвоения для Φ . В силу леммы 2.7 имеем $B_{\Psi(r)}^* = B_r$, откуда следует, что $B_s^* = B_{\Phi(s)}$. Используя условия (ii) и (2.25) для функции $\mu(B_r)$, получаем

$$\mu(B_{2s}^*) = \mu(B_{\Phi(2s)}) \leq D \left(\frac{\Phi(2s)}{\Phi(s)} \right)^\gamma \mu(B_{\Phi(s)}) \leq \text{const } \mu(B_s^*),$$

что и требовалось доказать.

2.5. Тепловые ядра в $\mathbb{Q}_p$. Пусть p – простое число, тогда p -адическая норма на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ определяется так: если $x = p^n a/b$, где a, b – целые числа, не делящиеся на p , то

$$\|x\|_p := p^{-n}.$$

Если $x = 0$, то $\|x\|_p := 0$. Для p -адической нормы на $\mathbb{Q}$ имеет место ультраметрическое неравенство. Действительно, если $y = p^m c/d$ и $m \leq n$, то

$$x + y = p^m \left(\frac{p^{n-m} a}{b} + \frac{c}{d} \right),$$

откуда

$$\|x + y\|_p \leq p^{-m} = \max\{\|x\|_p, \|y\|_p\}.$$

Отсюда следует, что $\mathbb{Q}$ с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|_p$ является ультраметрическим пространством, и таковым же является его пополнение $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел.

Каждое p -адическое число x имеет представление

$$x = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k p^k = \dots a_k \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-N}, \quad (2.36)$$

где $N \in \mathbb{N}$, а $a_k \in \{0, \dots, p-1\}$ – p -адические цифры. Рациональное число $0.a_{-1} \dots a_{-N} = \sum_{k=-N}^{-1} a_k p^k$ называется дробной частью x , а остальное, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$, – целой частью x .

Для любого $n \in \mathbb{Z}$ определим d -шар $B_{p^{-n}}(x)$: он состоит из всех таких чисел

$$y = \sum_{k=-N}^{\infty} b_k p^k = \dots b_k \dots b_2 b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \dots b_{-N},$$

что b_k произвольны при $k \geq n$ и $b_k = a_k$ при $k < n$. Следовательно, $B_{p^{-n}}(x)$ разлагается в объединение p непересекающихся шаров радиусов $p^{-(n+1)}$, зависящих от выбора b_n .

Например, $B_1(0)$ совпадает с множеством $\mathbb{Z}_p$ всех целых p -адических чисел, т. е. любое $y \in B_1(0)$ имеет вид

$$y = \dots b_k \dots b_2 b_1 b_0$$

с произвольными p -адическими цифрами b_k . Для любого фиксированного $c \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ дополнительное ограничение $b_0 = c$ определяет шар радиуса $1/p$ с центром в c , так что $B_{1/p}(c)$ является объединением p таких непересекающихся шаров, как на следующей диаграмме, где каждая клетка изображает один из шаров $B_{1/p}(c)$:

$\dots b_k \dots b_2 b_1 0$	$\dots b_k \dots b_2 b_1 1$	$\dots$	$\dots b_k \dots b_2 b_1 (p-1)$
-----------------------------	-----------------------------	---------	---------------------------------

Пусть μ – аддитивная мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$, нормированная таким образом, что $\mu(B_1(0)) = 1$. Поскольку

$$B_r(x) = x + B_r(0)$$

и μ инвариантна относительно сдвигов, получаем, что $\mu(B_r(x))$ не зависит от x . Вышеприведенное рассуждение с разложением шара $B_{p^{-n}}(x)$ показывает, что

$$\mu(B_{p^{-n}}(x)) = p\mu(B_{p^{-(n+1)}}(x)),$$

откуда следует равенство

$$\mu(B_{p^{-n}}(x)) = p^{-n}. \quad (2.37)$$

Для любого $r > 0$ шар $B_r(x)$ совпадает с $B_{p^{-n}}(x)$, где $n \in \mathbb{Z}$ таково, что $p^{-n} \leq r < p^{-(n-1)}$, откуда следует, что для всех $r > 0$

$$\frac{r}{p} < \mu(B_r(x)) \leq r. \quad (2.38)$$

ПРИМЕР 2.24. Пусть (X, d, μ) есть $\mathbb{Q}_p$ с p -адическим расстоянием и мерой Хаара μ . Рассмотрим функцию распределения расстояний

$$\sigma(r) = \exp\left(-\left(\frac{b}{r}\right)^\alpha\right),$$

где $\alpha, b > 0$. Поскольку

$$\Psi(r) := \frac{1}{\log(1/\sigma(r))} = \left(\frac{r}{b}\right)^\alpha,$$

в силу (2.14) получаем

$$d_*(x, y) = \Psi(d(x, y)) = \left(\frac{\|x - y\|_p}{b}\right)^\alpha. \quad (2.39)$$

В силу леммы 2.7 имеем

$$B_s^*(x) = B_{\Psi^{-1}(s)}(x),$$

что вместе с (2.38) дает

$$\mu(B_s^*(x)) \simeq s^{1/\alpha}. \quad (2.40)$$

Следовательно,

$$N(x, \tau) \simeq \tau^{1/\alpha}.$$

Поскольку эта функция удовлетворяет свойству удвоения, теорема 2.14 (ср. также с примером 2.15) дает оценку

$$p(t, x, y) \simeq \frac{t}{(t + d_*(x, y))^{1+1/\alpha}} \simeq \frac{t}{(t^{1/\alpha} + \|x - y\|_p)^{1+\alpha}}.$$

В частности, для всех $t > 0$ и $x \in X$ имеем

$$p(t, x, x) \simeq t^{1/\alpha}.$$

ПРИМЕР 2.25. Пусть $X = \mathbb{Z}_p$, т. е. X – единичный шар $B_1(0)$ в $\mathbb{Q}_p$ с p -адическим расстоянием и мерой Хаара μ . Рассмотрим функцию распределения расстояний

$$\sigma(r) = \exp(1 - \exp(r^{-\alpha}))$$

для некоторого $\alpha > 0$. Поскольку при $r \leq 1$

$$\Psi(r) := \frac{1}{\log(1/\sigma(r))} = \frac{1}{\exp(r^{-\alpha}) - 1} \simeq \exp(-r^{-\alpha}),$$

получаем, что

$$d_*(x, y) = \Psi(d(x, y)) \simeq \exp(-\|x - y\|_p^{-\alpha}).$$

В силу (2.38) и леммы 2.7 для всех $s \leq 1/2$ имеем

$$\mu(B_s^*(x)) = \mu(B_{\Psi^{-1}(s)}(x)) \simeq \Psi^{-1}(s) \simeq \frac{1}{\log^{1/\alpha}(1/s)},$$

в то время как при $s > 1/2$ имеем $\mu(B_s^*(x)) \simeq 1$. Поэтому для всех $\tau > 0$

$$N(x, \tau) = \frac{1}{\mu(B_{1/\tau}^*(x))} \simeq \log^{1/\alpha}(2 + \tau).$$

Отсюда следует, что функция $N(x, \tau)$ удовлетворяет свойству удвоения, и мы получаем в силу (2.27), что

$$p(t, x, y) \simeq \frac{t}{t + \exp(-\|x - y\|_p^{-\alpha})} \log^{1/\alpha} \left(2 + \frac{1}{t + \exp(-\|x - y\|_p^{-\alpha})} \right).$$

ПРИМЕР 2.26. Пусть X – подмножество из $\mathbb{Q}_p$, состоящее из всех p -адических дробей, т. е. чисел вида $x = 0.a_{-1} \dots a_{-N}$. Тогда p -адическое расстояние d на X принимает только целые значения, так что (X, d) – дискретное пространство. Пусть μ – считающая мера на X , т. е. $\mu(x) = 1$ для любого $x \in X$. Рассмотрим следующую функцию распределения расстояний:

$$\sigma(r) = \exp \left(-\frac{1}{\log^\alpha(2r)} \right) \quad \text{при } r \geq 1, \quad (2.41)$$

которая произвольным образом продолжена на $r < 1$ так, чтобы быть строго монотонно возрастающей и удовлетворять $\sigma(0) = 0$. Поскольку

$$\Psi(r) := \frac{1}{\log(1/\sigma(r))} = \log^\alpha(2r) \quad \text{при } r \geq 1,$$

при $x \neq y$ получаем

$$d_*(x, y) = \Psi(d(x, y)) = \log^\alpha(2\|x - y\|_p). \quad (2.42)$$

При $s \geq s_0 := \log^\alpha 2$ имеем

$$\mu(B_s^*(x)) = \mu(B_{\Psi^{-1}(s)}(x)) \simeq \Psi^{-1}(s) = \frac{1}{2} \exp(s^{1/\alpha}), \quad (2.43)$$

в то время как при $s < s_0$ имеем $\mu(B_s^*(x)) \simeq \mu(x) = 1$. Видим, что (2.43) выполняется для всех $s > 0$. Следовательно, для всех $\tau > 0$

$$N(x, \tau) = \frac{1}{\mu(B_{1/\tau}^*(x))} \simeq \exp(-\tau^{-1/\alpha}). \quad (2.44)$$

В силу примера 2.18 получаем

$$p(t, x, y) \leq \frac{Ct}{t + \log_+^\alpha(2\|x - y\|_p)} \exp(-c(t^{1/(\alpha+1)} + \log_+(2\|x - y\|_p))),$$

а также аналогичную нижнюю оценку.

2.6. Функция Грина и невозвратность. Для заданной изотропной полугруппы $\{P^t\}$ определим оператор Грина G на неотрицательных борелевских функциях f на X формулой

$$Gf(x) = \int_0^\infty P^t f(x) dt.$$

Конечно, значение $Gf(x)$ может быть равно ∞ . По теореме Фубини получаем

$$Gf(x) = \int_X g(x, y) f(y) d\mu(y),$$

где

$$g(x, y) = \int_0^\infty p(t, x, y) dt.$$

Подставляя ядро теплопроводности из (2.18) и снова используя теорему Фубини, получаем

$$g(x, y) = \int_0^{1/d_*(x, y)} \frac{N(x, \tau) d\tau}{\tau^2} = \int_{d_*(x, y)}^\infty \frac{ds}{\mu(B_s^*(x))}, \quad (2.45)$$

где второе тождество следует из (2.15). Функция $g(x, y)$ называется *функцией Грина* полугруппы $\{P^t\}$. Заметим, что функция Грина может быть тождественно равна ∞ . Например, это так, когда $\mu(x) < \infty$ (ср. с рис. 1) и второй интеграл в (2.45) расходится на ∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.27. Процесс $\{\mathcal{X}_t\}$ и полугруппа $\{P^t\}$ называются *невозвратными*, если Gf – ограниченная функция, как только f ограничена и имеет компактный носитель, и *возвратными* в противном случае.

ТЕОРЕМА 2.28. Следующие утверждения равносильны:

- (i) полугруппа $\{P^t\}$ является невозвратной;
- (ii) $g(x, y) < \infty$ для некоторых/всех различных $x, y \in X$;
- (iii) для некоторого/всех $x \in X$

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\mu(B_s^*(x))} < \infty. \quad (2.46)$$

Неравенство (2.46) равносильно неравенству

$$\int_0^\infty \frac{N(x, \tau) d\tau}{\tau^2} < \infty. \quad (2.47)$$

Заметим, что в невозвратном случае функция $x, y \mapsto 1/g(x, y)$ определяет ультраметрику на X , что доказывается аналогично следствию 2.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость условия (2.46) не зависит от выбора x , поскольку для любых двух $x, x' \in X$ шары $B_s^*(x)$ и $B_s^*(x')$ совпадают, как только $s \geq d(x, x')$. Ясно, что конечность второго интеграла в (2.45) при $x \neq y$ равносильна (2.46), откуда следует эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), причем со всеми комбинациями вариантов некоторых/всех.

Ясно, что из конечности Gf для любой ограниченной функции f с компактным носителем вытекает, что $g(x, y) \not\equiv \infty$, т. е. (i) $\Rightarrow$ (ii). Итак, остается доказать импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i). Достаточно показать, что Gf ограничена для $f = \mathbf{1}_A$, где A – ограниченное борелевское подмножество из X . Пусть R – диаметр множества A относительно расстояния d^* . Тогда имеем $A \subset B_R^*(x)$ для любого $x \in A$, откуда в силу (2.45) получаем

$$\begin{aligned} Gf(x) &= \int_A g(x, y) d\mu(y) \leq \int_{B_R^*(x)} g(x, y) d\mu(y) \\ &= \int_{B_R^*(x)} \int_0^\infty \mathbf{1}_{[d_*(x, y), \infty)}(s) \frac{ds}{\mu(B_s^*(x))} d\mu(y) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\mu(B_s^*(x))} \left(\int_{B_R^*(x)} \mathbf{1}_{[0, s]}(d_*(x, y)) d\mu(y) \right) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\mu(B_s^*(x))} \mu(B_R^*(x) \cap B_s^*(x)) ds. \end{aligned}$$

Для $s \geq R$ подынтегральная функция равна $\frac{1}{\mu(B_s^*(x))} \mu(B_R^*(x))$, так что сходимость на ∞ следует из (2.46). Ясно, что сходимость равномерна по $x \in A$, поскольку $\mu(B_R^*(x))$ и $\mu(B_s^*(x))$ не зависят от $x \in A$ при $s \geq R$. Для $s \leq R$ подынтегральная функция равна

$$\frac{1}{\mu(B_s^*(x))} \mu(B_s^*(x)) = 1,$$

что влечет за собой равномерную сходимость в нуле. Отсюда вытекает, что $\sup_A Gf(x) < \infty$. Наконец, соотношение $\sup_X Gf(x) < \infty$ следует из того, что $g(x, y)$ убывает как функция от $d_*(x, y)$. Теорема доказана.

Отметим, что если X – локально конечная группа с мерой Хаара μ , то критерий невозвратности (iii) теоремы 2.28 совпадает с общим достаточным условием невозвратности из [40].

Теперь дадим некоторые оценки функции Грина. Положим

$$V(x, r) = \mu(B_r^*(x)). \quad (2.48)$$

ТЕОРЕМА 2.29. *Предположим, что существуют такие постоянные $1 < c < c' < c''$, что для всех $r > r_0 \geq 0$ и некоторого $x \in X$*

$$c' \leq \frac{V(x, cr)}{V(x, r)} \leq c''. \quad (2.49)$$

Тогда полугруппа $\{P^t\}$ невозвратна и для всех $y \in X$, для которых $r := d^(x, y) > r_0$, имеем*

$$g(x, y) \simeq \frac{r}{V(x, r)}.$$

Заметим, что условие $\frac{V(x, cr)}{V(x, r)} \leq c''$ равносильно свойству удвоения функции

$r \mapsto V(x, r)$ (ср. с определением 2.13), в то время как условие $\frac{V(x, cr)}{V(x, r)} \geq c'$ при

$c' > c$ несколько сильнее обратного свойства удвоения (ср. с определением 2.22). Например, (2.49) выполняется при $V(x, r) \simeq r^\alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты обозначений положим $V(s) := V(x, s)$. При $r > r_0$ имеем

$$g(x, y) = \int_r^\infty \frac{ds}{V(s)} = \sum_{k=0}^\infty \int_{c^k r}^{c^{k+1} r} \frac{ds}{V(s)} = \sum_{k=0}^\infty c^k \int_r^{cr} \frac{ds}{V(c^k s)}.$$

Используя нижнюю оценку в (2.49), получаем

$$\int_r^\infty \frac{ds}{V(s)} \leq \sum_{k=0}^\infty c^k \int_r^{cr} \frac{(c')^{-k} ds}{V(s)} \leq \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{c}{c'}\right)^k \frac{cr}{V(r)} \leq \text{const} \frac{r}{V(r)},$$

где ряд сходится благодаря условию $c' > c$. Аналогично, используя верхнюю оценку в (2.49), получаем

$$\int_r^\infty \frac{ds}{V(s)} \geq \int_r^{cr} \frac{ds}{V(s)} \geq \frac{(c-1)r}{V(cr)} \geq \text{const} \frac{r}{V(r)},$$

что завершает доказательство теоремы.

ПРИМЕР 2.30. Пусть (X, d, μ) и σ – такие, как в примере 2.24, т.е. $X = \mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел с ультраметрикой $d(x, y) = \|x - y\|_p$, а $\sigma(r) = \exp(-(b/r)^\alpha)$. Тогда в силу (2.39) имеем

$$d_*(x, y) = \text{const} \|x - y\|_p^\alpha,$$

а в силу (2.40) имеем

$$V(x, r) \simeq r^{1/\alpha}.$$

Поэтому по теореме 2.28 полугруппа $\{P^t\}$ будет невозвратной тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$. Более того, условие (2.49) также выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$, и в этом случае мы получаем по теореме 2.29, что для всех x, y

$$g(x, y) \simeq d_*(x, y)^{1-1/\alpha} \simeq \|x - y\|_p^{\alpha-1}.$$

ПРИМЕР 2.31. Пусть (X, d, μ) и σ – такие, как в примере 2.26, т.е. X – множество дробных p -адических чисел, а σ задана равенством (2.41). В силу (2.42) при $x \neq y$ имеем

$$d_*(x, y) = \log^\alpha(2\|x - y\|_p),$$

а в силу (2.43) имеем

$$V(x, r) \simeq \exp(r^{1/\alpha}).$$

По теореме 2.28 заключаем, что полугруппа $\{P^t\}$ является невозвратной. Теорема 2.29 в этом случае не применима, но, оценивая напрямую интеграл

в (2.45), мы получим для $r := d^*(x, y)$

$$g(x, y) = \int_r^\infty \frac{ds}{V(x, s)} \simeq \int_r^\infty \exp(-s^{1/\alpha}) ds \simeq r^{1-1/\alpha} \exp(-r^{1/\alpha}),$$

откуда при $x \neq y$ следует

$$g(x, y) \simeq \|x - y\|_p^{-1} \log^{\alpha-1}(2\|x - y\|_p).$$

3. Изотропный лапласиан и его спектр

В этом разделе мы рассматриваем свойства генератора изотропной полугруппы $\{P^t\}$. По определению генератор $\mathcal{L}$ сильно непрерывной полугруппы $\{P^t\}_{t \geq 0}$ в банаховом пространстве определяется равенством

$$\mathcal{L}f = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f - P^t f}{t},$$

причем область определения $\text{dom } \mathcal{L}$ состоит из тех f , для которых этот предел существует. Поскольку изотропная полугруппа $\{P^t\}$ симметрична и действует в гильбертовом пространстве $L^2(X, \mu)$, определение, приведенное выше, равносильно следующему: $\mathcal{L}$ – самосопряженный (неограниченный) оператор в $L^2(X, \mu)$ такой, что

$$P^t = \exp(-t\mathcal{L}) \quad \text{для всех } t > 0.$$

Очевидно, что это равносильно равенству $P = \exp(-\mathcal{L})$, что приводит к тождеству

$$\mathcal{L} = \log \frac{1}{P},$$

где правая часть понимается в смысле функционального исчисления самосопряженных операторов. Мы называем $\mathcal{L}$ *изотропным оператором Лапласа*, связанным с триплетом (d, μ, σ) .

3.1. Субординация. Используя спектральное разложение (2.10) оператора P , получаем, что

$$\mathcal{L} = \int_{[0, +\infty)} \log \frac{1}{\sigma(1/\lambda)} dE_\lambda,$$

где $\{E_\lambda\}$ – разложение единицы, задаваемое формулой (2.6). Для простоты обозначим

$$\varphi(\lambda) := \log \frac{1}{\sigma(1/\lambda)}, \quad (3.1)$$

так что

$$\mathcal{L} = \int_{[0, +\infty)} \varphi(\lambda) dE_\lambda. \quad (3.2)$$

Область определения $\text{dom } \mathcal{L}$ тогда задается равенством

$$\text{dom } \mathcal{L} = \left\{ f \in L^2 : \int_0^\infty \varphi(\lambda)^2 d(E_\lambda f, f) < \infty \right\}.$$

Заметим, что функция φ обладает следующими свойствами, которые вытекают из предположений (1.5) о функции σ :

$$\begin{aligned} \varphi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty] \text{ является строго монотонно возрастающей} \\ \text{непрерывной справа функцией такой, что } \varphi(0) = 0 \text{ и } \varphi(\infty-) = \infty. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Обратно, любая функция φ , удовлетворяющая (3.3), определяет функцию

$$\sigma(\lambda) = \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right),$$

которая удовлетворяет (1.5). Это наблюдение приводит к следующему интересному свойству субординации изотропных лапласианов.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathcal{L}$ – изотропный лапласиан, связанный с (d, μ, σ) . Пусть ψ – любая функция, удовлетворяющая (3.3). Тогда $\psi(\mathcal{L})$ также является изотропным лапласианом, связанным с $(d, \mu, \tilde{\sigma})$, для некоторой другой функции распределения расстояний $\tilde{\sigma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.2) следует, что

$$\psi(\mathcal{L}) = \int_{[0, +\infty)} \psi \circ \varphi(\lambda) dE_\lambda.$$

Поскольку композиция $\psi \circ \varphi$ также удовлетворяет (3.3), получаем, что $\psi(\mathcal{L})$ является изотропным лапласианом. Более того, используя (3.1), мы получаем следующую формулу для $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma}(r) = \exp\left(-\psi\left(\log \frac{1}{\sigma(r)}\right)\right).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Любой неотрицательно определенный самосопряженный оператор $\mathcal{L}$ в L^2 порождает полугруппу $\{e^{-t\mathcal{L}}\}_{t \geq 0}$. Мы называем $\mathcal{L}$ лапласианом, если полугруппа $\{e^{-t\mathcal{L}}\}$ марковская. В общем случае по теореме Бохнера для любого лапласиана $\mathcal{L}$ оператор $\psi(\mathcal{L})$ снова является лапласианом, как только ψ является функцией Бернштейна (см., например, книгу Р. Л. Шиллинга, Р. Сонга и З. Вондрачека [53]). Известно, что $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$ является функцией Бернштейна тогда и только тогда, когда $0 < \alpha \leq 1$. Таким образом, для лапласиана общего вида $\mathcal{L}$ степень $\mathcal{L}^\alpha$ гарантированно является лапласианом только при $\alpha \leq 1$. Например, для классического оператора Лапласа $\mathcal{L} = -\Delta$ в $\mathbb{R}^n$ степень $(-\Delta)^\alpha$ при $\alpha > 1$ не является лапласианом. В поразительном контрасте с этим фактом, по теореме 3.1 степени $\mathcal{L}^\alpha$ изотропного лапласиана снова являются лапласианами для всех $\alpha > 0$.

3.2. L^2 -спектр. Нашей следующей целью является вывод явного выражения для $\mathcal{L}f$ и описание спектра оператора $\mathcal{L}$. Напомним, что по теореме 2.10 тройки (d, μ, σ) и (d_*, μ, σ_*) индуцируют один и тот же марковский оператор P

и потому один и тот же оператор Лапласа $\mathcal{L}$, где d_* – внутренняя ультраметрика, определенная равенством (2.14), а

$$\sigma_*(r) = \exp\left(-\frac{1}{r}\right).$$

С этого момента мы будем использовать только метрику d_* и σ_* . Пусть разложение единицы $\{E_\lambda\}$ также будет определено с использованием метрики d_* ; это означает, что в определении (2.6) оператора E_λ мы теперь используем усредняющий оператор Q_r относительно метрики d_* . Функция φ_* , связанная с σ_* с помощью (3.1), имеет особенно простой вид: $\varphi_*(\lambda) = \lambda$. Поэтому мы получаем из (3.2) спектральное разложение оператора $\mathcal{L}$ в классическом виде

$$\mathcal{L} = \int_{[0,+\infty)} \lambda dE_\lambda = \int_{(0,\infty)} \lambda dE_\lambda. \quad (3.4)$$

Замена $s = 1/\lambda$ дает

$$\mathcal{L} = - \int_{(0,\infty)} \frac{1}{s} dQ_s.$$

Для любого $x \in X$ обозначим через $\Lambda(x)$ множество значений $d_*(x, y)$ для всех $y \in X$, $y \neq x$, т. е.

$$\Lambda(x) = \{d(x, y) : y \in X \setminus \{x\}\}. \quad (3.5)$$

ЛЕММА 3.3. *Множество $\Lambda(x)$ не имеет точек сгущения в $(0, \infty)$. Следовательно, $\Lambda(x)$ не более чем счетно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \in (0, \infty)$ – точка сгущения множества $\Lambda(x)$, т. е. имеется последовательность $\{r_k\}$ точек из $\Lambda(x) \setminus \{r\}$, для которой $r_k \rightarrow r$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда $r_k = d_*(x, y_k)$ для некоторого $y_k \in X$. Поскольку последовательность (y_k) ограничена, в силу компактности всех шаров в X она обладает сходящейся подпоследовательностью. Без ограничения общности можно считать, что (y_k) сходится, скажем, к $y \in X$. Тогда $r = d(x, y)$. Поскольку $r > 0$, для достаточно большого k имеем $r_k > r/2$ и $d(y, y_k) < r/2$. Тогда в силу ультраметрического неравенства получаем, что

$$r_k \leq \max(r, d(y, y_k)) = r$$

и, аналогично,

$$r \leq \max(r_k, d(y, y_k)) = r_k,$$

откуда $r_k = r$, что противоречит нашим предположениям. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Для любого шара B в X обозначим через $\rho(B)$ его минимальный d_* -радиус.

Заметим, что $\rho(B)$ существует, поскольку все шары определяются как замкнутые шары, и является также d_* -диаметром шара B .

ЛЕММА 3.5. Если $\rho(B) > 0$, то $\rho(B) \in \Lambda(x)$ для любого $x \in B$. Обратно, любое число в $\Lambda(x)$ равно $\rho(B)$ для некоторого шара B , содержащего x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r = \rho(B)$, так что $B = B_r^*(x)$. Для любого $y \in B$ имеем $d_*(x, y) \leq r$, и нам нужно показать, что $d_*(x, y) = r$ для некоторого y . Предположим, что $d_*(x, y) < r$ для всех $y \in B$. Тогда множество

$$\{d_*(x, y) : y \in B \setminus \{x\}\}$$

является подмножеством из $(0, r) \cap \Lambda(x)$. В силу леммы 3.3 последнее множество обладает максимальным элементом, скажем, r' . Тогда $B \subset B_{r'}^*(x)$, что противоречит минимальности радиуса r . Обратно, если $r \in \Lambda(x)$, то шар $B = B_r(x)$ имеет радиус $\rho(B) = r$, поскольку существует $y \in X$ такое, что $d(x, y) = r$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть B, C – два шара в X такие, что $C \subset B$. Будем говорить, что C – *последователь* шара B (а B – *предшественник* шара C), если $C \neq B$ и для любого шара A такого, что $C \subset A \subset B$, имеем $A = C$ или $A = B$. Другими словами, B – минимальный шар, содержащий C как собственное подмножество. Если C – последователь шара B , будем писать $C \prec B$.

Обозначим через $\mathcal{X}$ семейство всех шаров C в X с положительными радиусами. Если $C = B_r^*(x)$ – шар из $\mathcal{X}$ с радиусом $r > 0$, то для минимального радиуса $\rho(C)$ имеются две возможности:

- 1) $\rho(C) > 0$,
- 2) $\rho(C) = 0$ и центр шара C является изолированной точкой пространства X .

ЛЕММА 3.7. У любого шара $C \in \mathcal{X}$ такого, что $C \neq X$, есть единственный шар-предшественник B . Для любого шара B с радиусом $\rho(B) > 0$ число $\deg(B)$ его последователей удовлетворяет неравенствам $2 \leq \deg(B) < \infty$. Более того, все последователи шара B не пересекаются и их объединение равно B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое $x \in C$. Из леммы 3.3 и определения $\mathcal{X}$ следует, что множество $(\rho(C), \infty) \cap \Lambda(x)$ имеет минимум, который мы обозначим через r . Тогда шар $B_r^*(x)$ является предшественником C . Единственность предшественника следует из определения.

Если C_1 и C_2 – два различных последователя шара B , то C_1 и C_2 не пересекаются. Действительно, если они пересекаются, то один из них содержит другой, скажем, $C_1 \subset C_2$. По определению предшественника/последователя тогда должно выполняться равенство $C_2 = C_1$ или $C_2 = B$, откуда следует $C_1 = C_2$.

Покажем, что для любого $x \in B$ найдется шар C такой, что $x \in C \prec B$. Действительно, если множество $(0, \rho(B)) \cap \Lambda(x)$ пусто, то $C = B_0^*(x) = \{x\}$ – последователь шара B . Если множество $(0, \rho(B)) \cap \Lambda(x)$ непусто, то по лемме 3.3 у него есть максимум, скажем, r . Тогда $C = B_r^*(x)$ – последователь шара B . Отсюда следует, что множество всех последователей шара B является покрытием шара B .

Каждый последователь C шара B является открытым множеством (будучи также замкнутым шаром), так как C совпадает с открытым шаром радиуса $\rho(B)$. Поскольку шар B компактен, множество его последователей конечно, т.е. $\deg(B) < \infty$. Наконец, $\deg(B)$ не может быть равно 1, так как тогда B совпадал бы со своим единственным последователем. Отсюда следует, что $\deg(B) \geq 2$. Лемма доказана.

Для любого $C \in \mathcal{K}$ определим функцию f_C на X следующим образом. Если C – собственное подмножество пространства X , то, обозначая через B предшественника шара C , положим

$$f_C = \frac{1}{\mu(C)} \mathbf{1}_C - \frac{1}{\mu(B)} \mathbf{1}_B \quad (3.6)$$

(заметим, что всегда $\mu(C) > 0$). Положим также $\lambda(C) := 1/\rho(B)$. Если $C = X$ (что может быть только в случае, когда X компактно), то положим $f_C \equiv 1$ и $\lambda(C) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.8. *Для любого $C \in \mathcal{K}$ функция f_C является собственной функцией оператора $\mathcal{L}$ с собственным значением $\lambda(C)$. Семейство $\{f_C : C \in \mathcal{K}\}$ полно (его линейная оболочка всюду плотна) в $L^2(X, \mu)$. Следовательно, оператор $\mathcal{L}$ обладает полной системой собственных функций с компактными носителями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем шар $C \in \mathcal{K}$ или радиус $r = \rho(C)$, и пусть B – предшественник радиуса $r' = \rho(B)$. Любой шар радиуса $s < r'$ либо не пересекается с C , либо содержится в C , откуда следует, что $\mathbf{1}_C$ постоянна в любом таком шаре. Следовательно, для любого $s < r'$ имеем $Q_s \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_C$ и, аналогично, $Q_s \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_B$, откуда

$$Q_s f_C = f_C.$$

Если $s \geq r'$, то любой шар радиуса s либо содержит оба шара C , B , либо не пересекается с B . Поскольку средние двух функций $\frac{1}{\mu(C)} \mathbf{1}_C$ и $\frac{1}{\mu(B)} \mathbf{1}_B$ по любому шару, содержащему C и B , равны, получаем, что в этом случае $Q_s f_C = 0$. Следовательно,

$$\mathcal{L} f_C = - \int_{(0, \infty)} \frac{1}{s} Q_s f_C ds = \frac{1}{r'} f_C = \lambda(C) f_C.$$

Это доказывает, что f_C – собственная функция оператора $\mathcal{L}$ с собственным значением $\lambda(C)$. В случае компактного X имеем $Q_s f_X = f_X$ для всех $s > 0$, откуда $\mathcal{L} f_X = 0 = \lambda(X)$.

Покажем, что система $\{f_C : C \in \mathcal{K}\}$ полна. Предположим, что некоторая функция $f \in L^2$ ортогональна всем функциям f_C , и докажем, что $f \equiv \text{const}$. Для любого $r > 0$ имеем

$$(Q_r f, f_C)_{L^2} = (f, Q_r f_C)_{L^2} = \text{const}(f, f_C)_{L^2} = 0,$$

где мы использовали то, что любая собственная функция оператора $\mathcal{L}$ является также собственной функцией оператора Q_r с собственным значением,

которое мы обозначили через const . Отсюда следует, что $Q_r f$ также ортогональна всем f_C . Ниже мы докажем, что $Q_r f = 0$, из чего в силу (2.2) будет следовать, что $f = 0$.

Поскольку $Q_r f$ постоянна в любом шаре радиуса r , то, переименовывая $Q_r f$ обратно в f , мы можем с этого момента считать, что f постоянна в любом шаре радиуса r . Зафиксируем некоторый шар $C \in \mathcal{K}$ и его предшественника B . Из (3.6) следует, что равенство $(f, f_C)_{L^2} = 0$ равносильно равенству

$$\frac{1}{\mu(C)} \int_C f d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu,$$

т. е. среднее значение функции f по шару сохраняется, когда мы переключаемся на его предшественника. Начиная с двух шаров C_1 и C_2 радиуса r , можно построить последовательности их предшественников, которые закончатся одним и тем же (достаточно большим) шаром. Отсюда следует, что средние значения функции f в C_1 и C_2 одни и те же. Поскольку f постоянна в C_1 и C_2 , значения этих постоянных одинаковы. Следовательно, $f \equiv \text{const}$ на X . Если $\mu(X) = \infty$, то получим $f \equiv 0$. Если $\mu(X) < \infty$, то, используя ортогональность f к $f_X \equiv 1$, снова получим, что $f \equiv 0$. Теорема доказана.

Для любого шара B , $\rho(B) > 0$, определим подпространство $\mathcal{H}_B$ пространства L^2 следующим образом:

$$\mathcal{H}_B = \text{span}\{f_C : C \prec B\}. \quad (3.7)$$

По теореме 3.8 все ненулевые функции в $\mathcal{H}_B$ являются собственными функциями оператора $\mathcal{L}$ с собственным значением $1/\rho(B)$.

Из леммы 3.7 следует, что функции $\{1_C : C \prec B\}$ линейно независимы и

$$\sum_{C \prec B} 1_C = 1_B.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{C \prec B} \mu(C) f_C = 0 \quad (3.8)$$

и что это единственная зависимость между функциями f_C . Отсюда получаем, что

$$\dim \mathcal{H}_B = \deg(B) - 1. \quad (3.9)$$

Ясно, что пространства $\mathcal{H}_B$ и $\mathcal{H}_{B'}$ ортогональны, как только шары B , B' не пересекаются.

Определим множество

$$\Lambda := \{d_*(x, y) : x, y \in X, x \neq y\} = \bigcup_{x \in X} \Lambda(x). \quad (3.10)$$

Из теоремы 3.8 вытекает следующее.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Спектр $\text{спес } \mathcal{L}$ лапласиана $\mathcal{L}$ чисто точечный и

$$\text{спес } \mathcal{L} = \overline{\left\{ \frac{1}{r} : r \in \Lambda \right\}} \cup \{0\}.$$

Пространство $L^2(X, \mu)$ разлагается в ортогональную сумму конечномерных собственных пространств следующим образом: если $\mu(X) = \infty$, то

$$L^2(X, \mu) = \bigoplus_{\rho(B) > 0} \mathcal{H}_B,$$

а если $\mu(X) < \infty$, то

$$L^2(X, \mu) = \{\text{const}\} \oplus \bigoplus_{\rho(B) > 0} \mathcal{H}_B.$$

ПРИМЕР 3.10. Пусть (X, d, μ) такое же, как в примере 2.24, т.е. $X = \mathbb{Q}_p$, $d(x, y) = \|x - y\|_p - p$ -адическое расстояние, а μ – мера Хаара. Для некоторого $\alpha > 0$ положим

$$\sigma(r) = \exp\left(-\left(\frac{p}{r}\right)^\alpha\right),$$

так что в силу (2.39)

$$d_*(x, y) = \left(\frac{\|x - y\|_p}{p}\right)^\alpha.$$

Поскольку множество ненулевых значений расстояния $\|x - y\|_p$ есть $\{p^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, множество Λ всех ненулевых значений расстояния $d_*(x, y)$ есть

$$\Lambda = \{p^{\alpha k} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Отсюда следует, что

$$\text{спес } \mathcal{L} = \{p^{\alpha k} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.11. Пусть (X, d) – некомпактное ультраметрическое пространство с компактными шарами. Пусть $M \subset [0, \infty)$ – любое замкнутое множество (неограниченное, если X содержит хотя бы одну неизоллированную точку), для которого 0 – точка сгущения. Тогда верно следующее.

(а) Существует ультраметрика d' на X такая, что d' -шары компактны, d' порождает ту же топологию, что и d , и изотропный лапласиан $\mathcal{L}'$, соответствующий тройке (d', μ, σ_*) , имеет спектр $\text{спес } \mathcal{L}' = M$.

(б) Предположим дополнительно, что существует разбиение X на бесконечное множество d -шаров, каждый из которых содержит более одной точки. Тогда ультраметрику d' из пункта (а) можно выбрать так, чтобы семейства d -шаров и d' -шаров совпадали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество

$$D = \{x \in (0, \infty) : x^{-1} \in M\} \cup \{0\}$$

является замкнутым неограниченным подмножеством из $[0, \infty)$, содержащим 0 . Утверждение (а) равносильно существованию ультраметрики d' на X с компактными шарами, которая порождает ту же топологию, что и d , и для которой замыкание множества значений $\{d'(x, y)\}_{x, y \in X}$ этой метрики совпадает

с D . Это метрическое свойство доказано А. Бендиковым и П. Крупским [8; § 2]. Тогда изотропный лапласиан, связанный с тройкой (d', μ, σ_*) , обладает требуемым свойством в силу следствия 3.9. Доказательство утверждения (b) следует таким же образом из [8; § 2]. Следствие доказано.

3.3. Форма Дирихле и плотность скачков. Построим форму Дирихле $(\mathcal{E}, \text{dom}_{\mathcal{E}})$, связанную с изотропной полугруппой $\{P^t\}$. Хорошо известно, что если $P^t 1 = 1$, как в нашем случае, то

$$\mathcal{E}(f, f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \int_X \int_X p(t, x, y) (f(x) - f(y))^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

и

$$\text{dom}_{\mathcal{E}} = \{f \in L^2 : \mathcal{E}(f, f) < \infty\}$$

(см. [27]). Используя тождество (2.18), получаем, что

$$\frac{p(t, x, y)}{t} \nearrow \int_0^{1/d_*(x, y)} N(x, \tau) d\tau \quad \text{при } t \searrow 0.$$

Полагая

$$J(x, y) := \int_0^{1/d_*(x, y)} N(x, \tau) d\tau = \int_{d_*(x, y)}^{\infty} \frac{1}{V(x, s)} \frac{ds}{s^2}, \quad (3.11)$$

по теореме о монотонной сходимости получаем, что для всех $f \in L^2$

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2} \int_X \int_X (f(x) - f(y))^2 J(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Заметим, что $0 < J(x, y) = J(y, x) < \infty$ для всех $x \neq y$, тогда как $J(x, x) = \infty$.

Из тождества поляризации тогда следует, что для всех $f, g \in \text{dom}_{\mathcal{E}}$

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \int_X \int_X (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) J(x, y) d\mu(x) d\mu(y). \quad (3.12)$$

Функция J называется *плотностью скачков* формы Дирихле $\mathcal{E}$. Здесь мы покажем, что ее можно использовать также для описания генератора $\mathcal{L}$ полугруппы $\{P^t\}$. Напомним, что в силу теории форм Дирихле генератор $\mathcal{L}$ имеет следующее равносильное определение: это самосопряженный оператор в L^2 с $\text{dom}_{\mathcal{L}} \subset \text{dom}_{\mathcal{E}}$ такой, что

$$(\mathcal{L}f, g) = \mathcal{E}(f, g)$$

для всех $f \in \text{dom}_{\mathcal{L}}$ и $g \in \text{dom}_{\mathcal{E}}$.

Обозначим через $\mathcal{V}_r$ образ оператора Q_r (определенного относительно d_*), т. е. пространство всех L^2 -функций, постоянных на каждом шаре радиуса r . Положим также

$$\mathcal{V} := \bigcup_{r>0} \mathcal{V}_r$$

и заметим, что $\mathcal{V}$ – линейное подпространство в L^2 . Заметим также, что пространство $\mathcal{V}_c$ всех локально постоянных функций с компактным носителем содержится в $\mathcal{V}$.

ТЕОРЕМА 3.12. *Пространство $\mathcal{V}$ всюду плотно в L^2 , является подмножеством в $\text{dom } \mathcal{L}$ и для любого $f \in \mathcal{V}$*

$$\mathcal{L}f(x) = \int_X (f(x) - f(y))J(x, y) d\mu(y). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что $\mathcal{V}$ всюду плотно в L^2 , следует из (2.2). На самом деле, $\mathcal{V}_c$ также всюду плотно в L^2 , что следует из того, что все собственные функции оператора $\mathcal{L}$ лежат в $\mathcal{V}_c$.

В силу (2.6) и (3.4) имеем $Q_r = \mathbf{1}_{[0, 1/r)}(\mathcal{L})$. Значит, $\mathcal{L}Q_r$ – ограниченный оператор, откуда следует, что $\text{dom } \mathcal{L} \supset \mathcal{V}_r$ и потому $\text{dom } \mathcal{L} \supset \mathcal{V}$.

Зафиксируем функцию $f \in \mathcal{V}_r$ с $r > 0$ и положим

$$u(x) = \int_X |f(x) - f(y)|J(x, y) d\mu(y).$$

Покажем, что $u \in L^2$. Заметим, что $f(x) = f(y)$, как только выполнено неравенство $d_*(x, y) \leq r$. Отсюда следует, что можно ограничить интегрирование на область $\{d_*(x, y) > r\}$. В силу неравенства Коши–Шварца имеем

$$u^2(x) \leq \left(\int_X |f(x) - f(y)|^2 J(x, y) d\mu(y) \right) \left(\int_{\{y: d_*(x, y) > r\}} J(x, y) d\mu(y) \right). \quad (3.14)$$

Покажем, что

$$\int_{\{y: d_*(x, y) > r\}} J(x, y) d\mu(y) \leq \frac{1}{r}.$$

Действительно, в силу (3.11) и теоремы Фубини последний интеграл равен

$$\begin{aligned} & \int_{\{y: d_*(x, y) > r\}} \int_{\{s: s \geq d_*(x, y)\}} \frac{1}{V(x, s)} \frac{ds}{s^2} d\mu(y) \\ &= \int_r^\infty \frac{ds}{s^2 V(x, s)} \int_{\{y: r < d_*(x, y) \leq s\}} d\mu(y) \\ &= \int_r^\infty \frac{V(x, s) - V(x, r)}{s^2 V(x, s)} ds \\ &\leq \int_r^\infty \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Из (3.14) следует, что

$$\int_X u^2 d\mu \leq \frac{1}{r} \mathcal{E}(f, f).$$

Поскольку $f \in \text{dom } \mathcal{L} \subset \text{dom } \mathcal{E}$, получаем, что $u \in L^2$. В частности, $u(x) < \infty$ для почти всех $x \in X$. Следовательно, для почти всех $x \in X$ функция

$$y \mapsto (f(x) - f(y))J(x, y)$$

лежит в L^1 и ее интеграл

$$v(x) = \int_X (f(x) - f(y))J(x, y) d\mu(y)$$

является L^2 -функцией. Нам нужно проверить, что $\mathcal{L}f = v$. Для этого достаточно проверить, что для любого $g \in \text{dom } \mathcal{E}$

$$(v, g)_{L^2} = \mathcal{E}(f, g).$$

Действительно, используя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} (v, g)_{L^2} &= \int_X \int_X (f(x) - f(y))g(x)J(x, y) d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \int_X \int_X (f(y) - f(x))g(y)J(y, x) d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_X \int_X (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))J(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \mathcal{E}(f, g), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

3.4. L^p -спектр лапласиана. Известно, что любую непрерывную симметричную марковскую полугруппу можно продолжить на все пространства L^p , $1 \leq p < \infty$, как непрерывную сжимающую полугруппу. В частности, это верно для полугруппы $\{P^t\}$. Мы используем те же обозначения для продолженной полугруппы и обозначаем через $\mathcal{L}_p$ ее инфинитезимальный генератор, а через $\text{dom } \mathcal{L}_p$ ее область определения в L^p .

ТЕОРЕМА 3.13. *Для всех $1 \leq p < \infty$ имеем*

$$\text{spec } \mathcal{L}_p = \text{spec } \mathcal{L}_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку по теореме 3.8 все собственные функции оператора $\mathcal{L}_2$ имеют компактные носители, они принадлежат также L^p , откуда следует, что

$$\text{spec } \mathcal{L}_2 \subset \text{spec } \mathcal{L}_p.$$

Чтобы доказать обратное включение, выберем $\lambda_0 \notin \text{spec } \mathcal{L}_2$ и покажем, что $\lambda_0 \notin \text{spec } \mathcal{L}_p$. Для этого достаточно показать, что резольвента

$$R := (\mathcal{L}_2 - \lambda_0 \text{id})^{-1},$$

будучи ограниченным оператором в L^2 , продолжается до ограниченного оператора в L^p . Последнее сводится к тому, чтобы показать, что для любых функций $f \in L^2 \cap L^p$ и $g \in L^2 \cap L^q$, где $q = p/(p-1)$ – гёльдеров сопряженный показателя p , выполняется неравенство

$$|(Rf, g)_{L^2}| \leq C \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

с постоянной C , не зависящей от f, g .

Ограничимся случаем $\lambda_0 > 0$ (случай $\lambda_0 < 0$ проще). Выберем $a, b > 0$ такие, что $a < \lambda_0 < b$ и $[a, b]$ не пересекается с $\text{spec } \mathcal{L}_2$. Используя спектральное разложение (3.4), получим

$$R = \int_{\text{spec } \mathcal{L}_2} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0} = \int_{[0, a)} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0} + \int_{[b, \infty)} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0},$$

откуда

$$(Rf, g) = \int_{[0,a)} \frac{d(E_\lambda f, g)}{\lambda - \lambda_0} + \int_{[b,\infty)} \frac{d(E_\lambda f, g)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} (Rf, g) &= \frac{(E_a f, g)}{a - \lambda_0} + \int_{[0,a)} \frac{(E_\lambda f, g)}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda \\ &\quad - \frac{(E_b f, g)}{b - \lambda_0} + \int_{[b,\infty)} \frac{(E_\lambda f, g)}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda. \end{aligned}$$

Поскольку $E_\lambda = Q_{1/\lambda}$ – марковский оператор, он стандартным образом продолжается до ограниченного оператора в L^p с оценкой нормы 1, так что

$$|(E_\lambda f, g)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Следовательно,

$$|(Rf, g)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \left(\frac{1}{\lambda_0 - a} + \frac{1}{b - \lambda_0} + \int_{[0,a) \cup [b,\infty)} \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^2} \right),$$

что завершает доказательство, поскольку величина в больших скобках конечна. Теорема доказана.

Последняя теорема этого раздела относится к свойству Лиувилля. Заметим, что полугруппа $\{P^t\}$, определенная равенством (1.6), действует на пространстве $\mathcal{B}_b$ ограниченных борелевских функций как сжимающая полугруппа, но она не непрерывна, если только X не дискретно. Определим сходимость последовательности в $\mathcal{B}_b$ как ограниченную поточечную сходимость, т.е. последовательность $\{f_k\} \subset \mathcal{B}_b$ сходится в $\mathcal{B}_b$ к функции f , если вся последовательность $\{f_k\}$ равномерно ограничена и $f_k(x) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $x \in X$. Определим слабый инфинитезимальный генератор $\mathcal{L}_\infty$ полугруппы $\{P^t\}$ в $\mathcal{B}_b$ следующим образом: область определения $\text{dom } \mathcal{L}_\infty$ состоит из функций $f \in \mathcal{B}_b$ таких, что предел

$$\mathcal{L}_\infty f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f - P^t f}{t}$$

существует в смысле сходимости в $\mathcal{B}_b$. Это дает $\mathcal{L}_\infty f \in \mathcal{B}_b$ для любого $f \in \text{dom } \mathcal{L}_\infty$.

ТЕОРЕМА 3.14 (сильное свойство Лиувилля). *Любая борелевская функция $f: X \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющая $Pf = f$, должна быть постоянной.*

Следовательно, 0 – собственное значение оператора $\mathcal{L}_\infty$ кратности 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку P и Q_r перестановочны, из $f = Pf$ и

$$Pf = \int_0^\infty Q_s f d\sigma_*(s) \tag{3.15}$$

получаем, что для всех $r \geq 0$

$$Q_r f = PQ_r f = \int_{[0,\infty)} Q_s Q_r f d\sigma_*(s).$$

Замечая, что

$$Q_s Q_r = Q_{\max(r,s)},$$

получаем

$$Q_r f = \int_{[0,r)} Q_r f d\sigma_*(s) + \int_{[r,\infty)} Q_s f d\sigma_*(s).$$

Первый интеграл здесь равен $\sigma_*(r)Q_r f$, откуда следует равенство

$$(1 - \sigma_*(r))Q_r f = \int_{[r,\infty)} Q_s f d\sigma_*(s). \quad (3.16)$$

Зафиксируем некоторый $x \in X$. В силу леммы 3.3 множество $\Lambda(x)$ всех значений $d_*(x, y)$ при $y \neq x$ не имеет точек сгущения в $(0, +\infty)$. Выберем r_0 следующим образом: если $\Lambda(x)$ не имеет точки сгущения в 0, то $r_0 = 0$, а если $\Lambda(x)$ имеет точку сгущения в 0, то r_0 — любое значение из $\Lambda(x)$. В обоих случаях множество $\Lambda(x) \cap (r, \infty)$ состоит из (конечной или бесконечной) последовательности $r_1 < r_2 < \dots$, которая сходится к ∞ в случае, когда она бесконечна. Применяя (3.16) к $r = r_k$ и $r = r_{k+1}$, где $k \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} (1 - \sigma_*(r_k))Q_{r_k} f(x) - (1 - \sigma_*(r_{k+1}))Q_{r_{k+1}} f(x) &= \int_{[r_k, r_{k+1})} Q_s f(x) d\sigma_*(s) \\ &= Q_{r_k} f(x)(\sigma_*(r_{k+1}) - \sigma_*(r_k)), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$(1 - \sigma_*(r_{k+1}))Q_{r_k} f(x) = (1 - \sigma_*(r_{k+1}))Q_{r_{k+1}} f(x)$$

и потому

$$Q_{r_k} f(x) = Q_{r_{k+1}} f(x).$$

Следовательно,

$$Q_{r_k} f(x) = Q_{r_0} f(x) \quad \text{для всех } k \geq 1.$$

Поскольку r_0 можно выбрать произвольно близким к 0, получаем, что $Q_r f(x)$ не зависит от r . Для любых двух точек $x, y \in X$ имеем $Q_r f(x) = Q_r f(y)$ при $r \geq d_*(x, y)$. Поэтому функция $Q_r f(x)$ постоянна и по r , и по x . Из (3.15) следует, что $f = Pf$ также постоянна.

Чтобы доказать второе утверждение теоремы, заметим, что 0 является собственным значением оператора $\mathcal{L}_\infty$, поскольку $\mathcal{L}_\infty 1 = 0$. Предположим, что $\mathcal{L}_\infty f = 0$, и докажем, что $f \equiv \text{const}$, откуда будет следовать, что кратность собственного значения 0 равна 1. По предположению имеем $f \in \mathcal{B}_b$ и

$$\frac{f - P^t f}{t} \xrightarrow{\mathcal{B}_b} 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Поскольку семейство $\left\{ \frac{f - P^t f}{t} \right\}_{t>0}$ равномерно ограничено, по теореме о мажорируемой сходимости получаем, что для любого $r \geq 0$

$$Q_r \left(\frac{f - P^t f}{t} \right) \xrightarrow{\mathcal{B}_b} 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

что в свою очередь влечет, что для всех $s \geq 0$

$$\frac{P^s f - P^{s+t} f}{t} = P^s \left(\frac{f - P^t f}{t} \right) \xrightarrow{\mathcal{B}_b} 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Следовательно, для любого $x \in X$ функция $s \mapsto P^s f(x)$ имеет производную, равную 0, и потому постоянна. Значит, $f = Pf$, и в силу первого утверждения теоремы мы заключаем, что $f = \text{const}$. Теорема доказана.

4. Моменты марковского процесса

Пусть $\{\mathcal{X}_t\}$ – марковский процесс, связанный с полугруппой $\{P^t\}$. Для любого $\gamma > 0$ момент процесса порядка γ определяется формулой

$$M_\gamma(x, t) = \mathbb{E}_x(d_*(x, \mathcal{X}_t)^\gamma),$$

где $\mathbb{E}_x$ – математическое ожидание относительно вероятностной меры на пространстве траекторий процесса $\{\mathcal{X}_t\}$ с $\mathcal{X}_0 = x$. В терминах ядра теплопроводности $p(t, x, y)$ момент задается равенством

$$M_\gamma(x, t) = \int_X d_*(x, y)^\gamma p(t, x, y) d\mu(y). \quad (4.1)$$

Целью этого раздела является оценка $M_\gamma(x, t)$ как функции от t и γ .

Начнем с двух лемм. Мы используем функцию объема (2.48), т. е.

$$V(x, r) = \mu(B_r^*(x)),$$

и ее усредненные моменты порядка γ , т. е.

$$R_\gamma(x, \tau) = \frac{1}{V(x, \tau)} \int_{(0, \tau]} r^\gamma dV(x, r).$$

ЛЕММА 4.1. Для всех $x \in X$, $t > 0$ и $\gamma > 0$

$$M_\gamma(x, t) = t \int_0^\infty R_\gamma\left(x, \frac{1}{\tau}\right) e^{-\tau t} d\tau = \int_0^\infty R_\gamma\left(x, \frac{t}{s}\right) e^{-s} ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенства (4.1) и (2.24), а также определение 2.8 спектральной функции в терминах функции объема, получаем

$$\begin{aligned} M_\gamma(x, t) &= \int_X d_*(x, y)^\gamma p(t, x, y) d\mu(y) \\ &= \int_{(0, \infty)} r^\gamma \left(t \int_0^{1/r} N(x, \tau) e^{-\tau t} d\tau \right) dV(x, r) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{(0, 1/\tau)} \frac{r^\gamma}{V(x, 1/\tau)} dV(x, r) \right) t e^{-\tau t} d\tau = \int_0^\infty R_\gamma\left(x, \frac{1}{\tau}\right) t e^{-\tau t} d\tau. \end{aligned}$$

В третьем тождестве мы использовали теорему Фубини. Лемма доказана.

Функция объема $r \mapsto V(x, r)$ не убывает и принимает значения от 0 до $\mu(X)$. В компактном случае имеем $V(x, r) = \mu(X)$ для всех $r \geq r_{\max}^* = r_{\max}^*(x)$, где $r_{\max}^*(x)$ – наибольшее значение в $\Lambda(x)$ (см. (3.5)). Если точка x изолирована, то $V(x, r) = \mu\{x\}$ для всех $0 \leq r < r_0^* = r_0^*(x)$, где $r_0^*(x)$ – наименьшее положительное значение в $\Lambda(x)$.

ЛЕММА 4.2. *Для любых заданных $x \in X$ и $\gamma > 0$ выполняются следующие свойства.*

(а) *Функция $\tau \mapsto R_\gamma(x, \tau)$ неубывающая.*

Если X компактно, то $R_\gamma(x, \tau) = R_\gamma(x, r_{\max}^(x))$ для всех $\tau \geq r_{\max}^*(x)$.*

Если X дискретно и бесконечно, то $R_\gamma(x, \tau) = R_\gamma(x, r_0^(x))$ для всех $0 < \tau \leq r_0^*(x)$.*

(б) *Для всех $\tau > 0$ выполняется неравенство*

$$R_\gamma(x, \tau) \leq \tau^\gamma,$$

и если функция объема $r \mapsto V(x, r)$ удовлетворяет обратному свойству удвоения, то существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$R_\gamma(x, \tau) \geq c\tau^\gamma \quad (4.2)$$

для всех $\tau > 0$. В недискретном компактном случае, если функция объема всего лишь удовлетворяет обратному свойству удвоения в нуле, то (4.2) выполняется для всех $0 < \tau < r_{\max}^(x)$. В дискретном бесконечном случае, если функция объема всего лишь удовлетворяет обратному свойству удвоения на бесконечности, то (4.2) выполняется для всех $\tau > r_0^*(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать первую часть пункта (а), проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} R_\gamma(x, \tau) &= \frac{1}{V(x, \tau)} \left(\tau^\gamma V(x, \tau) - \int_{(0, \tau]} V(x, s) ds^\gamma \right) \\ &= \int_{(0, \tau]} \left(1 - \frac{V(x, s)}{V(x, \tau)} \right) ds^\gamma, \end{aligned}$$

откуда следует, что функция $\tau \mapsto R_\gamma(x, \tau)$ неубывающая.

Оставшаяся часть пункта (а) несложна.

Что касается пункта (б), общая верхняя оценка на $R_\gamma(x, \tau)$ очевидна. Если функция объема удовлетворяет обратному свойству удвоения, то в соответствующей области значений имеем

$$\begin{aligned} R_\gamma(x, \tau) &\geq \frac{1}{V(x, \tau)} (\delta\tau)^\gamma (V(x, \tau) - V(x, \delta\tau)) \\ &= (\delta\tau)^\gamma \left(1 - \frac{V(x, \delta\tau)}{V(x, \tau)} \right) \geq \delta^\gamma (1 - \kappa) \tau^\gamma = c\tau^\gamma \end{aligned}$$

для подходящих постоянных $0 < \kappa, c < 1$. Лемма доказана.

Теперь, чтобы оценить функцию момента $t \mapsto M_\gamma(x, t)$, нам нужно оценить интеграл типа Лапласа, заданный формулой из леммы 4.1. Мы займемся такими оценками в двух технических предложениях 4.6 и 4.7 в конце этого раздела. Перед этим, в следующих трех теоремах, мы сформулируем результаты, касающиеся функции момента.

ТЕОРЕМА 4.3. *Предположим, что (X, d) не компактно и не имеет изолированных точек. Тогда выполняются следующие свойства.*

(1) *Для всех $x \in X$, $t > 0$ и $0 < \gamma < 1$*

$$M_\gamma(x, t) \leq \frac{t^\gamma}{1 - \gamma}.$$

(2) *Если для некоторого $x \in X$ функция объема удовлетворяет обратному свойству удвоения, то при любом $0 < \gamma < 1$*

$$M_\gamma(x, t) \geq \frac{c}{1 - \gamma} t^\gamma$$

для всех $x, t > 0$ и некоторого $c > 0$. Более того,

$$M_\gamma(z, t) = \infty$$

для всех $z, t > 0$ и $\gamma \geq 1$.

ТЕОРЕМА 4.4. *Предположим, что (X, d) дискретно и бесконечно. Тогда выполняются следующие свойства.*

(а) *Для всех $x, t > 0$ и $0 < \gamma < 1$*

$$M_\gamma(x, t) \leq \frac{C}{1 - \gamma} \min\{t, t^\gamma\}$$

с некоторым $C > 0$.

(б) *Если для некоторого (равносильно, для всех) $x \in X$ функция объема удовлетворяет обратному свойству удвоения на бесконечности, то при любом $0 < \gamma < 1$*

$$M_\gamma(z, t) \geq \frac{c}{1 - \gamma} \min\{t, t^\gamma\}$$

для всех $z, t > 0$ и для некоторого $c > 0$. Более того,

$$M_\gamma(z, t) = \infty$$

для всех $z, t > 0$ и всех $\gamma \geq 1$.

Предположим теперь, что (X, d) компактно, и пусть D – его d_* -диаметр. В силу лемм 4.1 и 4.2 для всех $x \in X$, $\gamma > 0$ и $t > 0$ имеем

$$M_\gamma(x, t) \leq R_\gamma(x, D) \leq D^\gamma,$$

откуда мы получаем информацию о поведении функции момента $t \mapsto M_\gamma(x, t)$ в нуле.

ТЕОРЕМА 4.5. *Предположим, что (X, d) не дискретно и компактно. Тогда выполняются следующие свойства.*

(1) *Существует такая постоянная $C > 0$, что для всех x и всех $0 < t \leq 1$ выполняется неравенство*

$$M_\gamma(x, t) \leq C \begin{cases} t, & \text{если } \gamma > 1, \\ t \left(\log \frac{1}{t} + 1 \right), & \text{если } \gamma = 1, \\ t^\gamma, & \text{если } \gamma < 1. \end{cases}$$

(2) *Если для некоторого $x \in X$ функция объема удовлетворяет обратному свойству удвоения в нуле, то существует такая постоянная $c > 0$, что для всех z и всех $0 < t \leq 1$ выполняется неравенство*

$$M_\gamma(z, t) \geq c \begin{cases} t, & \text{если } \gamma > 1, \\ t \left(\log \frac{1}{t} + 1 \right), & \text{если } \gamma = 1, \\ t^\gamma, & \text{если } \gamma < 1. \end{cases}$$

Теперь мы приведем технические подробности относительно оценок типа Лапласа, из которых следуют теоремы 4.3, 4.4 и 4.5. В следующих двух предложениях M и R – две неотрицательные неубывающие функции, связанные интегралом типа Лапласа

$$M(t) = \int_0^\infty R\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-\tau} d\tau.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Пусть задано $\gamma > 0$.*

(1) *Предположим, что*

$$As^\gamma \geq R(s) \quad (\text{соответственно } R(s) \geq Bs^\gamma) \quad (4.3)$$

для некоторого $A > 0$ (соответственно $B > 0$) и всех $s > 0$. Тогда для всех $0 < \gamma < 1$ и всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{At^\gamma}{1-\gamma} \geq M(t) \quad (\text{соответственно } M(t) \geq \frac{Bt^\gamma}{(1-\gamma)e}).$$

(2) *Предположим, что имеется $t_0 > 0$ такое, что $R(s) = 0$ для всех $0 < s < t_0$. Предположим также, что первое (соответственно второе) неравенство в (4.3) выполняется для всех $s > t_0$. Тогда*

$$M(t) \leq \frac{c}{1-\gamma} \min \left\{ \frac{t}{t_0}, \left(\frac{t}{t_0} \right)^\gamma \right\} \\ (\text{соответственно } M(t) \geq \frac{c'}{1-\gamma} \min \left\{ \frac{t}{t_0}, \left(\frac{t}{t_0} \right)^\gamma \right\})$$

для всех $0 < \gamma < 1$, всех $t > 0$ и некоторых постоянных $c, c' > 0$.

(3) *Из предположения $\gamma \geq 1$ и нижней оценки $R(s) \geq Bs^\gamma$ следует, что $M(t) = \infty$ для всех $t > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что для $0 < \gamma < 1$ гамма-функция удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{(1-\gamma)e} < \Gamma(1-\gamma) < \frac{1}{1-\gamma},$$

откуда в силу монотонности интеграла типа Лапласа вытекает первое утверждение.

Чтобы доказать второе утверждение, запишем

$$M(t) = \int_{\{t/s \geq t_0\}} R\left(\frac{t}{s}\right) e^{-s} ds.$$

Сначала предположим, что $R(s) \leq As^\gamma$ для всех $0 < s < \infty$. Тогда получим

$$\begin{aligned} M(t) &\leq A \int_{\{t/s \geq t_0\}} \left(\frac{t}{s}\right)^\gamma e^{-s} ds = At^\gamma \int_{\{s \leq t/t_0\}} s^{-\gamma} e^{-s} ds \\ &\leq At^\gamma \int_0^{t/t_0} s^{-\gamma} ds = \left(\frac{t}{t_0}\right) \frac{At_0^{-\gamma}}{1-\gamma}, \end{aligned}$$

и

$$M(t) \leq At^\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma} e^{-s} ds \leq \frac{At^\gamma}{1-\gamma} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma \frac{At_0^\gamma}{1-\gamma}.$$

Следовательно,

$$M(t) \leq \frac{A \max\{t_0, t_0^{-1}\}}{1-\gamma} \min\left\{\frac{t}{t_0}, \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma\right\}.$$

Теперь предположим, что $R(s) \geq Bs^\gamma$ для всех $s \geq t_0$. Тогда при $t/t_0 \geq 1$ имеем

$$M(t) \geq Bt^\gamma \int_0^{t/t_0} s^{-\gamma} e^{-s} ds \geq \frac{Bt^\gamma}{e} \int_0^1 s^{-\gamma} ds = \frac{Bt^\gamma}{(1-\gamma)e} = \frac{Bt_0^\gamma}{(1-\gamma)e} \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma.$$

Когда $t/t_0 \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} M(t) &\geq Bt^\gamma \int_0^{t/t_0} s^{-\gamma} e^{-s} ds \geq \frac{Bt^\gamma}{e} \int_0^{t/t_0} s^{-\gamma} ds \\ &= \frac{Bt^\gamma}{(1-\gamma)e} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-\gamma} = \frac{Bt_0^\gamma}{(1-\gamma)e} \left(\frac{t}{t_0}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M(t) \geq \frac{Bt_0^\gamma}{(1-\gamma)e} \min\left\{\frac{t}{t_0}, \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma\right\} \geq \frac{B \min\{t_0, 1\}}{(1-\gamma)e} \min\left\{\frac{t}{t_0}, \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma\right\}.$$

Это доказывает второе утверждение.

Для доказательства третьего утверждения заметим, что если $R(s) \geq Bs^\gamma$ для всех $s \geq t_0$ и $\gamma \geq 1$, то

$$M(t) \geq Bt^\gamma \int_0^{t/t_0} s^{-\gamma} e^{-s} ds = \infty$$

для всех $t > 0$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Предположим, что имеется $t_0 > 0$ такое, что $R(s) = R(t_0)$ для всех $s \geq t_0$. Предположим также, что первое (соответственно второе) неравенство в (4.3) выполняется для всех $0 < s \leq t_0$. Тогда*

$$M(t) \leq \begin{cases} c_1 \frac{t}{t_0}, & \text{если } \gamma > 1, \\ c_2 t \left(\log \frac{t}{t_0} + 1 \right), & \text{если } \gamma = 1, \\ c_3 \left(\frac{t}{t_0} \right)^\gamma, & \text{если } \gamma < 1, \end{cases}$$

соответственно $M(t) \geq \begin{cases} c'_1 \frac{t}{t_0}, & \text{если } \gamma > 1, \\ c'_2 t \left(\log \frac{t}{t_0} + 1 \right), & \text{если } \gamma = 1, \\ c'_3 \left(\frac{t}{t_0} \right)^\gamma, & \text{если } \gamma < 1, \end{cases}$

для всех $0 < t \leq t_0$ и некоторых положительных постоянных $c_1, c'_1, c_2, c'_2, c_3, c'_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma > 1$ и $0 < t < t_0$. В соответствии с нашим предположением имеем

$$M(t) = \int_{\{t/s \leq t_0\}} R\left(\frac{t}{s}\right) e^{-s} ds + R(t_0)(1 - e^{-t/t_0}).$$

Заметим, что при $0 < t < t_0$ выполнены неравенства

$$\frac{t}{2t_0} \leq 1 - e^{-t/t_0} \leq \frac{t}{t_0}.$$

Если $R(s) \leq As^\gamma$ для всех $0 < s < t_0$, то

$$\begin{aligned} M(t) &\leq At^\gamma \int_{t/t_0}^{\infty} s^{-\gamma} e^{-s} ds + \frac{R(t_0)t}{t_0} \leq As^\gamma \int_{t/t_0}^{\infty} s^{-\gamma} ds + \frac{R(t_0)t}{t_0} \\ &\leq \frac{At^\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1-\gamma} + \frac{R(t_0)t}{t_0} = \frac{t}{t_0} \left(R(t_0) + \frac{At_0^\gamma}{\gamma - 1} \right). \end{aligned}$$

Если же $R(s) \geq Bs^\gamma$ для всех $0 < s < t_0$, то

$$M(t) \geq \frac{R(t_0)}{2} \frac{t}{t_0}.$$

Предположим, что $0 < \gamma < 1$ и $0 < t < t_0$. Снова, если $R(s) \leq As^\gamma$ для всех $0 < s < t_0$, то

$$\begin{aligned} M(t) &\leq At^\gamma \int_{t/t_0}^{\infty} s^{-\gamma} e^{-s} ds + \frac{R(t_0)t}{t_0} \leq At^\gamma \Gamma(1-\gamma) + R(t_0) \frac{t}{t_0} \\ &\leq \frac{At^\gamma}{1-\gamma} + R(t_0) \frac{t}{t_0} = \frac{At_0^\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{t}{t_0} \right)^\gamma + R(t_0) \frac{t}{t_0} \\ &\leq \left(\frac{t}{t_0} \right)^\gamma \left(\frac{At^\gamma}{1-\gamma} + R(t_0) \right). \end{aligned}$$

Если же $R(s) \geq Bs^\gamma$ для всех $0 < s < T$, то

$$M(t) \geq Bt^\gamma \int_{t/t_0}^{\infty} s^{-\gamma} e^{-s} ds \geq Bt^\gamma \int_1^{\infty} s^{-\gamma} e^{-s} ds \geq \left(\frac{t}{t_0} \right)^\gamma \frac{B \min\{t_0, 1\}}{e^2}.$$

Наконец, предположим, что $\gamma = 1$ и $0 < t < t_0$. Тогда если $R(s) \leq As^\gamma$ для всех $0 < s < t_0$, то

$$\begin{aligned} M(t) &\leq At \int_{t/T}^{\infty} s^{-1} e^{-s} ds + \frac{R(T)t}{T} \\ &= At \left(\int_1^{\infty} s^{-1} e^{-s} ds + \int_{t/t_0}^1 s^{-1} e^{-s} ds \right) + \frac{R(t_0)t}{t_0} \\ &\leq At \left(\int_1^{\infty} \frac{ds}{s^2} + \int_{t/t_0}^1 \frac{ds}{s} \right) + \frac{R(t_0)t}{t_0} = \left(A + \frac{R(t_0)}{t_0} \right) t \left(\log \frac{t_0}{t} + 1 \right). \end{aligned}$$

Если же $R(s) \geq Bs^\gamma$ для всех $0 < s < t_0$, то

$$\begin{aligned} M(t) &\geq Bt \int_{t/t_0}^{\infty} s^{-1} e^{-s} ds + \frac{R(t_0)t}{2t_0} \\ &\geq \frac{Bt}{e} \int_{t/t_0}^1 \frac{ds}{s} + \frac{R(t_0)t}{2t_0} = \frac{Bt}{e} \log \frac{t_0}{t} + \frac{R(t_0)t}{2t_0} \\ &= \frac{Bt}{e} \left(\log \frac{t_0}{t} + \frac{R(t_0)e}{2Bt_0} \right) \geq \min \left\{ \frac{R(t_0)}{2t_0}, \frac{B}{e} \right\} t \left(\log \frac{t_0}{t} + 1 \right). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Из доказанных предложений вытекает справедливость теорем 4.3, 4.4 и 4.5.

5. Анализ в $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_p^n$

5.1. Оператор p -адической дробной производной. Рассмотрим поле $\mathbb{Q}_p$ p -адических чисел, наделенное p -адической нормой $\|x\|_p$ и p -адической ультраметрикой $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$. Пусть μ_p — мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$, нормированная так, что $\mu_p(\mathbb{Z}_p) = 1$. Пусть $\mathcal{V}_c$ — пространство локально постоянных функций на $\mathbb{Q}_p$ с компактным носителем, которые будут рассматриваться как пробные функции на $\mathbb{Q}_p$.

Понятие p -адической дробной производной, тесно связанное с концепцией p -адической квантовой механики, было введено в работах В. С. Владимирова [57], В. С. Владимирова и И. В. Воловича [58] и В. С. Владимирова, И. В. Воловича и Е. И. Зеленова [59]. В частности, однопараметрическое семейство $\{\mathfrak{D}^\alpha\}_{\alpha>0}$ операторов, называемых операторами дробной производной порядка α , было введено в [57].

Напомним, что преобразование Фурье $\mathcal{F}: f \mapsto \widehat{f}$ функции f на самодвойственной локально компактной абелевой группе $\mathbb{Q}_p$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\theta) = \int_{\mathbb{Q}_p} \langle x, \theta \rangle f(x) d\mu_p(x),$$

где $x, \theta \in \mathbb{Q}_p$,

$$\langle x, \theta \rangle = \exp(2\pi\sqrt{-1}\{x\theta\})$$

и $\{x\theta\}$ – дробная часть p -адического числа $x\theta$ (ср. с (2.36)). Известно, что $\mathcal{F}$ – линейный изоморфизм пространства $\mathcal{V}_c$ на себя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Оператор $(\mathfrak{D}^\alpha, \mathcal{V}_c)$, $\alpha > 0$, определяется через преобразование Фурье на локально компактной абелевой группе $\mathbb{Q}_p$ равенством

$$\widehat{\mathfrak{D}^\alpha f}(\xi) = \|\xi\|_p^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Вышеупомянутыми авторами показано, что оператор $(\mathfrak{D}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ можно записать в виде сингулярного интегрального оператора типа Римана–Лиувилля:

$$\mathfrak{D}^\alpha f(x) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x) - f(y)}{\|x - y\|_p^{1+\alpha}} d\mu_p(y). \quad (5.1)$$

Цель этого пункта, в частности, состоит в том, чтобы показать, что оператор $(\mathfrak{D}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ в действительности является ограничением на $\mathcal{V}_c$ подходящего изотропного лапласиана. Мы используем следующую функцию распределения расстояний:

$$\sigma_\alpha(r) = \exp\left(-\left(\frac{p}{r}\right)^\alpha\right).$$

Обозначим $\{P_\alpha^t\}$ изотропную полугруппу, связанную с тройкой $(d_p, \mu_p, \sigma_\alpha)$, и пусть $\mathcal{L}_\alpha$ – соответствующий лапласиан.

ТЕОРЕМА 5.2. Для любого $\alpha > 0$ имеем

$$(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{V}_c) = (\mathfrak{D}^\alpha, \mathcal{V}_c). \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.12 для любого $f \in \mathcal{V}_c$ имеем

$$\mathcal{L}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} (f(x) - f(y)) J_\alpha(x, y) d\mu_p(y),$$

где

$$J_\alpha(x, y) = \int_{d_*(x, y)}^\infty \frac{s^{-2} ds}{\mu_p(B_s^*(x))}.$$

Как в примере 2.24, имеем

$$d_*(x, y) = \left(\frac{\|x - y\|_p}{p} \right)^\alpha, \quad (5.3)$$

откуда

$$B_s^*(x) = B_{ps^{1/\alpha}}(x).$$

Замена $r = ps^{1/\alpha}$ дает

$$J_\alpha(x, y) = p^\alpha \int_{\|x-y\|_p}^\infty \frac{\alpha r^{-\alpha-1} dr}{\mu_p(B_r(x))}.$$

Поскольку множество значений метрики $\|x - y\|_p$ есть $\{p^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, из (2.37) получаем, что

$$\mu_p(B_r(x)) = p^n, \quad \text{если } p^n \leq r < p^{n+1}, \quad (5.4)$$

откуда следует, что при $\|x - y\|_p = p^k$

$$\begin{aligned} \int_{p^k}^\infty \frac{\alpha r^{-\alpha-1} dr}{\mu_p(B_r(x))} &= \sum_{n \geq k} \int_{p^n}^{p^{n+1}} \frac{\alpha r^{-\alpha-1} dr}{\mu_p(B_r(x))} \\ &= \sum_{n \geq k} \int_{p^n}^{p^{n+1}} \frac{-dr^{-\alpha}}{p^n} = \sum_{n \geq k} \frac{1}{p^n} \left(\frac{1}{p^{n\alpha}} - \frac{1}{p^{(n+1)\alpha}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right) \sum_{n \geq k} \frac{1}{p^{n(\alpha+1)}} = \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right) \frac{p^{-k(\alpha+1)}}{1 - p^{-(\alpha+1)}} \\ &= \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{-(\alpha+1)}} \left(\frac{1}{p^k} \right)^{\alpha+1} = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{-(\alpha+1)}} \left(\frac{1}{\|x - y\|_p} \right)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем тождество

$$J_\alpha(x, y) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \frac{1}{\|x - y\|_p^{\alpha+1}}, \quad (5.5)$$

которое ввиду (5.1) завершает доказательство теоремы.

Ядро теплопроводности для полугруппы $\{P_\alpha^t\}$ было изучено в примере 2.24. Мы сформулируем здесь этот результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 5.3. *Полугруппа $\{P_\alpha^t\}$ допускает непрерывную переходную плотность $p_\alpha(t, x, y)$ относительно меры Хаара μ_p , которая удовлетворяет для всех $t > 0$ и $x, y \in \mathbb{Q}_p$ оценке*

$$p_\alpha(t, x, y) \simeq \frac{t}{(t^{1/\alpha} + \|x - y\|_p)^{1+\alpha}}. \quad (5.6)$$

Верхняя оценка в (5.6) была также получена другим методом А. Н. Кочубе-ем [39; гл. 4.1, лемма 4.1].

ТЕОРЕМА 5.4. *Полугруппа $\{P_\alpha^t\}$ является невозвратной тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$. В случае невозвратности ее функция Грина g_α явно задается равенством*

$$g_\alpha(x, y) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \|x - y\|_p^{\alpha-1}. \quad (5.7)$$

Формула (5.7) для фундаментального решения оператора $\mathfrak{D}_\alpha$, действующего в пространстве $\mathcal{V}'_c$ распределений Брюа, была получена В. С. Владимировым [57; теорема 1] и А. Н. Кочубеем [39; гл. 2.2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что неравенство $\alpha < 1$ равносильно невозвратности, было показано в примере 2.30. Предполагая, что $\alpha < 1$, в силу (2.45) получаем

$$g_\alpha(x, y) = \int_{d_*(x, y)}^\infty \frac{ds}{\mu_p(B_s^*(x))} = \frac{1}{p^\alpha} \int_{\|x-y\|_p}^\infty \frac{\alpha r^{\alpha-1} dr}{\mu_p(B_r(x))}.$$

Полагая $\|x - y\|_p = p^k$ и используя (5.4), получаем

$$\begin{aligned} g_\alpha(x, y) &= \frac{1}{p^\alpha} \sum_{n \geq k} \int_{p^n}^{p^{n+1}} \frac{dr^\alpha}{p^n} = \frac{1}{p^\alpha} \sum_{n \geq k} \frac{1}{p^n} (p^{(n+1)\alpha} - p^{n\alpha}) \\ &= \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} p^{(\alpha-1)k}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы.

Обозначим через $\mathcal{L}_{\alpha, q}$ генератор полугруппы $\{P_\alpha^t\}$, действующей в $L^q(\mu_p)$, $1 \leq q < \infty$. Применяя следствие 3.9 и теорему 3.13, получаем следующее.

ТЕОРЕМА 5.5. *Для любого $\alpha > 0$ и $1 \leq q < \infty$ имеем*

$$\text{spec } \mathcal{L}_{\alpha, q} = \{p^{\alpha k} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

Каждое $\lambda_k = p^{\alpha k}$ является собственным значением бесконечной кратности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно только показать, что кратность числа λ_k бесконечна. В общей постановке теоремы 3.8 и следствия 3.9 некоторые собственные значения вполне могут иметь конечную кратность, а некоторые нет. Действительно, каждый шар B с минимальным положительным d_* -радиусом ρ порождает конечномерное собственное пространство $\mathcal{H}_B$, состоящее из собственных функций с собственным значением $1/\rho$. Следовательно, собственное значение $1/\rho$ имеет конечную кратность тогда и только тогда, когда имеется только конечное число различных шаров d_* -радиуса ρ .

В настоящей постановке в $\mathbb{Q}_p$ имеется бесконечно много непересекающихся шаров одного и того же радиуса ρ , так как все они получаются сдвигами одного такого шара. Таким образом, все собственные значения имеют бесконечную кратность. Теорема доказана.

Пусть $\{X_t\}$ – марковский процесс на $\mathbb{Q}_p$, управляемый марковской полугруппой $\{P_\alpha^t\}_{t>0}$. Полугруппа инвариантна относительно сдвигов, откуда следует, что процесс обладает независимыми и стационарными приращениями. Для

любых заданных $\gamma > 0$ и $t > 0$ рассмотрим момент порядка γ процесса $\mathcal{X}_t$, определенного в терминах p -адического расстояния $d_p(x, y)$:

$$\mathcal{M}_\gamma(t) = \mathbb{E}(\|\mathcal{X}_t\|_p^\gamma),$$

где $\mathbb{E}$ – математическое ожидание относительно вероятностной меры на пространстве траекторий процесса, начинающегося в 0. Применяя теорему 4.3 и используя соотношение (5.3) между d_* и $\|\cdot\|_p$, получаем следующие оценки.

ТЕОРЕМА 5.6. *Момент $\mathcal{M}_\gamma(t)$ конечен тогда и только тогда, когда $\gamma < \alpha$. В этом случае*

$$\frac{\kappa t^{\gamma/\alpha}}{\alpha - \gamma} \leq \mathcal{M}_\gamma(t) \leq \frac{\alpha t^{\gamma/\alpha}}{\alpha - \gamma}$$

для некоторого $\kappa > 0$.

5.2. Сферически симметричные марковские полугруппы. Пусть $\{P^t\}_{t \geq 0}$ – симметричная инвариантная относительно сдвигов марковская полугруппа на аддитивной абелевой группе $\mathbb{Q}_p$. Эта полугруппа действует в $C_0(\mathbb{Q}_p)$ – банаховом пространстве непрерывных функций, обращающихся в нуль на ∞ . Следовательно, существует слабо непрерывная сверточная полугруппа $\{p_t\}_{t > 0}$ симметричных вероятностных мер на $\mathbb{Q}_p$ такая, что

$$P^t f(x) = p_t * f(x). \quad (5.8)$$

Так как вероятностные меры p_t симметричны, выполняется следующее тождество, которое является основным в теории безгранично делимых распределений:

$$\hat{p}_t(\zeta) = \exp(-t\Psi(\zeta)),$$

где $\Psi: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}_+$ – отрицательно определенная симметричная функция на $\mathbb{Q}_p$. По формуле Леви–Хинчина выполняется равенство

$$\Psi(\zeta) = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} (1 - \operatorname{Re}\langle x, \zeta \rangle) d\mathfrak{J}(x),$$

где $\mathfrak{J}$ – симметричная мера Радона на $\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$, т.е. мера Леви, связанная с отрицательно определенной функцией Ψ (см. подробности в книге К. Берга и Г. Форста [10]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.7. Для любого $a \in \mathbb{Q}_p$ такого, что $\|a\|_p = 1$, определим оператор вращения $\theta_a: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ посредством $\theta_a(x) = ax$. Будем говорить, что описанная выше марковская полугруппа $\{P^t\}$ инвариантна относительно вращений, если

$$\theta_a(p_t) = p_t \quad \text{для всех } a \in \mathbb{Q}_p \text{ таких, что } \|a\|_p = 1. \quad (5.9)$$

Пусть $\mathcal{L}$ – генератор полугруппы $\{P^t\}$, т.е. $P^t = \exp(-t\mathcal{L})$. Легко видеть, что (5.9) равносильно тождеству $\theta_a \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \theta_a$. В этом случае будем также говорить, что $\mathcal{L}$ инвариантен относительно вращений. По построению любая изотропная марковская полугруппа $\{P^t\}$, определенная на ультратметрическом

пространстве с мерой $(\mathbb{Q}_p, d_p, \mu_p)$, инвариантна относительно вращений. Как мы увидим, класс всех изотропных марковских полугрупп действительно является собственным подмножеством класса инвариантных относительно вращений марковских полугрупп.

Предположим, что полугруппа $\{P^t\}$ инвариантна относительно вращений. Тогда для всех a таких, что $\|a\|_p = 1$, имеем

$$\Psi(a\zeta) = \Psi(\zeta) \quad \text{и} \quad \theta_a(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J}. \quad (5.10)$$

Поскольку мера Хаара μ_p каждой сферы строго положительна, из (5.9) и (5.10) следует, что меры p_t и $\mathfrak{J}$ абсолютно непрерывны относительно μ_p и имеют плотности $p_t(x)$ и $J(x)$, зависящие только от $\|x\|_p$. То же верно для функции Ψ , так что

$$J(x) = j(\|x\|_p) \quad \text{и} \quad \Psi(\zeta) = \psi(\|\zeta\|_p).$$

Все вышесказанное показывает, что для генератора $\mathcal{L}$ полугруппы $\{P^t\}$ имеем $\mathcal{V}_c \subset \text{dom } \mathcal{L}$ и

$$\mathcal{L}u = \psi(\mathfrak{D})u, \quad u \in \mathcal{V}_c, \quad (5.11)$$

где $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^1$ – оператор дробной производной порядка $\alpha = 1$, который мы отождествляем с изотропным лапласианом $\mathcal{L}_1$ по теореме 5.2.

Из (5.11) и (5.2) следует, что собственные функции $\{f_C : C \in \mathcal{K}\}$ оператора $(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c)$ в L^2 образуют полную систему, как описано в теореме 3.8. Каждому шару B радиуса p^m ставится в соответствие $(p-1)$ -мерное собственное пространство $\mathcal{H}_B$, натянутое на функции f_C , где C пробегает все шары, являющиеся последовательностями шара B , и соответствующее собственное значение равно

$$\lambda(m) = \psi(p^{-m+1}).$$

Пусть $\{a(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ – последовательность вещественных чисел, удовлетворяющих условиям

$$a(m) \geq a(m+1), \quad a(+\infty) = 0 \quad \text{и} \quad 0 < a(-\infty) = W \leq +\infty. \quad (5.12)$$

Определим последовательность $\{\lambda(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ равенствами

$$\lambda(m) = a(m) - (p-1)^{-1} \{a(m+1) - a(m)\}. \quad (5.13)$$

ТЕОРЕМА 5.8. *Последовательность $\{\lambda(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ вещественных чисел представляет собой спектр $\text{spes } \mathcal{L}$ инвариантного относительно вращений лапласиана $\mathcal{L}$ на $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда она задана равенствами (5.13) с последовательностью $a(m)$, удовлетворяющей условиям (5.12).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим инвариантный относительно вращений лапласиан $\mathcal{L} = \psi(\mathfrak{D})$. Вычислим неотрицательно определенную функцию $\Psi(\zeta) = \psi(\|\zeta\|_p)$, связанную с $\mathcal{L}$. Имеем

$$\begin{aligned} \psi(\|\zeta\|_p) &= \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} (1 - \text{Re}\langle x, \zeta \rangle) j(\|x\|_p) d\mu_p(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} j(p^k) \int_{\{x : \|x\|_p = p^k\}} (1 - \text{Re}\langle x, \zeta \rangle) d\mu_p(x). \end{aligned}$$

Согласно В. С. Владимирову [57; пример 4] имеем

$$\int_{\{x: \|x\|_p = p^k\}} \langle x, \zeta \rangle d\mu_p(x) = \begin{cases} p^k - p^{k-1}, & \text{если } \|\zeta\|_p \leq p^{-k}, \\ -p^{k-1}, & \text{если } \|\zeta\|_p = p^{-k+1}, \\ 0, & \text{если } \|\zeta\|_p \geq p^{-k+2}. \end{cases}$$

В частности,

$$\int_{\{x: \|x\|_p = p^k\}} d\mu_p(x) = p^k - p^{k-1}.$$

Пусть $\|\zeta\|_p = p^{-m+1}$; тогда приведенные выше вычисления дают

$$\psi(p^{-m+1}) = j(p^m)p^m + (1 - p^{-1}) \sum_{k \geq m+1} j(p^k)p^k. \quad (5.14)$$

Определим невозрастающую последовательность $\{a(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ равенствами

$$a(m) = (1 - p^{-1}) \sum_{k \geq m} j(p^k)p^k = (1 - p^{-1}) \int_{\{x: \|x\|_p \geq p^m\}} j(\|x\|_p) d\mu_p(x). \quad (5.15)$$

В силу (5.15) равенства (5.14) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(p^{-m+1}) &= \frac{p}{p-1} (a(m) - a(m+1)) + a(m+1) \\ &= a(m) - (p-1)^{-1} (a(m+1) - a(m)). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Пусть $\lambda(m)$ – собственное значение лапласиана $(\psi(\mathfrak{D}), \mathcal{V}_c)$, соответствующее шару B радиуса p^m . Тогда $\lambda(m) = \psi(p^{-m+1})$ и тождество (5.16) дает желаемый результат, а именно равенство (5.13).

Обратно, для заданной последовательности $\{a(m)\}$, удовлетворяющей (5.12), определим последовательность $\{\lambda(m)\}$ равенствами (5.13) и положим

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= \psi(\|\xi\|_p), \quad \text{где } \psi(p^m) = \lambda(-m+1), \\ J(x) &= j(\|x\|_p), \quad \text{где } j(p^m) = \frac{a(m) - a(m+1)}{p^m - p^{m-1}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Непосредственно показывается, что

$$\Psi(\zeta) = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}} (1 - \operatorname{Re}\langle x, \zeta \rangle) J(x) d\mu_p(x),$$

откуда следует, что Ψ – неотрицательно определенная функция. Следовательно, функция $\exp(-t\Psi)$ положительно определена, откуда следует, что она является преобразованием Фурье вероятностной меры p_t . Ясно, что $\{p_t\}_{t>0}$ – слабо непрерывная сверточная полугруппа вероятностных мер. По построению каждая мера p_t инвариантна относительно вращений. Наконец, мы определяем инвариантную относительно сдвигов марковскую полугруппу равенством $P^t f = f * p_t$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.9. *Во введенных выше обозначениях следующие утверждения равносильны:*

- (1) *последовательность $\lambda(m)$ невозрастающая;*
- (2) *последовательность $\psi(p^m)$ неубывающая;*
- (3) *последовательность $j(p^m)$ невозрастающая.*

В частности, если последовательность $a(m)$ выпуклая, то выполняется каждое из равносильных свойств (1)–(3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) является следствием соотношения $\lambda(m) = \psi(p^{-m+1})$. Чтобы доказать, что (1) $\Leftrightarrow$ (3), применяем (5.17) и получаем

$$\lambda(m) - \lambda(m+1) = (p^m - p^{m-1})(j(p^m) - j(p^{m+1})).$$

Отсюда следует эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Наконец, (5.13) и выпуклость $a(m)$ дают (1). Следствие доказано.

Далее рассмотрим строгую монотонность.

СЛЕДСТВИЕ 5.10. *Следующие утверждения равносильны:*

- (i) *последовательность $\lambda(m)$ строго убывает и $\lambda(-\infty) = +\infty$;*
- (ii) *последовательность $\psi(p^m)$ строго возрастает и $\psi(+\infty) = +\infty$;*
- (iii) *последовательность $j(p^m)$ строго убывает и*

$$\int j(\|x\|_p) d\mu_p(x) = +\infty;$$

(iv) *соответствующая инвариантная относительно вращений марковская полугруппа $\{P^t\}$ изотропна.*

В частности, если последовательность $a(m)$ строго выпукла и $a(-\infty) = +\infty$, то выполняется каждое из равносильных свойств (i)–(iv).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) следует из таких же рассуждений, как в доказательстве следствия 5.9. Выпуклость $a(m)$ вместе с равенством $a(-\infty) = +\infty$ влекут (i) с помощью тех же рассуждений. Остается показать, что (iv) $\Leftrightarrow$ (ii).

Предположим, что $\{P^t\}$ – изотропная марковская полугруппа, построенная в (1.3)–(1.8). Эта полугруппа допускает непрерывную переходную плотность $p(t, x, y) = p_t(x - y)$ относительно меры Хаара μ_p ; функция p_t задается равенством

$$p_t(y) = \int_0^\infty q_s(y) d\sigma^t(s), \quad \text{где } q_s(y) = \frac{1}{\mu_p(B_s(0))} \mathbf{1}_{B_s(0)}(y). \quad (5.18)$$

Чтобы найти преобразование Фурье $\widehat{p}_t(\xi)$, рассуждаем следующим образом. Шар $B_s(0)$, $p^k \leq s < p^{k+1}$, является компактной подгруппой $p^{-k}\mathbb{Z}_p$ группы $\mathbb{Q}_p$, откуда следует, что мера $\omega_s = q_s\mu_p$ совпадает с нормированной мерой Хаара этой компактной подгруппы. Поскольку для любой локально компактной абелевой группы преобразование Фурье нормированной меры Хаара любой компактной подгруппы является индикатором ее аннулирующей группы, а в нашем частном случае аннулятором группы $p^{-k}\mathbb{Z}_p$ является группа $p^k\mathbb{Z}_p$, получаем

$$\widehat{\omega}_s(\xi) = \mathbf{1}_{p^k\mathbb{Z}_p}(\xi) = \mathbf{1}_{[0, p^{-k}]}(\|\xi\|_p), \quad \text{где } p^k \leq s < p^{k+1}.$$

Следовательно, когда $\|\xi\|_p = p^{-l}$, имеем

$$\hat{p}_t(\xi) = \sum_{k: k \leq l} (\sigma^t(p^{k+1}) - \sigma^t(p^k)^t) = \sigma^t(p^{l+1}) = \exp(-t\psi(\|\xi\|_p)),$$

откуда

$$\psi(p^{-l}) = \log \frac{1}{\sigma(p^{l+1})}.$$

Согласно (1.5) последовательность $\sigma(p^l)$ предполагается строго возрастающей и стремящейся к нулю при $l \rightarrow -\infty$. Таким образом, $\psi(p^m)$ такая, как утверждается в (ii). Обратно, если дана строго возрастающая последовательность $\psi(p^m)$, как в (ii), мы определяем строго возрастающую последовательность

$$\sigma(p^m) = \exp(-\psi(p^{-m+1})).$$

Пусть $\sigma: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ – любая возрастающая биекция, принимающая значения $\sigma(p^m)$ в точках p^m . Определим функцию $p_t(y)$ равенством (5.18). Так как $\sigma(+\infty) = 1$, это вероятностная плотность относительно μ_p . Ясно, что $\{p_t\}_{t>0}$ – слабо непрерывная сверточная полугруппа вероятностных мер на $\mathbb{Q}_p$. Более того, каждая p_t инвариантна относительно вращений по построению. Таким образом, полугруппа $P^t f = f * p_t$ является изотропной. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. В [2] С. Альбеверии и В. Карвовски начинали с последовательности $\{a(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$, описанной в (5.12), и использовали классический подход обратных и прямых уравнений Колмогорова для построения марковской полугруппы $\{P^t\}$ на ультраметрическом пространстве с мерой $(\mathbb{Q}_p, d_p, \mu_p)$. В частности, они показали (см. [2; теорема 3.2 9]), что лапласиан $\mathcal{L}$ этой полугруппы обладает чисто точечным спектром $\{\lambda(m)\}$, определенным в (5.13), и $\lambda(m)$ -собственное пространство натянуто на функции f_B , где B пробегает все шары радиуса p^{m-1} . Наша теорема 5.8 показывает, что на самом деле класс марковских полугрупп, построенный в [2], совпадает с классом марковских полугрупп, инвариантных относительно вращений.

5.3. Пространства произведений. Пусть $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$ – конечная последовательность ультраметрических пространств; мы считаем, что все (X_i, d_i) сепарабельны и что все шары компактны. Пусть (X, d) – их декартово произведение: $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ и для $x = (x_i) \in X$ и $y = (y_i) \in Y$ положим

$$d(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Таким образом, (X, d) – сепарабельное ультраметрическое пространство, все шары в (X, d) компактны и, более того, каждый d -шар $B_r(a)$ в X является произведением d_i -шаров $B_r^i(a_i)$ в X_i того же радиуса.

Если на каждом (X_i, d_i) задана мера Радона μ_i , определим $\mu = \otimes \mu_i$ на (X, d) . Пусть $\mathcal{U}_c$ – множество всех локально постоянных функций на (X, d) с компактными носителями.

Рассмотрим ультраметрическое пространство с мерой (X, d, μ) . Согласно предыдущим пунктам существует богатый класс изотропных марковских полугрупп и соответствующих лапласианов на (X, d, μ) , таких как построенные

в (1.3)–(1.8). Благодаря структуре произведения пространства (X, d, μ) можно естественно определить нетривиальный и интересный класс марковских полугрупп и лапласианов, которые *не* изотропны. А именно, выбирая на каждом (X_i, d_i, μ_i) изотропную марковскую полугруппу $\{P_i^t\}$, определим марковскую полугруппу $\{P^t\}$ на (X, d, μ) как тензорное произведение полугрупп $\{P_i^t\}$:

$$P^t = \bigotimes_{i=1}^n P_i^t.$$

Полугруппа $\{P^t\}$ имеет следующее ядро теплопроводности:

$$p(t, x, y) = \prod_{i=1}^n p_i(t, x_i, y_i),$$

где p_i – ядро теплопроводности полугруппы $\{P_i^t\}$.

Генератор $\mathcal{L}$ полугруппы P^t можно описать следующим образом: $\mathcal{V}_c \subset \text{dom } \mathcal{L}$ и для любого $f \in \mathcal{V}_c$ имеем

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i f(x), \quad (5.19)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathcal{L}_i$ действует на x_i . Следовательно,

$$\mathcal{L}f(x) = \int_X (f(x) - f(y)) J(x, dy),$$

где

$$J(x, dy) = \sum_{i=1}^n J_i(x_i, y_i) d\mu_i(y_i)$$

и $J_i(x_i, y_i)$ – ядро генератора $\mathcal{L}_i$.

В частности, для каждого $x \in X$ меры $J(x, dy)$ и $\mu(dy)$ не обязательно взаимно абсолютно непрерывны (в случае, когда хотя бы одно из X_i совершенно, $J(x, dy)$ сингулярно относительно μ), откуда следует, что полугруппа $\{P^t\}$ не обязательно является изотропной марковской полугруппой.

В этой работе мы не собираемся развивать общую теорию пространств произведений. Нашей целью является подробное изучение двух конкретных примеров, связанных с p -адическим анализом.

В первом примере мы рассматриваем лапласиан Владимирова, который хорошо согласуется с вышеописанной общей конструкцией. Во втором примере мы рассматриваем лапласиан Тайблесона, определенный в терминах многомерных ядер Рисса (см. книгу М. Х. Тайблесона [55] и работу Х. Родригеса-Вега и В. А. Зунига-Галиндо [50]). Мы покажем, что лапласиан Тайблесона изотропен. Это позволит нам улучшить оценки ядра теплопроводности из [50] и получить некоторые новые результаты (невозвратность/возвратность, независимость L^p -спектра от $1 \leq p < \infty$, точные оценки моментов соответствующего марковского процесса и т. п.).

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p$ над полем $\mathbb{Q}_p$ и определим в $\mathbb{Q}_p^n$ норму

$$\|z\|_p = \max\{\|z_i\|_p : i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (5.20)$$

Ясно, что эта норма удовлетворяет ультраметрическому неравенству треугольника (1.1) и является однородной в следующем смысле:

$$\|az\|_p = \|a\|_p \|z\|_p \quad \text{для всех } a \in \mathbb{Q}_p, z \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Положим

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p,$$

так что $(\mathbb{Q}_p^n, d_p)$ – ультраметрическое пространство.

Пусть $\mu_p = \bigotimes \mu_{p,i}$ – аддитивная мера Хаара на абелевой группе $\mathbb{Q}_p^n$. Как и ранее, пусть $\mathcal{V}_c$ – множество всех локально постоянных функций с компактными носителями на ультраметрическом пространстве $(\mathbb{Q}_p^n, d_p)$. Напомним, что $\mathcal{V}_c$ – всюду плотное подмножество в $L^2 = L^2(\mathbb{Q}_p^n, \mu_p)$.

5.3.1. Лапласиан Владимирова. Для любого данного n -мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с элементами $\alpha_i > 0$ определим ультраметрику

$$d_{p,\alpha}(x, y) = \max\{\|x_i - y_i\|_p^{\alpha_i} : i = 1, 2, \dots, n\},$$

которую будем обозначать также $\|x - y\|_{p,\alpha}$. В частности, ультраметрика $d_p(x, y)$, определенная выше, соответствует случаю $\alpha = (1, \dots, 1)$. Тождественное отображение

$$(\mathbb{Q}_p^n, d_{p,\alpha}) \rightarrow (\mathbb{Q}_p^n, d_p)$$

является гомеоморфизмом, но оно не билипшицево, если только не выполняется $\alpha_i = 1$ для всех i . Этот факт играет существенную роль в изучении класса лапласианов, которые вводятся далее как частный случай лапласианов (5.19).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.12. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Для любой функции $f \in \mathcal{V}_c$ определим оператор

$$\mathfrak{V}^\alpha f(x) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{D}_{x_i}^{\alpha_i} f(x),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, а $\mathfrak{D}_{x_i}^{\alpha_i}$ – p -адическая дробная производная порядка α_i , действующая на x_i .

Оператор $\mathfrak{V}^\alpha$ на $\mathbb{Q}_p^3$ с $\alpha = (2, 2, 2)$ был введен В. С. Владимиром [57] в качестве аналога классического оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Этот оператор, который мы сокращенно обозначаем через $\mathfrak{V}^2$, инвариантен относительно сдвигов и однороден, т. е.

$$\mathfrak{V}^2 \tau_y(f) = \tau_y(\mathfrak{V}^2 f), \quad \text{где } \tau_y f(x) = f(x + y),$$

и

$$\mathfrak{V}^2 \theta_a(f) = \|a\|_p^2 \theta_a(\mathfrak{V}^2 f), \quad \text{где } \theta_a f(x) = f(ax_1, ax_2, ax_3).$$

Следовательно, функция Грина $g(x, y)$ оператора $\mathfrak{V}^2$ на $\mathbb{Q}_p^3$ также инвариантна относительно сдвигов и однородна:

$$g(x, y) = g(x - z, y - z), \quad g(ax, ay) = \frac{g(x, y)}{\|a\|_p}, \quad a \in \mathbb{Q}_p.$$

В частности, полагая $\mathfrak{E}(x) = g(x, 0)$, получаем для всех ненулевых $a \in \mathbb{Q}_p$ тождество

$$\mathfrak{E}(a, a, a) = \frac{\mathfrak{E}(1, 1, 1)}{\|a\|_p}.$$

Это тождество было отмечено в [57]. Оно дает представление о том, как функция Грина оператора $\mathfrak{V}^2$ (в терминологии В. С. Владимирова – фундаментальное решение уравнения $\mathfrak{V}^2 \mathfrak{E} = \delta$) ведет себя на бесконечности в нуле. Ниже, в предложении 5.15, мы докажем, что для всех ненулевых $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Q}_p^3$ справедливо

$$\mathfrak{E}(a_1, a_2, a_3) \simeq \frac{1}{\|a\|_p}. \quad (5.21)$$

По существу мы докажем аналогичную оценку для более общих операторов $\mathfrak{V}^\alpha$ без свойства однородности. Начнем с перечисления некоторых свойств оператора $(\mathfrak{V}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ из определения 5.12, которые вытекают непосредственно из соответствующих свойств “одномерных лапласианов” $\mathfrak{D}^{\alpha_i}$.

1. Оператор $(\mathfrak{V}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ является неотрицательно определенным симметричным оператором.

2. Оператор $(\mathfrak{V}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ допускает полную систему собственных функций с компактными носителями. В частности, оператор $(\mathfrak{V}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ является существенно самосопряженным.

3. Полугруппа $\exp(-t\mathfrak{V}^\alpha)$ симметрична и является марковской полугруппой. У нее есть ядро теплопроводности $p_\alpha(t, x, y)$, имеющее следующий вид:

$$p_\alpha(t, x, y) = \prod_{i=1}^n p_{\alpha_i}(t, x_i, y_i).$$

4. Полугруппа $\exp(-t\mathfrak{V}^\alpha)$ является невозвратной тогда и только тогда, когда

$$A := \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} > 1.$$

5. Для всех $f \in \mathcal{V}_c$ справедливо равенство

$$\mathfrak{V}^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} (f(x) - f(y)) J_\alpha(x, dy),$$

где

$$J_\alpha(x, dy) = \sum_{i_1}^n J_{\alpha_i}(x_i - y_i) d\mu_{p,i}(y_i)$$

и

$$J_{\alpha_i}(x_i - y_i) = \frac{p^{\alpha_i} - 1}{1 - p^{-\alpha_i - 1}} \frac{1}{\|x_i - y_i\|_p^{1 + \alpha_i}}.$$

В частности, полугруппа $\exp(-t\mathfrak{V}^\alpha)$ в случае $n > 1$ не является изотропной марковской полугруппой.

Заметим, что благодаря групповой структуре $\mathbb{Q}_p^n$ функции $(x, y) \mapsto p_\alpha(t, x, y)$ и $(x, y) \mapsto g_\alpha(x, y)$ инвариантны относительно сдвигов. Отсюда следует, что, полагая

$$p_\alpha(t, z) = p_\alpha(t, z, 0) \quad \text{и} \quad g_\alpha(z) = g_\alpha(z, 0),$$

мы получим

$$p_\alpha(t, x, y) = p_\alpha(t, x - y) \quad \text{и} \quad g_\alpha(x, y) = g_\alpha(x - y).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.13. Пусть

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}.$$

Тогда ядро теплопроводности удовлетворяет следующей оценке:

$$p_\alpha(t, z) \simeq t^{-A} \prod_{i=1}^n \min \left\{ 1, \frac{t^{1+1/\alpha_i}}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}} \right\} \quad (5.22)$$

равномерно для всех $t > 0$ и $z \in \mathbb{Q}_p^n$. В частности, для всех $t > \|z\|_{p,\alpha}$

$$p_\alpha(t, z) \simeq t^{-A}. \quad (5.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 5.3 имеем

$$p_{\alpha_i}(t, z_i) \simeq \frac{t}{(t^{1/\alpha_i} + \|z_i\|_p)^{1+\alpha_i}} \simeq \frac{1}{t^{1/\alpha_i}} \min \left\{ 1, \frac{t^{1+1/\alpha_i}}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}} \right\},$$

откуда следует утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.14. Полугруппа $\exp(-t\mathfrak{V}^\alpha)$ является невозвратной тогда и только тогда, когда $A > 1$. Если $A > 1$, то для всех $z \in \mathbb{Q}_p^n$ и некоторого $C_1 > 0$ выполняется неравенство

$$g_\alpha(z) \geq C_1 \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}} \right)^{A-1}.$$

Для любого $\kappa > 0$ определим множество

$$\Omega(\kappa) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p^n : \max_i \{ \|x_i\|_p^{\alpha_i} \} \leq \kappa \min_i \{ \|x_i\|_p^{\alpha_i} \} \right\}.$$

Тогда для всех $z \in \Omega(\kappa)$ и некоторой постоянной $C_2 > 0$, зависящей от κ , выполняется неравенство

$$g_\alpha(z) \leq C_2 \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}} \right)^{A-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Критерий невозвратности $A > 1$ следует из соотношения $p_\alpha(t, x, x) \simeq t^{-A}$. Чтобы доказать нижнюю оценку, воспользуемся (5.23) и запишем

$$g_\alpha(z) = \int_0^\infty p_\alpha(t, z) dt \geq \int_{\|z\|_{p,\alpha}}^\infty p_\alpha(t, z) dt \geq C_1 \int_{\|z\|_{p,\alpha}}^\infty t^{-A} dt = c_1 \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}} \right)^{A-1}.$$

С другой стороны, имеем

$$g_\alpha(z) = \left(\int_0^{\|z\|_{p,\alpha}} + \int_{\|z\|_{p,\alpha}}^\infty \right) p_\alpha(t, z) dt =: \text{I} + \text{II}.$$

Чтобы оценить член II, снова воспользуемся (5.23):

$$\text{II} \simeq \int_{\|z\|_{p,\alpha}}^\infty t^{-A} dt \simeq \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}} \right)^{A-1}.$$

Чтобы оценить член I, воспользуемся (5.22):

$$\begin{aligned} \text{I} &\leq c \int_0^{\|z\|_{p,\alpha}} t^{-A} \prod_{i=1}^n \frac{t^{1+1/\alpha_i}}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}} dt \\ &= c \int_0^{\|z\|_{p,\alpha}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}} t^n dt = c' \prod_{i=1}^n \frac{1}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}} \|z\|_{p,\alpha}^{n+1}. \end{aligned}$$

Когда $z \in \Omega(\kappa)$, получаем

$$\begin{aligned} \text{I} &\leq c'' \prod_{i=1}^n \frac{1}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}} \left(\min_i \{ \|z_i\|_p^{\alpha_i} \} \right)^{n+1} \leq c'' \min_i \{ \|z_i\|_p^{\alpha_i} \} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\|z_i\|_p} \\ &= c'' \min_i \{ \|z_i\|_p^{\alpha_i} \} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(\|z_i\|_p^{\alpha_i})^{1/\alpha_i}}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{(\|z_i\|_p^{\alpha_i})^{1/\alpha_i}} \leq \prod_{i=1}^n \frac{1}{(\min_j \{ \|z_j\|_p^{\alpha_j} \})^{1/\alpha_i}} = \left(\frac{1}{\min_j \{ \|z_j\|_p^{\alpha_j} \}} \right)^A,$$

откуда следует

$$\text{I} \leq c'' \left(\frac{1}{\min_j \{ \|z_j\|_p^{\alpha_j} \}} \right)^{A-1}.$$

Снова используя тот факт, что $z \in \Omega(\kappa)$, запишем

$$\left(\frac{1}{\min_j \{ \|z_j\|_p^{\alpha_j} \}} \right)^{A-1} \leq \left(\frac{\kappa}{\max_j \{ \|z_j\|_p^{\alpha_j} \}} \right)^{A-1} = c(\kappa) \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}} \right)^{A-1}.$$

Из полученных верхних оценок интегралов I и II следуют требуемые верхние оценки для $g_\alpha(z)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.15. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta, \dots, \beta)$ есть n -мультииндекс, в котором все элементы равны β . Предположим, что $(n-1)/2 < \beta < n$. Тогда полу группа $\exp(-t\mathfrak{V}^\alpha)$ является невозвратной и функция Грина $g_\alpha(z)$ удовлетворяет оценкам

$$g_\alpha(z) \simeq \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}} \right)^{A-1} \quad (5.24)$$

для всех $z \in \mathbb{Q}_p^n$ и некоторых $c_1, c_2 > 0$.

Поскольку $A = n/\beta$ и $\|z\|_{p,\alpha} = \|z\|_p^\beta$, оценка (5.24) равносильна оценке

$$g_\alpha(z) \simeq \left(\frac{1}{\|z\|_p} \right)^{n-\beta}. \quad (5.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Невозвратность следует из предложения 5.14, поскольку $A = n/\beta > 1$. То же предложение дает требуемую нижнюю оценку функции Грина. Чтобы доказать оценку сверху, заметим, что лапласиан $\mathfrak{V}^\alpha$ однороден, т. е.

$$\mathfrak{V}^\alpha \circ \theta_a = \|a\|_p^\beta \cdot \theta_a \circ \mathfrak{V}^\alpha$$

для всех $a \in \mathbb{Q}_p$. Отсюда следует, что функция Грина $g_\alpha(z)$ также однородна, т. е.

$$g_\alpha(az) = \|a\|_p^{n-\beta} g_\alpha(z)$$

для всех $a \in \mathbb{Q}_p$ и $z \in \mathbb{Q}_p^n$.

Без ограничения общности предположим, что $\|z\|_{p,\alpha} = \|z_1\|_p^\beta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} g_\alpha(z) &= g_\alpha\left(z_1\left(1, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1}\right)\right) = \|z_1\|_p^{n-\beta} g_\alpha\left(1, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}}\right)^{A-1} g_\alpha\left(1, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1}\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}}\right)^{A-1} \sup\left\{g_\alpha(1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}_p\right\}. \end{aligned}$$

Далее применим наше предположение $\beta > (n-1)/2$ и получим из (5.22), что

$$\begin{aligned} g_\alpha(1, x_2, \dots, x_n) &= \int_0^\infty p_\alpha(t, (1, x_2, \dots, x_n)) dt \\ &= \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) p_\alpha(t, (1, x_2, \dots, x_n)) dt \\ &\leq c \int_0^1 t^{-n/\beta} t^{1+1/\beta} dt + c' \int_1^\infty t^{-n/\beta} dt = c_2 < \infty, \end{aligned}$$

откуда следует требуемая верхняя оценка. Предложение доказано.

5.3.2. *Лапласиан Тайблесона.* Преобразование Фурье $\mathcal{F}: f \mapsto \widehat{f}$ функции f на локально компактной абелевой группе $\mathbb{Q}_p^n$ определяется формулой

$$\widehat{f}(\theta) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \langle x, \theta \rangle f(x) d\mu_p^n(x),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}_p^n$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in (\mathbb{Q}_p^n)^* = \mathbb{Q}_p^n$,

$$\langle x, \theta \rangle = \prod_{k=1}^n \langle x_k, \theta_k \rangle$$

и $d\mu_p^n(x) = d\mu_p(x_1) \cdots d\mu_p(x_n)$ – мера Хаара на $\mathbb{Q}_p^n$. Известно, что $\mathcal{F}$ – линейный изоморфизм из $\mathcal{V}_c$ на себя, что оправдывает следующее определение (ср. с определением 5.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.16. Оператор Тайблесона $\mathfrak{T}^\alpha$ для $\alpha > 0$ определяется на функциях $f \in \mathcal{V}_c$ формулой

$$\widehat{\mathfrak{T}^\alpha f}(\zeta) = \|\zeta\|_p^\alpha \widehat{f}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Из данного определения вытекает, что $(\mathfrak{T}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ – существенно самосопряженный и неотрицательно определенный оператор в L^2 . Этот оператор был введен М. Х. Тайблесом [55], а связанная с ним полугруппа $\exp(-t\mathfrak{T}^\alpha)$ изучалась Х. Родригесом-Вега и В. А. Зунига-Галиндо [50]. В частности, было показано, что

$$\mathfrak{T}^\alpha f(x) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-n}} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{f(x) - f(y)}{\|x - y\|_p^{\alpha+n}} d\mu_p^n(y). \quad (5.26)$$

Из равенства (5.26) вытекает, что оператор $(-\mathfrak{T}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ удовлетворяет принципу максимума, откуда следует, что его полугруппа марковская. Наша цель – показать, что $\exp(-t\mathfrak{T}^\alpha)$ является изотропной марковской полугруппой на ультраметрическом пространстве с мерой $(\mathbb{Q}_p^n, d_p, \mu_p^n)$.

Наше первое наблюдение состоит в том, что спектр симметричного оператора $(\mathfrak{T}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ совпадает с областью значений функции $\zeta \mapsto \|\zeta\|_p^\alpha$:

$$\text{спес } \mathfrak{T}^\alpha = \{p^{k\alpha} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

Собственное пространство $\mathcal{H}(\lambda)$ оператора $(\mathfrak{T}^\alpha, \mathcal{V}_c)$, соответствующее собственному значению $\lambda = p^{k\alpha}$, порождено функцией

$$f_k = \frac{1}{\mu_p^n(p^k \mathbb{Z}_p^n)} \mathbf{1}_{p^k \mathbb{Z}_p^n} - \frac{1}{\mu_p^n(p^{k-1} \mathbb{Z}_p^n)} \mathbf{1}_{p^{k-1} \mathbb{Z}_p^n}$$

и всеми ее сдвигами $f_k(\cdot + a)$ при $a \in \mathbb{Q}_p^n / p^k \mathbb{Z}_p^n$. Действительно, вычисляя преобразование Фурье функции f_k :

$$\widehat{f_k}(\zeta) = \mathbf{1}_{\{\|\zeta\|_p \leq p^k\}} - \mathbf{1}_{\{\|\zeta\|_p \leq p^{k-1}\}} = \mathbf{1}_{\{\|\zeta\|_p = p^k\}},$$

получаем

$$\widehat{\mathfrak{T}^\alpha f_k}(\zeta) = \|\zeta\|_p^\alpha \widehat{f_k}(\zeta) = p^{k\alpha} \widehat{f_k}(\zeta).$$

Все вышеизложенное показывает, что оператор $\mathfrak{T}^\alpha$ совпадает с изотропным лапласианом $\mathcal{L}_\alpha$ на $(\mathbb{Q}_p^n, d_p, \mu_p^n)$, связанным с функцией распределения расстояний

$$\sigma_\alpha(r) = \exp\left(-\left(\frac{p}{r}\right)^\alpha\right),$$

а полугруппа $\exp(-t\mathfrak{T}^\alpha)$ совпадает с изотропной полугруппой $\{P_\alpha^t\}$.

Заметим, что соответствующая внутренняя ультраметрика есть

$$d_{p*}(x, y) = \left(\frac{\|x - y\|_p}{p}\right)^\alpha.$$

Спектральная функция $N_\alpha(x, \tau) = N_\alpha(\tau)$ является неубывающей непрерывной слева ступенчатой функцией, имеющей скачки в точках $\tau_k = p^{k\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}$, и принимающей в этих точках значения $N_\alpha(\tau_k) = p^{(k-1)n}$. Следовательно,

$$N_\alpha(\tau) \simeq \tau^{n/\alpha}.$$

В частности, функция $\tau \mapsto N_\alpha(\tau)$ удовлетворяет свойству удвоения, и из теоремы 2.14 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.17. *Полугруппа $\exp(-t\mathfrak{T}^\alpha)$ на $\mathbb{Q}_p^n$ допускает непрерывное ядро теплопроводности $p_\alpha(t, x, y)$, удовлетворяющее оценке*

$$p_\alpha(t, x, y) \simeq \frac{t}{(t^{1/\alpha} + \|x - y\|_p)^{n+\alpha}}. \quad (5.27)$$

В частности, полугруппа $\exp(-t\mathfrak{T}^\alpha)$ является невозвратной тогда и только тогда, когда $\alpha < n$. В невозвратном случае функция Грина (= риссово ядро Тайблесаона) удовлетворяет тождеству

$$g_\alpha(x, y) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-n}} \frac{1}{\|x - y\|_p^{n-\alpha}}.$$

Заметим, что верхняя оценка в (5.27) была доказана в [50].

Определение 5.7 инвариантного относительно вращений лапласиана на $\mathbb{Q}_p$ можно перенести на $\mathbb{Q}_p^n$. Оператор Тайблесаона $\mathfrak{T}^\alpha$ является примером инвариантного относительно вращений лапласиана. Теорема 5.8, следствия 5.9 и 5.10 и их доказательства остаются справедливыми также для $\mathbb{Q}_p^n$. Здесь мы дадим короткое доказательство немного более слабого результата, важного для нас. Положим $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^1$.

ТЕОРЕМА 5.18. *Равенство $(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c) = (\psi(\mathfrak{T}), \mathcal{V}_c)$, где ψ – произвольная возрастающая биекция $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, дает полное описание класса изотропных лапласианов на ультраметрическом пространстве с мерой $(\mathbb{Q}_p^n, d_p, \mu_p^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi: [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ – возрастающая биекция. По теореме 3.1 оператор $(\psi(\mathfrak{T}), \mathcal{V}_c)$ является изотропным лапласианом.

Обратно, пусть $(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c)$ – изотропный лапласиан на $(\mathbb{Q}_p^n, d_p, \mu_p^n)$. Пусть d_{p*} – внутреннее расстояние, связанное с $\mathcal{L}$. По построению d_{p*} является возрастающей функцией от d_p (см. (2.14)). Поскольку область значений d_p есть множество $\{p^k: k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, можно выбрать возрастающую биекцию $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ такую, что $d_{p*} = \phi(d_p)$. Пусть $\lambda(B)$ и $\tau(B)$ – собственные значения

соответственно операторов $(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c)$ и $(\mathfrak{T}, \mathcal{V}_c)$, соответствующие шару $B \subset \mathbb{Q}_p^n$. Поскольку внутреннее расстояние, связанное с $\mathfrak{T}$, есть $p^{-1}d_p$, получаем

$$\begin{aligned}\lambda(B) &= \frac{1}{\text{diam}_{p^*}(B)} = \frac{1}{\varphi(\text{diam}_p(B))} \\ &= \frac{1}{\varphi(p/\tau(B))} =: \psi(\tau(B)),\end{aligned}$$

где $\psi(s) = 1/\varphi(p/s)$ – возрастающая биекция множества $[0, \infty)$ на себя.

Поскольку $(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c)$ и $(\psi(\mathfrak{T}), \mathcal{V}_c)$ – изотропные лапласианы, определенные на ультраметрическом пространстве с мерой $(\mathbb{Q}_p^n, d_p, \mu_p^n)$, у которых множества собственных значений совпадают, мы получаем

$$(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c) = (\psi(\mathfrak{T}), \mathcal{V}_c)$$

или, равносильно, в терминах преобразования Фурье,

$$\widehat{\mathcal{L}f}(\zeta) = \psi(\|\zeta\|_p) \widehat{f}(\zeta)$$

для всех $f \in \mathcal{V}_c$ и $\zeta \in \mathbb{Q}_p^n$, что завершает доказательство теоремы.

6. Случайные блуждания на дереве и процессы со скачками на его границе

6.1. Корневые деревья и их границы. Дерево – это связный граф T без циклов (замкнутых путей длины ≥ 3). По умолчанию мы отождествляем T с его множеством вершин, которое предполагается бесконечным. Мы пишем $u \sim v$, если $u, v \in T$ являются соседями. Для любой пары вершин $u, v \in T$ имеется единственный кратчайший путь

$$\pi(u, v) = [u = v_0, v_1, \dots, v_k = v],$$

называемый *геодезическим отрезком*, такой, что $v_{i-1} \sim v_i$ и все v_i различны. Если $u = v$, то это *пустой*, или *тривиальный*, путь. Число k – *длина* пути (расстояние на графе между u и v). В дереве T выберем и зафиксируем *корневую вершину* o . Мы обозначаем через $|v|$ длину $\pi(o, v)$. Выбор корня индуцирует частичный порядок на T , где $u \leq v$, когда $u \in \pi(o, v)$. Каждая вершина $v \in T \setminus \{o\}$ имеет единственного *предшественника* v^- относительно o , который является единственным соседом вершины v на $\pi(o, v)$. Таким образом, множество всех (неориентированных) ребер графа T есть

$$E(T) = \{[v^-, v] : v \in T, v \neq o\}.$$

Для $u \in T$ элементы множества

$$\{v \in T : v^- = u\}$$

являются *последователями* вершины u , а его мощность $\deg^+(u)$ есть *исходящая степень* вершины u .

В этом и следующем разделах мы считаем, что

$$2 \leq \deg^+(u) < \infty \quad \text{для каждой вершины } u \in T. \quad (6.1)$$

(Геодезический) луч в T – это односторонний бесконечный путь $\pi = [v_0, v_1, v_2, \dots]$ такой, что $v_{n-1} \sim v_n$ и все v_n различны. Два луча эквивалентны, если их симметрическая разность (как множеств вершин) конечна. Конец дерева T – это класс эквивалентности лучей. Обычно мы будем использовать символы x, y, z для обозначения концов (и символы u, v, w для обозначения вершин). Множество всех концов дерева T обозначается через ∂T . Это граница дерева на бесконечности. Для любых $u \in T$ и $x \in \partial T$ имеется единственный луч $\pi(u, x)$, представляющий конец x и начинающийся в u . Мы обозначим

$$\hat{T} = T \cup \partial T.$$

Для $u \in T$ ветвь дерева T с корнем в u – это поддерево T_u , которое мы отождествляем с множеством его вершин

$$T_u = \{v \in T : u \leq v\}, \quad (6.2)$$

так что $T_o = T$. Мы используем обозначение ∂T_u для множества всех концов дерева T , которые обладают представляющим путем, содержащимся в T_u , а также обозначение $\hat{T}_u = T_u \cup \partial T_u$.

Для $w, z \in \hat{T}$ определим их конфлюэнт $w \wedge z = w \wedge_o z$ относительно корня o соотношением

$$\pi(o, w \wedge z) = \pi(o, w) \cap \pi(o, z).$$

Это последний общий элемент на геодезических $\pi(o, w)$ и $\pi(o, z)$; он является вершиной дерева T , если только не выполняется $w = z \in \partial T$; см. рис. 4.

Рис. 4

Один из наиболее распространенных способов определения ультраметрики на $\hat{T}$ таков:

$$d_e(z, w) = \begin{cases} 0, & \text{если } z = w, \\ e^{-|z \wedge w|}, & \text{если } z \neq w. \end{cases} \quad (6.3)$$

Тогда $\hat{T}$ компактно, а T открыто и всюду плотно. Нас в основном интересует компактное ультраметрическое пространство ∂T . В метрике d_e из (6.3) каждый d_e -шар с центром $x \in \partial T$ имеет вид ∂T_u для некоторого $u \in \pi(o, x)$. Действительно,

$$\partial T_u = B_{e^{-|u|}}(x) \quad \text{для каждой } u \in \pi(o, x)$$

и

$$\Lambda_{d_e}(x) = \{e^{-|u|} : u \in \pi(o, x)\}.$$

Обратно, мы можем начать с компактного ультраметрического пространства (X, d) , не имеющего изолированных точек, и построить дерево T следующим образом: множество вершин T – это множество

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$$

всех замкнутых шаров в (X, d) , которое уже встречалось в разделе 3. Здесь можно (при желании) считать, что $r \in \Lambda_d(x)$.

Теперь рассмотрим любой шар $v = B \in \mathcal{B}$ как вершину дерева T . Выберем нашу корневую вершину как $o = X$; она принадлежит $\mathcal{B}$ в силу компактности. Окрестность задается отношением предшественников шаров, как в определении 3.6. То есть, если $v = B$, то $u = B'$ – предшественник v – вершины v в дереве T . В силу компактности каждый x имеет только конечное число последователей, а так как в X нет изолированных точек, у каждой вершины есть хотя бы два последователя, так что выполняется соотношение (6.1).

Это определяет структуру дерева. Для любого $x \in X$ множество всех шаров $B_r(x)$, $r \in \Lambda_d(x)$, упорядоченное по убыванию, образует множество вершин луча в T , начинающегося в o . В качестве несложного упражнения можно показать, что отображение, ставящее в соответствие точке x конец дерева T , представленный этим лучом, является гомеоморфизмом из X на ∂T . Таким образом, можно отождествить X и ∂T как ультраметрические пространства.

При этом отождествлении, если первоначально вершина u интерпретировалась как шар $B_r(x)$, $r \in \Lambda_d(x)$, то множество ∂T_u концов ветви T_u просто совпадает с шаром $B_r(x)$. Таким образом, мы отождествляем каждую вершину u дерева T с множеством ∂T_u .

Если начать с произвольного локально конечного дерева и рассмотреть его пространство концов как ультраметрическое пространство X , то вышеприведенная конструкция не восстанавливает вершины с исходящей степенью 1, так что в общем случае мы не получим обратно то дерево, с которого начали. Однако вышеприведенная конструкция устанавливает биективное соответствие между компактными ультраметрическими пространствами без изолированных точек (совершенными ультраметрическими пространствами) и локально конечными корневыми деревьями с исходящими степенями ≥ 2 (ср. с [32]).

Хорошо известно, что любое ультраметрическое пространство X , которое и компактно, и совершенно, гомеоморфно тернарному канторову множеству $C \subset [0, 1]$. Когда X не компактно, но все еще совершенно, имеется гомеоморфизм $X \simeq C \setminus \{p\}$, где $p \in C$ – любая фиксированная точка.

Далее до конца п. 6.2 мы отказываемся от обозначения X для компактного и совершенного ультраметрического пространства.

Мы рассматриваем X как границу ∂T локально конечного корневого дерева с исходящей степенью ≥ 2 .

В конце мы обсудим, как можно работать при наличии вершин с исходящей степенью 1, а также в некомпактном случае.

Есть много способов, как снабдить ∂T ультраметрикой, которая будет определять ту же самую топологию и те же компактные-открытые шары ∂T_x , $x \in T$ (возможно, с другими радиусами), что и стандартная метрика (6.3). Следующее определение является своего рода ультраметрическим аналогом элемента длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть T – локально конечное корневое дерево, в котором $\deg^+(x) \geq 2$ для всех x . *Ультраметрический элемент* – это функция $\phi: T \rightarrow (0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) $\phi(v^-) > \phi(v)$ для каждой $v \in T \setminus \{o\}$;
- (ii) $\lim \phi(v_n) = 0$ вдоль каждого геодезического луча $\pi = [v_0, v_1, v_2, \dots]$.

Такая функция индуцирует ультраметрику d_ϕ на ∂T , задаваемую формулой

$$d_\phi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \phi(x \wedge y), & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Шары в этой ультраметрике снова суть множества

$$\partial T_u = B_{\phi(u)}(x), \quad x \in \partial T_u.$$

Заметим, что условие (ii) в определении необходимо для того, чтобы каждый конец дерева T был неизолированным в метрике d_ϕ . Метрика d_e из (6.3), конечно, индуцирована ультраметрическим элементом $\phi(x) = e^{-|x|}$.

ЛЕММА 6.2. Для дерева как в определении 6.1 каждая ультраметрика на ∂T , чьи замкнутые шары являются множествами ∂T_u , $u \in T$, индуцирована ультраметрическим элементом на T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для ультраметрики d , удовлетворяющей условию леммы, положим $\phi(v) = \text{diam}(\partial T_v)$, где диаметр берется относительно метрики d . Поскольку $\deg^+(v^-) \geq 2$ для любого $v \in T \setminus \{o\}$, шар ∂T_{v^-} является объединением по крайней мере двух непересекающихся шаров ∂T_u с $u^- = v^-$. Поэтому должно выполняться неравенство $\text{diam}(\partial T_v) < \text{diam}(\partial T_{v^-})$, и свойство (i) имеет место. Поскольку ни один конец не изолирован, ϕ удовлетворяет свойству (ii). Теперь ясно, что $d_\phi = d$. Лемма доказана.

Ввиду указанного соответствия между ультраметрикой и ультраметрическим элементом, всюду ниже мы заменяем в обозначениях индекс d , указывающий на метрику $d = d_\phi$, индексом ϕ , указывающим на ультраметрический элемент. Заметим, что

$$\text{diam}_\phi(\partial T) = \phi(o), \quad \Lambda_\phi(x) = \{\phi(u) : u \in \pi(o, x)\}, \quad \Lambda_\phi = \{\phi(v) : v \in T\}. \quad (6.4)$$

Также заметим, что для любых $x \in \partial T$ и $v \in \pi(o, x)$ шары в метрике d_ϕ удовлетворяют тождеству

$$B_r(x) = B_r^\phi(x) = \begin{cases} \partial T_v & \text{для } \phi(v) \leq r < \phi(v^-), \text{ если } v \neq o; \\ \partial T & \text{для } r \geq \phi(o), \text{ если } v = o. \end{cases} \quad (6.5)$$

6.2. Изотропные процессы со скачками на границе дерева. Таким образом, можно рассматривать изотропные процессы, определенные формулами (1.3)–(1.8), на пространстве $X = \partial T$. Поскольку это пространство компактно, можно считать, что эталонная мера μ является вероятностной мерой на ∂T . Выбрав меру μ на ∂T , функцию распределения расстояний σ со свойствами (1.5) и ультرامетрический элемент ϕ на T , получим (d_ϕ, μ, σ) -процесс на ∂T , который будем также называть (ϕ, μ, σ) -процессом на ∂T . Мы можем подробно выписать полугруппу и ее переходные вероятности. Именно, для $x \in \partial T$ и $\pi(0, x) = [o = v_0, v_1, v_2, \dots]$, используя (6.5), получаем

$$P^t f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^t Q_{\phi(v_n)} f(x),$$

где

$$c_0^t = 1 - \sigma^t(\phi(v_0)), \quad c_n^t = \sigma^t(\phi(v_{n-1})) - \sigma^t(\phi(v_n)), \quad n \geq 1.$$

Таким образом, для произвольных $u \in T$ и $x \in \partial T$, как и выше, имеем

$$P[X_t \in \partial T_u \mid X_0 = x] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^t \frac{\mu(\partial T_{v_n} \cap \partial T_u)}{\mu(\partial T_{v_n})}. \quad (6.6)$$

Стандартный (d, μ) -процесс в смысле определения 2.9 в случае метрики $d = d_\phi$ будет теперь именоваться стандартным (ϕ, μ) -процессом.

6.3. Простые случайные блуждания на дереве. На деревьях имеется хорошо изученный класс стохастических процессов, а именно *случайные блуждания*. Наша цель – проанализировать, как случайные блуждания на дереве связаны с изотропными процессами на границе дерева. Значительная часть приводимого ниже материала взята из книги В. Вёсса [63]. Более старая рекомендуемая ссылка – это основополагающая работа П. Картье [12].

Простое случайное блуждание на локально конечном бесконечном дереве T индуцируется его стохастической переходной матрицей $\mathcal{P} = (p(u, v))_{u, v \in T}$, обладающей тем свойством, что $p(u, v) > 0$ тогда и только тогда, когда $u \sim v$. Возникающая марковская цепь с дискретным временем (случайное блуждание) обозначается через $(Z_n)_{n \geq 0}$. Его n -шаговые переходные вероятности

$$p^{(n)}(u, v) = P_u[Z_n = v], \quad u, v \in T,$$

являются элементами n -й степени матрицы $\mathcal{P}$. Здесь P_u обозначает вероятностную меру на пространстве траекторий, начинающихся в u . Мы предполагаем, что случайное блуждание является *невозвратным*, т. е. с вероятностью 1

оно посещает любое конечное множество только конечное число раз. Таким образом, $0 < G(u, v) < \infty$ для всех $u, v \in T$, где

$$G(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(u, v)$$

– *функция Грина* случайного блуждания. Кроме того, мы также будем существенно использовать величины

$$F(u, v) = P_u[Z_n = v \text{ для некоторого } n \geq 0],$$

$$U(v, v) = P_v[Z_n = v \text{ для некоторого } n \geq 1].$$

Нам потребуется ряд связывающих их тождеств, и мы начнем с нескольких, справедливых для всех $u, v \in T$:

$$G(u, v) = F(u, v)G(v, v); \quad (6.7)$$

$$G(v, v) = \frac{1}{1 - U(v, v)}; \quad (6.8)$$

$$U(v, v) = \sum_u p(v, u)F(u, v); \quad (6.9)$$

$$F(u, v) = F(u, w)F(w, v), \quad \text{как только } w \in \pi(u, v). \quad (6.10)$$

Первые три тождества выполняются для произвольных счетных марковских цепей, в то время как (6.10) справедливо для деревьев. Эти тождества показывают, что величины G, U, F полностью определяются уже значениями $F(u, v)$ для $u \sim v$. Ниже будут приводиться и использоваться также и другие тождества из [63; гл. 9].

В силу невозвратности случайное блуждание Z_n должно сходиться к случайному концу (см., например, [12] или [63; теорема 9.18]).

ЛЕММА 6.3. *Существует ∂T -значная случайная величина Z_∞ такая, что для каждой начальной точки $u \in T$*

$$P_u[Z_n \rightarrow Z_\infty \text{ в топологии } \widehat{T}] = 1.$$

Вкратце рассуждение таково: в силу невозвратности, траектории случайного блуждания должны почти наверное сгущаться на ∂T . Если бы такая траектория имела две различные точки сгущения, скажем, x и y , то, поскольку случайное блуждание является простым, траектория посещала бы вершину $x \wedge y$ бесконечно много раз, что может случиться только с вероятностью 0.

Для любой вершины $u \in T$ рассмотрим *предельное распределение* ν_u , которое является борелевской мерой на ∂T , определенной для любого борелевского множества $B \subset \partial T$ следующим образом:

$$\nu_u(B) = P_u[Z_\infty \in B].$$

Множества $\partial T_u, u \in T$ (в совокупности с пустым множеством) образуют полуалгебру, которая порождает борелевскую σ -алгебру на пространстве ∂T . Таким

образом, мера ν_u определяется своими значениями на указанных множествах. Имеется явная формула (ср. с [12] или [63; предложение 9.23]), справедливая при $v \neq o$:

$$\nu_u(\partial T_v) = \begin{cases} F(u, v) \frac{1 - F(v, v^-)}{1 - F(v^-, v)F(v, v^-)}, & \text{если } u \in \{v\} \cup (T \setminus T_v), \\ 1 - F(u, v) \frac{F(v, v^-) - F(v^-, v)F(v, v^-)}{1 - F(v^-, v)F(v, v^-)}, & \text{если } u \in T_v. \end{cases} \quad (6.11)$$

Гармоническая функция – это функция $h: T \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая равенству $\mathcal{P}h = h$, где

$$\mathcal{P}h(u) = \sum_v p(u, v)h(v).$$

Для любого борелевского множества $B \subset \partial T$ функция $u \mapsto \nu_u(B)$ является ограниченной гармонической функцией. Можно доказать, что все ν_u сравнимы в следующем смысле: $p^{(k)}(u, v)\nu_u \leq \nu_v$, где k – длина $\pi(u, v)$. Итак, для любой функции $\varphi \in L^1(\partial T, \nu_o)$ функция h_φ , определенная равенством

$$h_\varphi(u) = \int_{\partial T} \varphi d\nu_u,$$

является конечной и гармонической на T . Ее часто называют *преобразованием Пуассона* функции φ .

Далее, определим меру $\mathfrak{m}$ на T следующим образом:

$$\mathfrak{m}(o) = 1,$$

а для $v \in T \setminus \{o\}$ таких, что $\pi(o, v) = [o = v_0, v_1, \dots, v_k = v]$, полагаем

$$\mathfrak{m}(v) = \frac{p(v_0, v_1)p(v_1, v_2) \cdots p(v_{k-1}, v_k)}{p(v_1, v_0)p(v_2, v_1) \cdots p(v_k, v_{k-1})}. \quad (6.12)$$

Тогда для всех $u, v \in T$ имеем

$$\mathfrak{m}(u)p(u, v) = \mathfrak{m}(v)p(v, u) \quad \text{и, следовательно,} \quad \mathfrak{m}(u)G(u, v) = \mathfrak{m}(v)G(v, u); \quad (6.13)$$

т.е. случайное блуждание *обратимо*. Это позволяет нам использовать интерпретацию $(T, \mathcal{P}, \mathfrak{m})$ как *электрической цепи*: см., например, работу М. Ямасакки [65], книгу П. М. Соарди [54] или – с обозначениями, используемыми в настоящей работе, – книгу [63; гл. 4]. Каждое ребро $e = [v^-, v] \in E(T)$ рассматривается как электрический проводник с *проводимостью*

$$a(v^-, v) = \mathfrak{m}(v)p(v, v^-).$$

Форма Дирихле $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{T, \mathcal{P}}$ для функций $f, g: T \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой

$$\mathcal{E}_T(f, g) = \sum_{[v^-, v] \in E(T)} (f(v) - f(v^-))(g(v) - g(v^-))a(v^-, v). \quad (6.14)$$

Областью определения этой формы Дирихле является пространство

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T, \mathcal{P}) = \{f: T \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathcal{E}_T(f, f) < \infty\}. \quad (6.15)$$

6.4. Гармонические функции конечной энергии и их граничные значения. Нас интересует подпространство

$$\mathcal{H}\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}\mathcal{D}(T, \mathcal{P}) = \{h \in \mathcal{D}(T, \mathcal{P}) : \mathcal{P}h = h\}$$

гармонических функций с *конечной энергией*. Терминология пришла из интерпретации таких функций как потенциалов электрического тока и того, что $\mathcal{E}_T(h, h)$ – энергия тока.

Каждая функция в $\mathcal{H}\mathcal{D}(T, \mathcal{P})$ является преобразованием Пуассона некоторой функции $\varphi \in L^2(\partial T, \nu_o)$. Это справедливо не только для деревьев, но и для обратимых конечнозначных марковских цепей общего вида, и вытекает из следующих фактов.

(1) Каждая функция из $\mathcal{H}\mathcal{D}$ является разностью двух неотрицательных функций из $\mathcal{H}\mathcal{D}$.

(2) Каждую неотрицательную функцию из $\mathcal{H}\mathcal{D}$ можно аппроксимировать монотонно возрастающей последовательностью неотрицательных ограниченных функций из $\mathcal{H}\mathcal{D}$.

(3) Каждая ограниченная гармоническая функция является преобразованием Пуассона ограниченной функции на границе ∂T .

Граница ∂T является (активной частью) границы Мартина, причем ν_u – предельное на ∂T распределение марковской цепи, начинающейся в u . Факты (1) и (2) содержатся в [65] и [54], в то время как (3) является частью общей теории границ Мартина (см., например, [63; теорема 7.61]).

Итак, мы определяем форму $\mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{D}}$ на ∂T , полагая

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\partial T, \mathcal{P}) &= \{\varphi \in L^1(\partial T, \nu_o) : \mathcal{E}_T(h_\varphi, h_\varphi) < \infty\}, \\ \mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{D}}(\varphi, \psi) &= \mathcal{E}_T(h_\varphi, h_\psi) \quad \text{для } \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\partial T, \mathcal{P}). \end{aligned} \quad (6.16)$$

6.5. Процессы со скачками на границе дерева. Прилагая значительные усилия, Дж. Кигами [36] выводит выражение для формы $\mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{D}}(\varphi, \psi)$, определенной в (6.16), устанавливает ее свойства регулярности и затем изучает процесс со скачками на ∂T , индуцированный этой формой Дирихле. Мы называем этот процесс *граничным процессом*, связанным со случайным блужданием на T .

Покажем, что для $\mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{D}}$ имеется довольно простое интегральное представление. Определим *ядро Наим* на $\partial T \times \partial T$ формулой

$$\Theta_o(x, y) = \begin{cases} \frac{\mathbf{m}(o)}{G(o, o)F(o, x \wedge y)F(x \wedge y, o)}, & \text{если } x \neq y, \\ +\infty, & \text{если } x = y. \end{cases} \quad (6.17)$$

В нашем случае имеем $\mathbf{m}(o) = 1$, но из соображений общности мы пока не используем эту нормировку меры.

ТЕОРЕМА 6.4. *Для любого простого невозвратного случайного блуждания на дереве T с корнем o и для всех функций φ, ψ в $\mathcal{D}(\partial T, \mathcal{P})$ имеет место представление*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{D}}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\partial T} \int_{\partial T} (\varphi(x) - \varphi(y))(\psi(x) - \psi(y)) \Theta_o(x, y) d\nu_o(x) d\nu_o(y).$$

Доказательство теоремы 6.4 дано в [20] в рамках теории потенциала на пространствах Грина, которые локально евклидовы. Определение ядра Наим дается в [44] в той же общности. Однако деревья, даже когда они рассматриваются как метрические графы, не являются локально евклидовыми. В этом смысле, до сих пор определение ядра Наим и доказательство теоремы 6.4 в устраивающей нас общности были недостаточно отражены в литературе. “Недостающие звенья” будут даны в полной общности в готовящейся к печати работе А. Георгакопулоса (А. Georgakopoulos) и В. А. Каймановича (V. A. Kaimanovich).

Здесь мы даем прямое и простое доказательство теоремы 6.4 для специального случая деревьев. Начнем со следующего наблюдения.

ЛЕММА 6.5. *Мера $\Theta_o(x, y) d\nu_o(x) d\nu_o(y)$ на $\partial T \times \partial T$ инвариантна относительно смены базовой точки (корня) o .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы хотим заменить базовую точку o некоторой другой $u \in T$. Можно считать, что $u \sim o$. Действительно, тогда можно шаг за шагом заменить текущую базовую точку одной из соседних с ней, чтобы получить результат для произвольной u .

Напомним, что конфлюэнт, который появился в определении (6.17) ядра Θ_o , зависит от корня o , в то время как для Θ_x он становится конфлюэнтом относительно x как нового корня. Хорошо известный факт состоит в том, что

$$\frac{d\nu_u}{d\nu_o}(x) = K(u, x) := \frac{G(u, u \wedge_o x)}{G(o, u \wedge_o x)},$$

где K называется *ядром Мартина*. Итак, нам нужно показать, что для всех $x, y \in \partial T$ ($x \neq y$) выполняется равенство

$$\frac{m(o)}{G(o, o)F(o, x \wedge_o y)F(x \wedge_o y, o)} = \frac{m(u)K(u, x)K(u, y)}{G(u, u)F(u, x \wedge_u y)F(x \wedge_u y, u)}.$$

Рассмотрим четыре случая.

Случай 1: $x, y \in \partial T_u$. Тогда $x \wedge_o y = x \wedge_u y =: v \in T_u$ и $u \wedge_o x = u \wedge_o y = u$. Таким образом, используя (6.7), (6.10) и тот факт, что в силу (6.13)

$$\frac{m(u)}{G(o, u)} = \frac{m(o)}{G(u, o)},$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{m(u)K(u, x)K(u, y)}{G(u, u)F(u, x \wedge_u y)F(x \wedge_u y, u)} &= \frac{m(u)}{G(u, u)F(u, v)F(v, u)} \left(\frac{G(u, u)}{G(o, u)} \right)^2 \\ &= \frac{m(o)G(u, u)}{F(u, v)F(v, u)G(o, u)G(u, o)} \\ &= \frac{m(o)}{F(u, v)F(v, u)F(o, u)F(u, o)G(o, o)} \\ &= \frac{m(o)}{F(o, v)F(v, o)G(o, o)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Случай 2: $x, y \in \partial T \setminus \partial T_u$. Тогда

$$x \wedge_o y = x \wedge_u y =: w \in T \setminus T_u, \quad u \wedge_o x = u \wedge_o y = o.$$

Случай 3: $x \in \partial T_u, y \in \partial T \setminus \partial T_u$. Тогда

$$x \wedge_o y = o, \quad x \wedge_u y = u, \quad u \wedge_o x = u, \quad u \wedge_o y = o.$$

Случай 4: $x \in \partial T \setminus \partial T_u, y \in \partial T_u$. Этот случай аналогичен случаю 3 (x и y меняются ролями).

Во всех случаях 2–4 доказательство проводится аналогично случаю 1. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 6.4 нам нужно еще несколько фактов, связанных с сетевой постановкой; ср., например, с [63; § 4.D].

Пространство $\mathcal{D}(T)$ из (6.15), будучи оснащенным скалярным произведением

$$(f, g) = \mathcal{E}_T(f, g) + f(o)g(o),$$

является гильбертовым пространством. Подпространство $\mathcal{D}_0(T)$ определяется как замыкание пространства функций с конечными носителями в $\mathcal{D}(T)$. Оно является собственным подпространством тогда и только тогда, когда случайное блуждание невозвратно, и в этом случае функция $G_v(u) = G(u, v)$ лежит в $\mathcal{D}_0(T)$ для любого $v \in T$ (см. [65], [54]). Нам потребуется формула

$$\mathcal{E}_T(f, G_v) = m(v)f(v) \quad \text{для каждого } f \in \mathcal{D}_0(T). \quad (6.18)$$

Ветвь T_w дерева T (для $w \in T \setminus \{o\}$) можно рассматривать как подсеть, оснащенную теми же проводимостями $a(u, v)$ для $[u, v] \in E(T_w)$. Соответствующая мера на T_w есть

$$m_{T_w}(u) = \sum_{v \in T_w : v \sim u} a(u, v) = \begin{cases} m(u), & \text{если } u \in T_w \setminus \{w\}, \\ m(w) - a(w, w^-), & \text{если } u = w. \end{cases}$$

Получающееся случайное блуждание на T_w имеет переходные вероятности

$$p_{T_w}(u, v) = \frac{a(v, w)}{m_{T_w}(u)} = \begin{cases} p(u, v), & \text{если } u \in T_w \setminus \{w\}, v \sim u, \\ \frac{p(w, v)}{1 - p(w, w^-)}, & \text{если } u = w, v \sim u. \end{cases}$$

Имеем $F_{T_w}(u, u^-) = F(u, u^-)$ и, значит, $F_{T_w}(u, w) = F(u, w)$ для каждой $u \in T_w \setminus \{w\}$, поскольку до своего первого попадания в w случайное блуждание на T_w подчиняется тем же самым переходным вероятностям, что и первоначальное случайное блуждание на T . Легко видеть [63; с. 241], что случайное блуждание на T_w будет невозвратным тогда и только тогда, когда для первоначального случайного блуждания выполнено неравенство $F(w, w^-) < 1$, что в свою очередь выполняется тогда и только тогда, когда $\nu_o(\partial T_w) > 0$. (В этом и в двух предыдущих пунктах это условие всегда предполагается выполненным, но для доказательства теоремы 6.4 мы предполагаем лишь, что случайное блуждание на всем T является невозвратным.) Обратно, если $F(w, w^-) = 1$, то $F(u, w) = 1$ для всех $u \in T_w$.

Ниже нам будет нужна следующая формула для предельных распределений.

ЛЕММА 6.6. Для $u \in T \setminus \{o\}$ выполняется равенство

$$\nu_u(\partial T_u) = 1 - p(u, u^-)(G(u, u) - G(u^-, u)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (7.7) имеем

$$G(u, u)p(u, u^-) = \frac{F(u, u^-)}{1 - F(u, u^-)F(u^-, u)}.$$

Таким образом, после короткого вычисления с использованием (6.11) мы получаем

$$p(u, u^-)(G(u, u) - G(u^-, u)) = (1 - F(u^-, u))G(u, u)p(u, u^-) = 1 - \nu_u(\partial T_u).$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.4. Сначала докажем формулу Дуба–Найм в случае, когда $\varphi = \mathbf{1}_{\partial T_v}$ и $\psi = \mathbf{1}_{\partial T_w}$ для двух собственных ветвей T_v и T_w дерева T . Они либо не пересекаются, либо одна из них содержит другую.

Случай 1: $T_w \subset T_v$. (Случай $T_v \subset T_w$ аналогичен в силу симметрии.) Это означает, что $w \in T_v$. Для $x, y \in \partial T$ имеем

$$(\varphi(x) - \varphi(y))(\psi(x) - \psi(y)) = 1,$$

если $x \in \partial T_w$ и $y \in \partial T \setminus \partial T_v$ или наоборот, и

$$(\varphi(x) - \varphi(y))(\psi(x) - \psi(y)) = 0$$

в противном случае. В силу леммы 6.5 можно выбрать v в качестве базовой точки. Таким образом, правая часть тождества равна

$$\int_{\partial T \setminus \partial T_v} \int_{\partial T_w} \Theta_v(x, y) d\nu_v(x) d\nu_v(y) = \frac{\mathfrak{m}(v)}{G(v, v)} \nu_v(\partial T \setminus \partial T_v) \nu_v(\partial T_w),$$

так как $x \wedge_v y = v$ и $F(v, v) = 1$.

Теперь обратимся к левой части формулы Дуба–Найм. Преобразования Пуассона функций φ и ψ даются формулами

$$h_\varphi(u) = \nu_u(\partial T_v) \quad \text{и} \quad h_\psi(u) = \nu_u(\partial T_w).$$

В силу (6.11) имеем

$$\begin{aligned} h_\varphi(u) &= F(u, v) \nu_v(\partial T_v), & u \in \{v\} \cup (T \setminus T_v), \\ 1 - h_\varphi(u) &= F(u, v) \nu_v(\partial T \setminus \partial T_v), & u \in T_v. \end{aligned}$$

Положим $F_v(u) = F(u, v)$ и будем, везде, где это удобно, писать

$$h_\varphi(u) - h_\varphi(u^-) = (1 - h_\varphi(u^-)) - (1 - h_\varphi(u))$$

и аналогично для h_ψ . Тогда получим

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_T(h_\varphi, h_\psi) &= \sum_{[u, u^-] \in E(T) \setminus E(T_v)} a(u, u^-)(F(u, v) - F(u^-, v))\nu_v(\partial T_v) \\
 &\quad \times (F(u, v) - F(u^-, v))\nu_v(\partial T_w) \\
 &\quad - \sum_{[u, u^-] \in E(T_v) \setminus E(T_w)} a(u, u^-)(F(u, v) - F(u^-, v))\nu_v(\partial T \setminus \partial T_v) \\
 &\quad \times (F(u, v) - F(u^-, v))\nu_v(\partial T_w) \\
 &\quad + \sum_{[u, u^-] \in E(T_w)} a(u, u^-)(F(u, v) - F(u^-, v))\nu_v(\partial T \setminus \partial T_v) \\
 &\quad \times (F(u, v) - F(u^-, v))\nu_v(\partial T \setminus \partial T_w) \\
 &= \mathcal{E}_T(F_v, F_w)\nu_v(\partial T_v)\nu_v(\partial T_w) - \mathcal{E}_{T_v}(F_v, F_w)\nu_v(\partial T_w) \\
 &\quad + \mathcal{E}_{T_w}(F_v, F_w)\nu_v(\partial T \setminus \partial T_v),
 \end{aligned}$$

где, конечно, $\mathcal{E}_{T_v}$ – форма Дирихле случайного блуждания на ветви T_v , как обсуждалось выше, и аналогично для $\mathcal{E}_{T_w}$. Теперь $F_v = G_v/G(v, v)$ в силу (6.7), откуда следует, что (6.18) дает

$$\mathcal{E}_T(F_v, F_w) = \frac{\mathcal{E}_T(G_v, F_w)}{G(v, v)} = \frac{\mathbf{m}(v)F(v, w)}{G(v, v)}. \quad (6.19)$$

Напомним, что для случайного блуждания на T_v имеем $F_{T_v}(u, v) = F(u, v)$ для каждой $u \in T_v$. Кроме того,

$$\mathbf{m}_{T_v}(v) = \mathbf{m}(v) - a(v, v^-) = \mathbf{m}(v)(1 - p(v, v^-)).$$

Применим (6.19) к этому случайному блужданию и получим

$$\mathcal{E}_{T_v}(F_v, F_w) = \frac{\mathbf{m}(v)(1 - p(v, v^-))F(v, w)}{G_{T_v}(v, v)}.$$

Применяя (6.8), (6.9) и

$$p_{T_v}(v, u) = \frac{p(v, u)}{1 - p(v, v^-)}$$

для $u \in T_v$, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - p(v, v^-)}{G_{T_v}(v, v)} &= 1 - p(v, v^-) - (1 - p(v, v^-))U_{T_v}(v, v) \\
 &= 1 - p(v, v^-) - \sum_{u: u^- = v} p(v, u)F(u, v) \\
 &= 1 - p(v, v^-) - (U(v, v) - p(v, v^-)F(v^-, v)) \\
 &= \frac{1}{G(v, v)} - p(v, v^-)(1 - F(v^-, v)) \\
 &= \frac{\nu_v(\partial T_v)}{G(v, v)},
 \end{aligned}$$

где на последнем шаге мы использовали лемму 6.6. Отсюда следует, что

$$\mathcal{E}_{T_v}(F_v, F_w) = \frac{\mathbf{m}(v)F(v, w)}{G(v, v)}\nu_v(\partial T_v).$$

Таким же образом, поменяв ролями T_w и T_v и используя свойство обратимости (6.13), выводим

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{T_w}(F_v, F_w) &= \frac{\mathbf{m}(w)F(w, v)}{G(w, w)}\nu_w(\partial T_w) \\ &= \frac{\mathbf{m}(v)F(v, w)}{G(v, v)}\nu_w(\partial T_w) = \frac{\mathbf{m}(v)}{G(v, v)}\nu_v(\partial T_w).\end{aligned}$$

В итоге получаем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_T(h_\varphi, h_\psi) &= \mathcal{E}_{T_w}(F_v, F_w)\nu_v(\partial T \setminus \partial T_v) \\ &= \frac{\mathbf{m}(v)}{G(v, v)}\nu_v(\partial T_w)\nu_v(\partial T \setminus \partial T_v),\end{aligned}$$

как и предлагалось.

Случай 2: $T_w \cap T_v = \emptyset$. Ввиду леммы 6.5 обе части формулы Дуба–Наим не зависят от корня o . Таким образом, мы можем объявить корнем одного из соседей вершины v , который не лежит на $\pi(v, w)$. Кроме того, пусть $\bar{v}$ – сосед v на $\pi(w, v)$. Тогда с выбранным новым корнем дополнение “старой” ветви T_v есть ветвь $T_{\bar{v}}$, которая содержит T_w (последняя остается той же самой относительно нового корня).

Таким образом, мы можем применить результат случая 1 к $T_{\bar{v}}$ и T_w . Это означает, что нужно заменить функции φ и h_φ соответственно функциями $1 - \varphi$ и $1 - h_\varphi$, что означает, что мы просто изменяем знак в обеих частях тождества. Таким образом, случай 2 сводится к случаю 1 без дальнейших вычислений.

Из того, что уже сделано, и из линейности преобразования Пуассона, а также из билинейности форм в обеих частях формулы Дуба–Наим мы выводим, что эта формула верна для линейных комбинаций индикаторных функций множеств ∂T_v . Эти индикаторные функции всюду плотны в пространстве $C(\partial T)$ относительно $\max$ -нормы. Таким образом, формула Дуба–Наим выполняется для всех непрерывных функций на ∂T . Продолжение на всё $\mathcal{D}(\partial T, \mathcal{P})$ получается стандартной аппроксимацией. Теорема 6.4 доказана.

7. Двойственность случайных блужданий на деревьях и изотропных процессов на их границах

Сравнивая изотропные процессы и процессы Кигами [36] на ∂T , естественно задать следующие два вопроса.

Вопрос I. Для данного невозвратного случайного блуждания на T , связанного с формой Дирихле $\mathcal{E}_T$ из (6.14), будет ли граничный процесс на ∂T , индуцированный формой $\mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{D}}$ из (6.16), совпадать с одним из изотропных процессов (1.8) на ∂T с переходными вероятностями (6.6), индуцированным мерой

$\mu = \nu_o$ на ∂T , некоторым ультرامетрическим элементом ϕ на T и подходящей функцией распределения расстояний σ на $[0, \infty)$?

Вопрос II. Обратно, для данных μ , ϕ и σ существует ли случайное блуждание на T с предельным распределением $\nu_o = \mu$ такое, что изотропный процесс, индуцированный μ , ϕ и σ , является граничным процессом с формой Дирихле $\mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{D}}$?

Прежде чем отвечать на эти вопросы, нужно уточнить предположения. Когда мы начинаем с (ϕ, μ, σ) , мы, как и раньше, будем всегда предполагать, что μ имеет носителем всю ∂T .

Таким образом, от случайного блуждания мы также хотим, чтобы $\text{supp}(\nu_o) = \partial T$. Это равносильно требованию, что $\nu_o(\partial T_v) > 0$ для каждого $v \in T$. В силу (6.11) это, в свою очередь, равносильно условию

$$F(v, v^-) < 1 \quad \text{для каждого } v \in T \setminus \{o\}. \quad (7.1)$$

На самом деле мы увидим, что нам нужно немного большее, а именно, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} G(v, o) = 0, \quad (7.2)$$

т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ имеется конечное множество $A \subset T$ такое, что $G(v, o) < \varepsilon$ для всех $v \in T \setminus A$. Это условие необходимо и достаточно для разрешимости задачи Дирихле: для любого $\varphi \in C(\partial X)$ его преобразование Пуассона h_φ дает единственное непрерывное продолжение φ на $\hat{T}$, являющееся гармонической функцией на T . См., например, [63; следствие 9.44].

Мы ограничимся рассмотрением случайных блужданий со свойствами (7.1) и (7.2) на корневом дереве с исходящими степенями ≥ 2 .

7.1. Ответ на вопрос I. Начнем со случайного блуждания, удовлетворяющего сформулированным выше требованиям. Мы знаем из раздела 1, что каждый (μ, ϕ, σ) -процесс возникает как стандартный процесс в смысле определения 2.9 относительно внутренней метрики (ср. с теоремой 2.10): для заданных ϕ и σ внутренняя метрика индуцирована ультраметрическим элементом

$$\phi_*(u) = -\frac{1}{\log \sigma(\phi(u))}. \quad (7.3)$$

Таким образом, мы можем исключить σ из наших рассуждений, ограничиваясь теми ультраметрическими элементами ϕ , для которых граничный процесс является стандартным процессом на ∂T , связанным с (ϕ, ν_o) .

Поскольку симметричные процессы определяются их формами Дирихле, мы выводим из теорем 3.12 и 6.4, что нам нужен такой ультраметрический элемент ϕ , что $J(x, y) = \Theta_o(x, y)$ для всех $x, y \in \partial T$ при $x \neq y$, где $J(x, y)$ задано равенством (3.11). Переписывая $J(x, y)$ в терминах ϕ , ν_o и структуры дерева, преобразуем это условие в следующее:

$$\frac{1}{\phi(o)} + \int_{1/\phi(o)}^{1/\phi(x \wedge y)} \frac{dt}{\nu_o(B_{1/t}^\phi(x))} = \frac{m(o)}{G(o, o)F(o, x \wedge y)F(x \wedge y, o)}. \quad (7.4)$$

В нашем случае $m(o) = 1$, но из соображений общности мы пока не используем эту нормировку меры m . Прежде всего, так как $\deg^+(o) \geq 2$, существуют $x, y \in \partial T$ такие, что $x \wedge y = o$. Подставим эти две граничные точки в (7.4). Поскольку $F(o, o) = 1$, видим, что должно выполняться равенство

$$\Phi(o) = \frac{G(o, o)}{m(o)}.$$

Теперь возьмем $v \in T \setminus \{o\}$. Поскольку исходящие степени не меньше 2, существуют $x, y, y' \in \partial T$ такие, что $x \wedge y = v$ и $x \wedge y' = v^-$. Запишем (7.4) сначала для (x, y') , а затем для (x, y) , и возьмем разность, что приводит к уравнению

$$\int_{1/\phi(v^-)}^{1/\phi(v)} \frac{dt}{\nu_o(B_{1/t}^\phi(x))} = \frac{m(o)}{G(o, o)F(o, v)F(v, o)} - \frac{m(o)}{G(o, o)F(o, v^-)F(v^-, o)}. \quad (7.5)$$

В силу (6.5) в области интегрирования последнего интеграла должно выполняться равенство $B_{1/t}^\phi(v) = \partial T_v$, откуда следует, что интеграл сводится к

$$\left(\frac{1}{\phi(v)} - \frac{1}{\phi(v^-)} \right) \frac{1}{\nu_o(\partial T_v)}.$$

Умножим уравнение (7.5) на $\nu_o(\partial T_v)$ и упростим полученную правую часть

$$\left(\frac{m(o)}{G(o, o)F(o, v)F(v, o)} - \frac{m(o)}{G(o, o)F(o, v^-)F(v^-, o)} \right) \nu_o(\partial T_v),$$

используя тождества (6.7)–(6.10) и первую из двух формул из (6.11) (для ν_o). Получаем, что искомым ультраметрический элемент должен удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\phi(v)} - \frac{1}{\phi(v^-)} = \frac{m(o)}{G(v, o)} - \frac{m(o)}{G(v^-, o)} \quad \text{для каждого } v \in T \setminus \{o\}. \quad (7.6)$$

Это рекуррентно определяет $1/\phi(v)$, и с условием $m(o) = 1$ получаем

$$\phi(v) = G(v, o).$$

Поскольку в силу (6.7) и (6.10) имеем

$$G(v, o) = F(v, v^-)G(v^-, o),$$

предположения (7.1) и (7.2) дают, что ϕ – ультраметрический элемент. Обращая последние вычисления, мы видим, что при этом выборе ϕ действительно выполняется равенство $J(x, y) = \Theta_o(x, y)$ для всех $x, y \in \partial T$ при $x \neq y$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть T – локально конечное корневое дерево с исходящими степенями ≥ 2 . Рассмотрим простое невозвратное случайное блуждание на T , для которого выполнены тождества (6.7) и (6.10). Тогда граничный процесс на ∂T , индуцированный формой Дирихле (6.16), совпадает со стандартным процессом, связанным с ультраметрическим элементом $\phi = G(\cdot, o)$ и предельным распределением ν_o случайного блуждания.

Пусть $\mathcal{L}$ – лапласиан, связанный с граничным процессом из теоремы 7.1. Лапласиан $\mathcal{L}$ действует на локально постоянных функциях f по правилу

$$\mathcal{L}f(x) = \int_{\partial T} f(x) - f(y) \Theta_o(x, y) d\nu_o(y).$$

Ввиду отождествления шаров в ∂T с вершинами дерева T , собственные функции из (3.6) теперь становятся такими:

$$f_v = \frac{\mathbf{1}_{\partial T_v}}{\nu_o(\partial T_v)} - \frac{\mathbf{1}_{\partial T_{v^-}}}{\nu_o(\partial T_{v^-})}, \quad v \in T \setminus \{o\}.$$

Кроме того, положим $f_o = \mathbf{1}$ и заметим, что это собственная функция оператора $\mathcal{L}$ с собственным значением 0. Применяя теорему 3.8, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Для $v \in T \setminus \{o\}$ выполнено равенство $\mathcal{L}f_v = G(v^-, o)^{-1}f_v$ и множество собственных функций $\{f_v\}_{v \in T}$ полно. В частности,

$$\text{спес } \mathcal{L} = \overline{\{G(v, o)^{-1} : v \in T\}} \cup \{0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Для любых двух вершин v и w из $T \setminus \{o\}$ таких, что $v^- = w^- = u$, функции f_v и f_w являются собственными функциями оператора $\mathcal{L}$, соответствующими собственному значению $\lambda = 1/G(u, o)$. Отсюда следует, что собственное пространство $\mathcal{H}(u)$, соответствующее вершине u , натянуто на функции $\{f_v : v^- = u\}$. Поскольку ранг системы $\{f_v : v^- = u\}$ равен $\deg^+(u) - 1$, где $\deg^+(u) \geq 2$ – исходящая степень вершины u , получаем

$$\dim \mathcal{H}(u) = \deg^+(u) - 1$$

(ср. с (3.9)).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. Для заданного случайного блуждания на T связанный с ним граничный процесс на ∂T можно попробовать реализовать как (ν_o, ϕ, σ) -процесс для ультраметрического элемента ϕ , отличного от $G(\cdot, o)$. Это означает, что нужно найти подходящее распределение расстояний σ на $[0, \infty)$, отличное от обратного экспоненциального распределения (2.16). Ввиду 7.3 мы ищем такое σ , чтобы для нашего заданного ϕ общего вида выполнялось равенство

$$\sigma(\phi(v)) = e^{-1/G(v, o)}.$$

Для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство $\phi(u) = \phi(v)$ для всех u, v таких, что $G(u, o) = G(v, o)$, так как нам нужно, чтобы функция ϕ была постоянной на эквипотенциальных множествах. В этом случае функция распределения $\sigma(r)$ определяется вышеприведенным равенством для r , лежащих в множестве значений Λ_ϕ ультраметрики d_ϕ . Затем эта функция может быть продолжена на $[0, +\infty)$.

7.2. Ответ на вопрос II. Ответить на вопрос II означает, что мы начинаем с ϕ и μ и ищем случайное блуждание с предельным распределением $\nu_o = \mu$, для которого стандартный (ϕ, μ) -процесс является граничным процессом, связанным со случайным блужданием. Мы знаем из теоремы 7.1, что в этом случае должно выполняться равенство $\phi(v) = G(v, o)$, откуда, в частности, следует, что $\phi(o) > 1$. Значит, нельзя ожидать, что подойдет любой ультраметрический элемент ϕ . Наиболее естественный выбор состоит в том, чтобы заменить ϕ элементом $C \cdot \phi$ для некоторой постоянной $C > 0$. Для стандартных процессов, связанных соответственно с ϕ и $C \cdot \phi$, это просто приведет к линейной замене времени: если старый процесс был $\{X_t\}_{t>0}$, то новый будет $\{X_{t/C}\}_{t>0}$.

ТЕОРЕМА 7.5. Пусть T – локально конечное корневое дерево с исходящими степенями ≥ 2 . Рассмотрим ультраметрический элемент ϕ на T и вероятностную меру μ с полным носителем на ∂T . Тогда существуют единственная постоянная $C > 0$ и единственное простое невозвратное случайное блуждание на T , удовлетворяющее (6.7) и (6.10), со следующими свойствами:

- 1) $\mu = \nu_o$ – предельное распределение случайного блуждания;
- 2) граничный процесс совпадает со стандартным процессом на ∂T , индуцированным ультраметрическим элементом $C \cdot \phi$ и заданной мерой μ .

Для доказательства нам понадобятся еще три формулы (первые две взяты из [63; лемма 9.35], а третья сразу следует из (6.11) и (6.10)):

$$G(u, u)p(u, v) = \frac{F(u, v)}{1 - F(u, v)F(v, u)}, \quad \text{если } u \sim v, \quad (7.7)$$

$$G(u, u) = 1 + \sum_{v: v \sim u} \frac{F(u, v)F(v, u)}{1 - F(u, v)F(v, u)}, \quad (7.8)$$

$$F(v^-, v) = \frac{\nu_o(\partial T_v)/F(o, v^-)}{1 - F(v, v^-) + F(v, v^-)\nu_o(\partial T_v)/F(o, v^-)}. \quad (7.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.5. Мы будем действовать следующим образом: начнем с ϕ и μ и заменим ϕ новым ультраметрическим элементом $C \cdot \phi$, где C будет определено позже, а μ будет кандидатом на предельное распределение случайного блуждания, которое мы ищем.

Используя имеющиеся формулы, сначала построим единственным возможным образом величины $F(u, v)$, $u, v \in T$, в частности, когда $u \sim v$. В свою очередь, они приводят к функции Грина $G(u, v)$. Пока это будут только “потенциальные” величины, годность которых нужно будет проверить. До этой проверки мы обозначаем их через $\tilde{F}(u, v)$ и $\tilde{G}(u, v)$. С помощью (7.7) они приведут к определению переходных вероятностей $p(u, v)$. Стохастичность получающихся переходных матриц $\mathcal{P}$ тоже нужно будет проверить.

Только тогда мы будем использовать рассуждения из теории потенциала, чтобы показать, что $\tilde{G}(u, v)$ действительно является функцией Грина, связанной с $\mathcal{P}$, так что можно будет убрать знак вопроса, подразумевающийся в симболе “ $\sim$ ”.

Прежде всего, ввиду теоремы 7.1 должно выполняться равенство

$$C \cdot \phi(v) = \tilde{G}(v, o),$$

откуда в силу (6.7) и (6.10) получаем

$$\tilde{F}(v, v^-) = \frac{\phi(v)}{\phi(v^-)} \quad \text{для } v \in T \setminus \{o\} \quad (7.10)$$

и, более общо,

$$\tilde{F}(v, u) = \frac{\phi(v)}{\phi(u)}, \quad \text{когда } u \leq v.$$

Сразу заметим, что $0 < \tilde{F}(v, u) < 1$, когда $u < v$, и $\tilde{F}(u, u) = 1$.

Далее воспользуемся (7.9), чтобы рекуррентно построить $\tilde{F}(v^-, v)$ и $\tilde{F}(o, v)$. Начинаем с $\tilde{F}(o, o) = 1$. Если $v \neq o$ и $\tilde{F}(o, v^-)$ уже дано, причем

$$\mu(\partial T_{v^-}) \leq \tilde{F}(o, v^-) \leq 1$$

(нижняя оценка требуется в силу (6.11)), то нужно положить

$$\tilde{F}(v^-, v) = \frac{\mu(\partial T_v)/\tilde{F}(o, v^-)}{1 - \tilde{F}(v, v^-) + \tilde{F}(v, v^-)\mu(\partial T_v)/\tilde{F}(o, v^-)} \quad (7.11)$$

и

$$\tilde{F}(o, v) = \tilde{F}(o, v^-)\tilde{F}(v^-, v).$$

Поскольку

$$\tilde{F}(o, v^-) \geq \mu(\partial T_{v^-}) \geq \mu(\partial T_v),$$

видим, что

$$0 < \tilde{F}(v^-, v) \leq 1.$$

Положим, как следует из (6.10),

$$\tilde{F}(o, v) = \tilde{F}(o, v^-)\tilde{F}(v^-, v).$$

Формула (7.11) преобразуется в следующую:

$$\mu(\partial T_v) = \tilde{F}(o, v^-)\tilde{F}(v^-, v) \frac{1 - \tilde{F}(v, v^-)}{1 - \tilde{F}(v, v^-)\tilde{F}(v^-, v)} \leq \tilde{F}(o, v) \leq 1, \quad (7.12)$$

как и требуется для нашего рекуррентного построения. На этот момент имеем все значения $\tilde{F}(u, v)$, сначала при $u \sim v$, а потом и для всех u, v с помощью взятия произведений вдоль геодезических путей.

Теперь можно вычислить постоянную C : формула (7.8) в сочетании с (7.10) и (7.12) при $u \sim o$ дает равенства

$$\begin{aligned} C\Phi(o) &= \tilde{G}(o, o) = 1 + \sum_{u: u \sim o} \frac{\tilde{F}(o, u)\tilde{F}(u, o)}{1 - \tilde{F}(o, u)\tilde{F}(u, o)} \\ &= 1 + \sum_{u: u \sim o} \frac{\tilde{F}(u, o)}{1 - \tilde{F}(u, o)} \mu(\partial T_u) \\ &= 1 + \sum_{u: u \sim o} \frac{\phi(u)/\phi(o)}{1 - \phi(u)/\phi(o)} \mu(\partial T_u). \end{aligned}$$

Поэтому получаем

$$C = \frac{1}{\phi(o)} + \sum_{u: u \sim o} \frac{\phi(u)/\phi(o)}{\phi(o) - \phi(u)} \mu(\partial T_u). \quad (7.13)$$

Теперь построим $\tilde{G}(u, u)$ с помощью (7.8):

$$\tilde{G}(u, u) = 1 + \sum_{v: v \sim u} \frac{\tilde{F}(u, v) \tilde{F}(v, u)}{1 - \tilde{F}(u, v) \tilde{F}(v, u)}. \quad (7.14)$$

Для $u = o$ мы знаем, что это согласуется с нашим выбором C . Наконец, наш единственный выбор для функции Грина есть

$$\tilde{G}(u, v) = \tilde{F}(u, v) \tilde{G}(v, v), \quad u, v \in T.$$

Теперь мы наконец приходим к единственно возможному способу определения переходных вероятностей с помощью (7.7):

$$p(u, v) = \frac{1}{\tilde{G}(u, u)} \frac{\tilde{F}(u, v)}{1 - \tilde{F}(u, v) \tilde{F}(v, u)}. \quad (7.15)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. Матрица $\mathcal{P}$ является стохастической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 7.1. Сочетая (7.15) с (7.14), выводим, что нужно проверить, что для каждого $u \in T$ выполняется равенство

$$\sum_{v: v \sim u} \frac{\tilde{F}(u, v)(1 - \tilde{F}(v, u))}{1 - \tilde{F}(u, v) \tilde{F}(v, u)} = 1. \quad (7.16)$$

Если $u = o$, то в силу (7.12) последнее равенство есть не что иное, как

$$\sum_{v: v \sim o} \mu(\partial T_v) = 1.$$

Если $u \neq o$, то снова в силу (7.12) левая часть в (7.16) есть

$$\begin{aligned} & \sum_{v: v^- = u} \frac{\tilde{F}(u, v)(1 - \tilde{F}(v, u))}{1 - \tilde{F}(u, v) \tilde{F}(v, u)} + \frac{\tilde{F}(u, u^-)(1 - \tilde{F}(u^-, u))}{1 - \tilde{F}(u, u^-) \tilde{F}(u^-, u)} \\ &= \sum_{v: v^- = u} \frac{\mu(\partial T_v)}{\tilde{F}(o, u)} + 1 - \frac{1 - \tilde{F}(u^-, u)}{1 - \tilde{F}(u, u^-) \tilde{F}(u^-, u)} = 1. \end{aligned}$$

Это доказывает утверждение 7.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.2. Для любого $u_0 \in T$ функция $\tilde{g}_{u_0}(u) = \tilde{G}(u, u_0)$ удовлетворяет равенству $\mathcal{P}\tilde{g}_{u_0} = \tilde{g}_{u_0} - \mathbf{1}_{u_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 7.2. Во-первых, сочетая (7.14) с (7.15), получаем

$$\begin{aligned} P\tilde{g}_{u_0}(u_0) &= \sum_{v: v \sim u_0} p(u_0, v) \tilde{F}(v, u_0) \tilde{G}(u_0, u_0) \\ &= \sum_{v: v \sim u_0} \frac{\tilde{F}(u_0, v) \tilde{F}(v, u_0)}{1 - \tilde{F}(u_0, v) \tilde{F}(v, u_0)} = \tilde{g}_{u_0}(u_0) - 1, \end{aligned}$$

и утверждение 7.2 верно при $u = u_0$. Во-вторых, при $u \neq u_0$ пусть w – сосед вершины u на $\pi(u, u_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} P\tilde{g}_{u_0}(u) &= \sum_{v: v \sim u, v \neq w} p(u, v)\tilde{F}(v, u)\tilde{G}(u, u_0) + p(u, w)\tilde{G}(w, u_0) \\ &= \sum_{v: v \sim u} \underbrace{\frac{\tilde{F}(u, v)\tilde{F}(v, u)}{1 - \tilde{F}(u, v)\tilde{F}(v, u)}}_{\tilde{G}(u, u) - 1} \frac{\tilde{G}(u, u_0)}{\tilde{G}(u, u)} \\ &\quad - p(u, w)\tilde{F}(w, u)\tilde{G}(u, u_0) + p(u, w)\tilde{G}(w, u_0) \\ &= G(u, u_0) \left(1 - \frac{1}{\tilde{G}(u, u)} - p(u, w)\tilde{F}(w, u) + p(u, w)\frac{1}{\tilde{F}(u, w)} \right) \\ &= \tilde{g}_{u_0}(u), \end{aligned}$$

так как

$$\frac{p(u, w)}{\tilde{F}(u, w)} - p(u, w)\tilde{F}(w, u) = \frac{1}{\tilde{G}(u, u)}$$

в силу (7.15). Это завершает доказательство утверждения 7.2.

Теперь мы можем заключить, что функция $\tilde{g}_{u_0}$ непостоянная, положительная и супергармоническая. Поэтому случайное блуждание с переходной матрицей $\mathcal{P}$, заданной формулой (7.15), является невозвратным и обладает функцией Грина $G(u, v)$. Кроме того, в силу теоремы Рисса о разложении имеем

$$\tilde{g}_{u_0} = Gf + h,$$

где h – неотрицательная гармоническая функция, а заряд f потенциала

$$Gf(u) = \sum_v G(u, v)f(v)$$

равен $f = \tilde{g}_{u_0} - P\tilde{g}_{u_0} = \mathbf{1}_{u_0}$, т. е.

$$\tilde{G}(u, u_0) = G(u, u_0) + h(x) \quad \text{для всех } u \in T.$$

Пусть теперь $x \in \partial T$ и $v = u_0 \wedge x$. Если $u \in T_v$, то в силу нашего построения имеем

$$\tilde{G}(u, u_0) = \tilde{G}(u, o) \frac{\tilde{G}(v, u_0)}{\phi(v)} \phi(u) \rightarrow 0 \quad \text{при } u \rightarrow x.$$

Поэтому $\tilde{G}(\cdot, u_0)$ обращается в нуль на бесконечности, и то же верно для h . В силу принципа максимума имеем $h \equiv 0$.

Мы заключаем, что $\tilde{G}(u, v) = G(u, v)$ для всех $u, v \in T$. Но тогда в силу нашего построения также выполнено равенство $\tilde{F}(u, v) = F(u, v)$.

Сравнивая (7.12) с (6.11), видим, что $\mu = \nu_o$. Это завершает доказательство теоремы 7.5.

7.3. Некомпактный случай. Возможности подхода настоящей работы не ограничиваются компактными пространствами. В случае некомпактного локально компактного ультраметрического пространства без изолированных точек дерево строится таким же образом: множество вершин соответствует множеству всех замкнутых шаров, а окрестность в полученном дереве определяется, как выше: если вершина v соответствует шару B , то предшественник v^- — это вершина, соответствующая шару B' (см. определение 3.6), и имеется ребро $[v^-, v]$. Теперь у *каждой* вершины есть предшественник (в то время как в компактном случае у корневой вершины его нет), а дерево имеет корень на бесконечности, т. е. ультраметрическим пространством становится $\partial^*T = \partial T \setminus \{\varpi\}$, где ϖ — выбранный базовый конец дерева T (см. рис. 5).

Теперь начнем с такой ситуации: заданы дерево T и базовый конец $\varpi \in \partial T$, а предшественник $v^- = v_{\varpi}^-$ вершины v относительно ϖ есть сосед вершины v на геодезической $\pi(v, \varpi)$. Для данных двух элементов $w, z \in \widehat{T} \setminus \{\varpi\}$ их конfluence $w \wedge z$ относительно ϖ снова определяется как последний общий элемент на геодезических $\pi(\varpi, w)$ и $\pi(\varpi, z)$ (являющийся вершиной, если только не выполняется $v = w \in \partial^*T$; см. рис. 5). Снова естественно предполагать, что каждая вершина имеет по крайней мере два исходящих соседа.

Рис. 5

В этой ситуации для определения 6.1 ультраметрического элемента $\phi: T \rightarrow (0, \infty)$ нам нужно, кроме монотонности $[\phi(v) < \phi(v^-)]$, чтобы ϕ сходил к ∞ вдоль $\pi(o, \varpi)$, в то время как он должен стремиться к 0 вдоль любой геодезической, идущей на ∂^*T . Соответствующая ультраметрика на ∂^*T тогда задается так же, как раньше:

$$d_\phi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \phi(x \wedge y), & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Заметим здесь, что когда ϕ не стремится к ∞ вдоль $\pi(x, \varpi)$, это также определяет ультраметрику, но тогда (∂^*T, d_ϕ) не будет полным. Кроме того, если неравенство $\phi(v) \leq \phi(v^-)$ не строгое, то получается ультраметрика, но тогда

вышеприведенное построение дерева из замкнутых шаров не восстанавливает первоначальное дерево из (∂^*T, d_ϕ) . Наконец, если ϕ не стремится к 0 вдоль некоторой геодезической $\pi(o, x)$, $x \in \partial^*T$, то x будет изолированной точкой в (∂^*T, d_ϕ) . (Последние два наблюдения верны также в компактном случае для дерева с корневой вершиной.)

Возвращаясь к нашей постановке задачи, заметим, что эталонная мера μ (ϕ, μ, σ) -процесса может иметь бесконечную массу; это есть мера Радона с носителем, равным всему ∂^*T . Опять же мы знаем, что достаточно изучать стандартный (ϕ, μ) -процесс. Мы дадим краткое описание двойственности таких процессов и случайных блужданий на T . Это следует сравнить с последней частью второй работы Дж. Кигами [37] (препринт которой стал доступен, когда большая часть настоящей работы была сделана и, в частности, предварительная версия [64], содержащая разделы 6 и 7 настоящей работы, была уже в обращении).

По отношению к ϖ , ветвь дерева T с корнем в $u \in T$ определяется следующим образом:

$$T_u = T_{\varpi, u} = \{v \in T : u \in \pi(v, \varpi)\}.$$

Тогда ∂T_u – компактное подмножество в ∂^*T , а именно шар с d_ϕ -диаметром $\phi(u)$. Здесь будет удобно обозначить через $T_{o, u}$ ветвь относительно корневой вершины $o \in T$ согласно (6.2). Заметим, что $T_{\varpi, u} = T_{o, u}$ тогда и только тогда, когда $u \notin \pi(o, \varpi)$. В дополнение к базовому концу ϖ выберем такой корень o и обозначим через o_n его n -го предшественника, т.е. вершину на $\pi(o, \varpi)$ на расстоянии n от o .

Пусть теперь $\mathcal{P} = (p(u, v))_{u, v \in T}$ – переходная матрица простого невозвратного случайного блуждания на T . Снова предположим, что (7.1) выполняется: $F(v, v^-) < 1$ для каждого $v \in T$, но теперь предшественники берутся относительно ϖ . (Действительно, отсюда следует (7.1) относительно любого выбора корневой вершины.) Теперь рассмотрим форму Дирихле $\mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{G}}$ и формулу из теоремы 6.4. Нам хотелось бы переместить o в точку ϖ в этой формуле. Мы знаем из леммы 6.5, что меры $\Theta_{o_n}(x, y) d\nu_{o_n}(x) d\nu_{o_n}(y)$ одинаковы для всех n . Однако меры ν_{o_n} , будучи ограниченными на ∂^*T , обычно сходятся слабо к 0. Итак, проведем нормировку, полагая

$$\mu_n = \frac{1}{\nu_{o_n}(\partial T_{o_n})} \nu_{o_n} \quad \text{и} \quad J_n(x, y) = \Theta_{o_n}(x, y) (\nu_{o_n}(\partial T_{o_n}))^2.$$

Для следующей леммы напомним, что $T_u = T_{\varpi, u}$, и заметим, что $u \wedge o = o_k$ для некоторого $k \geq 0$.

ЛЕММА 7.6. Пусть $A \subset \partial^*T$ компактно, так что имеется вершина и такая, что $A \subset \partial T_u$. Если $u \wedge o = o_k$, то для всех $n \geq k$ и всех $x, y \in \partial T_{o_k}$

$$\mu_n(A) = \mu_k(A) =: \mu(A) \quad \text{и} \quad J_n(x, y) = J_k(x, y) =: J(x, y).$$

Имеем

$$J(x, y) = j(x \wedge y) \quad \text{при} \quad j(v) = \frac{\vartheta^2}{K(v, \varpi)^2} \frac{G(v, v)}{m(v)}, \quad v \in T,$$

где

$$\vartheta = \frac{\mathbf{m}(o)\nu_o(\partial T_o)}{G(o, o)},$$

а

$$K(v, \varpi) = \frac{F(v, v \wedge o)}{F(o, v \wedge o)} = \frac{F(v, v \wedge_o \varpi)}{F(o, v \wedge_o \varpi)}$$

– ядро Мартина в ϖ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ∂T_{o_k} содержит и ∂T_o , и A , при $n \geq k$ имеем

$$\mu_n(A) = \frac{\nu_{o_n}(A)}{\nu_{o_n}(\partial T_o)} = \frac{F(o_n, o_k)\nu_{o_k}(A)}{F(o_n, o_k)\nu_{o_k}(\partial T_o)} = \mu_k(A).$$

Аналогично, пусть $x, y \in \partial T_{o_k}$ и пусть $x \wedge y = v$ – элемент из T_{o_k} . Используем тождество

$$\mathbf{m}(v)G(v, w) = \mathbf{m}(w)G(w, v),$$

из которого следует, что

$$\mathbf{m}(o_n)F(o_n, o) = \mathbf{m}(o_n)\frac{G(o_n, o)}{G(o, o)} = \mathbf{m}(o_n)\frac{G(o, o_n)}{G(o, o)}.$$

При $n \geq k$ имеем:

$$\begin{aligned} J_n(x, y) &= \frac{\nu_{o_n}(\partial T_o)^2 \mathbf{m}(o_n)}{F(o_n, v)G(v, o_n)} = \nu_o(\partial T_o)^2 \frac{\mathbf{m}(o_n)^2 F(o_n, o)^2}{\mathbf{m}(o_n)F(o_n, v)G(v, o_n)} \\ &= \frac{\nu_o(\partial T_o)^2 \mathbf{m}(o)^2}{G(o, o)^2} \frac{G(o, o_n)^2}{G(v, o_n)^2} \frac{G(v, v)}{\mathbf{m}(v)}, \end{aligned}$$

что дает предложенную формулу, поскольку

$$G(o, o_n) = F(o, o \wedge v)G(o \wedge v, o_n), \quad G(v, o_n) = F(v, o \wedge v)G(o \wedge v, o_n).$$

Лемма доказана.

Теперь нетрудно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7.7. Пусть дерево T и его базовый конец ϖ – такие, как описано выше. Рассмотрим простое случайное блуждание на T , удовлетворяющее условию $F(v, v^-) < 1$ для каждого $v \in T$. Пусть μ и J – такие, как в лемме 7.6. Тогда для всех непрерывных функций φ, ψ на $\partial^* T$ с компактным носителем форму Дирихле (6.16) можно записать в виде

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{D}}(\varphi, \psi) = \mathcal{E}_J(\varphi, \psi) + \vartheta \cdot \nu_o(\{\varpi\}) \int_{\partial^* T} \varphi(x)\psi(x) d\mu(x)$$

где

$$\mathcal{E}_J(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\partial^* T} \int_{\partial^* T} (\varphi(x) - \varphi(y))(\psi(x) - \psi(y))J(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Если случайное блуждание регулярно, т.е. $\nu_o(\{\varpi\}) = 0$, то форма $\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{D}}$ индуцирует стандартный (μ, ϕ) -процесс, где ультраметрический элемент ϕ относительно ϖ задается формулой

$$\phi(v) = \frac{1}{\vartheta} K(v, \varpi),$$

а ϑ и ядро Мартина $K(v, \varpi)$ определены в лемме 7.6.

В частности, (μ, ϕ) -процесс является граничным процессом с заменой времени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует k такое, что компактные носители функций φ и ψ содержатся в ∂T_{o_k} . Пусть $n \geq k$. Используя леммы 6.5 и 7.6, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{H}\mathcal{D}}(\varphi, \psi) &= \frac{1}{2} \int_{\partial T} \int_{\partial T} (\varphi(x) - \varphi(y))(\varphi(x) - \varphi(y)) J_n(x, y) d\mu_n(x) d\mu_n(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial T_{o_n}} \int_{\partial T_{o_n}} (\varphi(x) - \varphi(y))(\varphi(x) - \varphi(y)) J(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \\ &\quad + \int_{\partial T_{o_n}} \varphi(x) \psi(x) \underbrace{\int_{\partial T \setminus \partial T_{o_n}} J_n(x, y) d\mu_n(y) d\mu(x)}_{=: f_n(x)}. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{1}{2} \int_{\partial T_{o_n}} \int_{\partial T_{o_n}} (\varphi(x) - \varphi(y))(\varphi(x) - \varphi(y)) J(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \rightarrow \mathcal{E}_J(\varphi, \psi).$$

Рассмотрим второе слагаемое. Имеем

$$f_n(x) = \int_{\partial T \setminus \partial T_{o_n}} \Theta_{o_n}(x, y) \nu_{o_n}(\partial T_o) d\nu_{o_n}(y).$$

Для $x \in \partial T_{o_n}$ и $y \in \partial T \setminus \partial T_{o_n}$ их конфлюэнт относительно точки o_n есть сама точка o_n . Поэтому, используя (6.17) и (6.11), получаем

$$\begin{aligned} \Theta_{o_n}(x, y) \nu_{o_n}(\partial T_o) &= \frac{\mathfrak{m}(o_n)}{G(o_n, o_n)} F(o_n, o) \nu_o(\partial T_o) = \frac{\mathfrak{m}(o_n) G(o_n, o)}{G(o_n, o_n) G(o, o)} \nu_o(\partial T_o) \\ &= \frac{\mathfrak{m}(o) G(o, o_n)}{G(o_n, o_n) G(o, o)} \nu_o(\partial T_o) = \frac{\mathfrak{m}(o)}{G(o, o)} \nu_o(\partial T_o) F(o, o_n) \\ &= \vartheta F(o, o_n). \end{aligned}$$

Теперь заметим, что для $y \in \partial T \setminus \partial T_{o_n}$ выполнено равенство $F(o, o_n) d\nu_{o_n}(y) = d\nu_o(y)$. Поэтому

$$f_n(x) = \vartheta \int_{\partial T \setminus \partial T_{o_n}} F(o, o_n) d\nu_{o_n}(y) = \vartheta \cdot \nu_o(\partial T \setminus \partial T_{o_n}) \rightarrow \vartheta \cdot \nu_o(\{\varpi\}),$$

и при $n \rightarrow \infty$ можно воспользоваться теоремой о мажорируемой сходимости, чтобы получить, что

$$\begin{aligned} \int_{\partial T_{o_n}} \varphi(x) \psi(x) \int_{\partial T \setminus \partial T_{o_n}} J_n(x, y) d\mu_n(y) d\mu(x) &= \int_{\partial^* T} \varphi(x) \psi(x) f_n(x) d\mu(x) \\ &\rightarrow \vartheta \cdot \nu_o(\{\varpi\}) \int_{\partial^* T} \varphi(x) \psi(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

как и предлагается. Чтобы доказать формулу для соответствующего ультраметрического элемента, действуем так же, как в доказательстве теоремы 7.1 (см. (7.4) и последующие строчки). Находим, что ультраметрический элемент должен удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\Phi(v)} - \frac{1}{\Phi(v^-)} = (j(v) - j(v^-))\mu(\partial T_v).$$

Правую часть этого уравнения можно вычислить: имеем $v^- \wedge o = o_k$ для некоторого $k \geq 0$ и, сочетая рассуждения после (7.4) с рассуждениями в доказательстве леммы 7.6, получаем

$$\begin{aligned} (j(v) - j(v^-))\mu(\partial T_v) &= \left(\frac{m(o_k)}{F(o_k, v)G(v, o_k)} - \frac{m(o_k)}{F(o_k, v^-)G(v^-, o_k)} \right) \nu_{o_k}(\partial T_v) \nu_{o_k}(\partial T_o) \\ &= \left(\frac{m(o_k)}{G(v, o_k)} - \frac{m(o_k)}{G(v^-, o_k)} \right) F(o_k, o) \nu_o(\partial T_o) \\ &= \left(\frac{G(o, o_k)}{G(v, o_k)} - \frac{G(o, o_k)}{G(v^-, o_k)} \right) \frac{m(o) \nu_o(\partial T_o)}{G(o, o)} \\ &= \frac{\vartheta}{K(v, \varpi)} - \frac{\vartheta}{K(v^-, \varpi)}. \end{aligned}$$

Следовательно, величина $1/\Phi(\cdot) - \vartheta/K(\cdot, \varpi)$ должна быть постоянной. Поскольку случайное блуждание регулярно по Дирихле, имеем $K(v, \varpi) \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow \varpi$. С другой стороны, $\Phi(o_n)$ также должно стремиться к бесконечности. Таким образом, постоянная равна 0, и ϕ имеет предложенный вид. Теорема доказана.

Лемма 7.6 и теорема 7.7 ведут к более ясному пониманию и более простым доказательствам в [37; §§ 10, 11], в частности в [37; теорема 11.3]. Именно, наша предельная мера μ совпадает с мерой ν_* из [37]. Заметим, что имеются примеры, где $\mu(\partial^* T) = \infty$, а также примеры, где $\mu(\partial^* T) < \infty$, несмотря на то, что ультраметрическое пространство некомпактно.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.8. В разделах 6 и 7 настоящей работы всегда предполагалось, что ультраметрическое пространство не имеет изолированных точек, что для дерева означает, что $\deg^+ \geq 2$. Предмет работы [7] – противоположная ситуация, когда все точки изолированы, т.е. пространство дискретно. В таком случае ультраметрическое пространство также является границей дерева, которая состоит не из концов, а из терминальных вершин, т.е. вершин с одним соседом.

С точки зрения настоящего раздела смешанная ситуация так же хорошо поддается изучению. Если начать с локально компактного ультраметрического пространства, имеющего и изолированные, и неизолированные точки, можно таким же образом построить дерево. Множество вершин – это множество всех замкнутых шаров. Изолированные точки станут *конечными вершинами* дерева, у которых нет соседей, кроме предшественника, как, например, вершины x и y на рис. 6. Все внутренние (не конечные) вершины будут иметь исходящую степень ≥ 2 .

Рис. 6

В компактном случае граница ∂T этого дерева состоит из терминальных вершин вместе с пространством концов. В некомпактном случае у нас опять будет базовый конец ϖ , как и выше, и $\partial^* T$ будет состоять из всех концов, кроме ϖ , и из терминальных вершин. Определение ультраметрического элемента остается тем же, но нужно определять его только на внутренних вершинах. В этой общей постановке построение (ϕ, μ, σ) -процессов остается без изменений.

Даже при наличии изолированных точек двойственность между (ϕ, μ, σ) -процессами и случайными блужданиями на соответствующем дереве остается такой, как объяснялось выше. Случайное блуждание должно быть таким, что терминальные вершины поглощающие, а функция Грина стремится к 0 на бесконечности. Формула Дуба–Найм без труда продолжается на этот случай.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.9. Рассмотрим снова общую ситуацию, когда мы начинаем с невозвратного случайного блуждания на локально конечном корневом дереве T .

Предельное распределение ν_o в общем случае не будет иметь в качестве носителя всю границу ∂T . Граничный процесс, конечно, все еще можно построить (см. [36]), но он будет естественно существовать только на $\text{supp}(\nu_o)$. Таким образом, можно считать, что наше ультраметрическое пространство – это только $\text{supp}(\nu_o)$. В общем случае дерево, связанное с этим ультраметрическим пространством, не будет ни тем деревом, с которого мы начали, ни его *невозвратным остовом*, определяемым в [63; (9.27)] (как поддерево, индуцированное вершиной o и всеми $v \in T \setminus \{o\}$ при $F(v, v^-) < 1$, где $v^- = v_o^-$).

Тому имеется две причины. Во-первых, построение дерева по $\text{supp}(\nu_o)$ никогда не вернет вершин с исходящей степенью 1. Во-вторых, какой-то конец, содержащийся в $\text{supp}(\nu_o)$, может быть изолирован внутри этого множества, не будучи в то же время изолированным в ∂T . Но тогда этот элемент станет конечной вершиной в дереве, связанном с ультраметрическим (под)пространством $\text{supp}(\nu_o)$. Это случается в точности тогда, когда невозвратный остов имеет изолированные концы.

Таким образом, следует работать с модифицированным “приведенным” деревом плюс случайное блуждание, чтобы сохранять двойственность между случайными блужданиями и изотропными процессами со скачками. Такие же наблюдения применимы к некомпактному случаю, с базовым концом вместо корня и мерой μ из леммы 7.6 вместо ν_o .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.10. Для заданного невозвратного случайного блуждания на корневом дереве T в работе [36] восстанавливается также *внутренняя метрика* граничного процесса на ∂T (компактный случай!) в терминах того, что называется ультраметрическим элементом в настоящей работе. Это, конечно, $\phi(x) = G(x, o)$, обозначаемый D_x в [36], где показано, что для ν_o -почти каждого $\xi \in \partial T$ имеет место сходимость $D_x \rightarrow 0$ вдоль геодезического луча $\pi(o, \xi)$. Это допускает следующую интерпретацию в терминах теории потенциала.

Точка $x \in \partial T$ называется *регулярной для задачи Дирихле*, если для каждой $\varphi \in C(\partial T)$ ее преобразование Пуассона h_φ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{v \rightarrow x} h_\varphi(v) = \varphi(x).$$

Из работы Д. И. Картрайта, П. М. Соарди и В. Вёсса [14; замечание 2] известно, что x регулярна тогда и только тогда, когда $\lim_{u \rightarrow x} G(u, o) = 0$ (как только T имеет хотя бы 2 конца), см. также [63; теорема 9.43]. В силу той же теоремы из [63] множество регулярных точек имеет ν_o -меру 1, т. е. функция Грина обращается в нуль в ν_o -почти каждой граничной точке.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.11. В доказательстве теоремы 7.5 мы восстанавливали переходные вероятности случайного блуждания исходя из $C \cdot \phi(u) = G(u, o)$ и $\mu = \nu_o$.

Похожий (но немного более простой) вопрос был рассмотрен З. Вондрачком [60]: как восстановить переходные вероятности исходя из *всех* предельных распределений ν_u , $u \in T$, на границе. Метод работы [60] и наш метод основаны на формулах (6.11) и (7.7)–(7.8), которые восходят к работе П. Картье [12].

8. Случайное блуждание, связанное с p -адической дробной производной

В этом разделе рассматривается пример, который объединяет подходы из раздела 5 и разделов 6, 7. Начнем с компактного случая.

8.1. Оператор p -адической дробной производной на $\mathbb{Z}_p$. Пусть $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ – группа p -адических целых чисел. В качестве аналога оператора $\mathfrak{D}^\alpha$ введем оператор $\mathbb{D}^\alpha$ дробной производной на $\mathbb{Z}_p$. Мы покажем, что это лапласиан подходящей изотропной марковской полугруппы. Затем мы построим случайное блуждание, связанное с $\mathbb{D}^\alpha$ в смысле разделов 6, 7.

Поскольку $\mathbb{Z}_p$ – компактная абелева группа, ее двойственная группа $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ – дискретная абелева группа. Известно, что группу $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ можно отождествить с группой

$$Z(p^\infty) = \{p^{-n}m : 0 \leq m < p^n, n = 1, 2, \dots\},$$

оснащенной сложением чисел по модулю 1 в качестве групповой операции. Для множеств (но не групп) имеет место включение $Z(p^\infty) \subset \mathbb{Q}_p$, откуда следует, что на группе $Z(p^\infty)$ корректно определена функция $\xi \mapsto \|\xi\|_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Оператор $(\mathbb{D}^\alpha, \mathcal{V}_c)$, $\alpha > 0$, определяется через преобразование Фурье на компактной абелевой группе $\mathbb{Z}_p$ равенством

$$\widehat{\mathbb{D}^\alpha f}(\xi) = \|\xi\|_p^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in Z(p^\infty),$$

где $\mathcal{V}_c$ – пространство локально постоянных функций на $\mathbb{Z}_p$.

Ср. с определением 5.1 оператора $\mathfrak{D}^\alpha$.

Непосредственно из этого определения следует, что оператор $\mathbb{D}^\alpha$ является неотрицательно определенным самосопряженным оператором, спектр которого совпадает с множеством значений функции

$$\xi \mapsto \|\xi\|_p^\alpha : Z(p^\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

т. е.

$$\text{spec } \mathbb{D}^\alpha = \{0, p^\alpha, p^{2\alpha}, \dots\}.$$

Собственное пространство $\mathcal{H}(\lambda)$ оператора $\mathbb{D}^\alpha$, соответствующее собственному значению $\lambda = p^{k\alpha}$, $k \geq 1$, натянуто на функцию

$$f_k = \frac{1}{\mu_p(p^k \mathbb{Z}_p)} \mathbf{1}_{p^k \mathbb{Z}_p} - \frac{1}{\mu_p(p^{k-1} \mathbb{Z}_p)} \mathbf{1}_{p^{k-1} \mathbb{Z}_p}$$

и ее сдвиги $f_k(\cdot + a)$ с любыми $a \in \mathbb{Z}_p / p^k \mathbb{Z}_p$.

Действительно, вычисляя преобразование Фурье функции f_k :

$$\widehat{f_k}(\xi) = \mathbf{1}_{\{\|\xi\|_p \leq p^k\}} - \mathbf{1}_{\{\|\xi\|_p \leq p^{k-1}\}} = \mathbf{1}_{\{\|\xi\|_p = p^k\}},$$

получаем

$$\widehat{\mathbb{D}^\alpha f_k}(\xi) = \|\xi\|_p^\alpha \widehat{f_k}(\xi) = p^{k\alpha} \widehat{f_k}(\xi).$$

Максимальное число линейно независимых функций в множестве $\{f_k(\cdot + a) : a \in \mathbb{Z}_p/p^k\mathbb{Z}_p\}$ есть $p^{k-1}(p-1)$, откуда вытекает равенство

$$\dim \mathcal{H}(\lambda) = p^{k-1}(p-1).$$

Все вышесказанное показывает, что $\mathbb{D}^\alpha$ совпадает с лапласианом некоторой изотропной марковской полугруппы $(\mathbb{P}_\alpha^t)_{t>0}$ на ультраметрическом пространстве с мерой $(\mathbb{Z}_p, d_p, \mu_p)$. В частности, используя полное описание спектра спрес $\mathbb{D}^\alpha$, вычислим внутреннее расстояние (мы обозначим его через $d_{p,\alpha}(x, y)$):

$$d_{p,\alpha}(x, y) = \left(\frac{\|x - y\|_p}{p} \right)^\alpha.$$

Теперь легко вычислить спектральную функцию $\mathbb{N}_\alpha(x, \tau) \equiv \mathbb{N}_\alpha(\tau)$ и затем плотность скачков $\mathbb{J}_\alpha(x, y) \equiv \mathbb{J}_\alpha(x - y)$ оператора $\mathbb{D}^\alpha$. Покажем, что

$$\mathbb{J}_\alpha(x, y) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \left(\frac{p^{-\alpha} - p^{-\alpha-1}}{1 - p^{-\alpha}} + \frac{1}{\|x - y\|_p^{1+\alpha}} \right). \quad (8.1)$$

Напомним для сравнения, что в соответствии с (5.5) плотность скачков $J_\alpha(x, y)$ оператора $\mathfrak{D}^\alpha$ задается формулой

$$J_\alpha(x, y) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \frac{1}{\|x - y\|_p^{1+\alpha}}.$$

Чтобы доказать (8.1), вычислим $\mathbb{J}_\alpha(z)$. Пусть $\|z\|_p = p^{-l}$, тогда $d_{p,\alpha}(0, z) = p^{-(l+1)\alpha}$ и

$$\mathbb{J}_\alpha(z) = \int_0^{1/d_{p,\alpha}(0,z)} \mathbb{N}_\alpha(\tau) d\tau = \int_0^{p^{(l+1)\alpha}} \mathbb{N}_\alpha(\tau) d\tau.$$

Функция $\mathbb{N}_\alpha(\tau)$ – неубывающая непрерывная слева ступенчатая функция, имеющая скачки в точках $\tau_k = p^{k\alpha}$, $k = 1, 2, \dots$, и принимающая в этих точках значения $\mathbb{N}_\alpha(\tau_k) = p^{k-1}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_\alpha(z) &= 1 \cdot p^\alpha + p(p^{2\alpha} - p^\alpha) + p^2(p^{3\alpha} - p^{2\alpha}) + \dots + p^l(p^{(l+1)\alpha} - p^{l\alpha}) \\ &= \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha-1}} + \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} p^{l(\alpha+1)} \\ &= \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \left(\frac{p^{-\alpha} - p^{-\alpha-1}}{1 - p^{-\alpha}} + \frac{1}{\|z\|_p^{1+\alpha}} \right), \end{aligned}$$

как и требовалось. Далее применим теорему 3.12 и получим

$$\mathbb{D}^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} (f(x) - f(y)) \mathbb{J}_\alpha(x - y) d\mu_p(y). \quad (8.2)$$

Равенства (8.1), (8.2) и (5.1) теперь дают следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. Для любой функции f , определенной на $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$, положим $\tilde{f} = f$ на $\mathbb{Z}_p$ и $\tilde{f} = 0$ в противном случае. Тогда

$$f \in \text{dom}(\mathbb{D}^\alpha) \implies \tilde{f} \in \text{dom}(\mathfrak{D}^\alpha)$$

и

$$\mathbb{D}^\alpha f(x) = \mathfrak{D}^\alpha \tilde{f}(x), \quad (\mathbb{D}^\alpha f, f) = (\mathfrak{D}^\alpha \tilde{f}, \tilde{f}), \quad (8.3)$$

как только $x \in \mathbb{Z}_p$, $f \in \text{dom}(\mathbb{D}^\alpha)$ и $(1, f) = 0$.

8.2. Простое случайное блуждание на корневом дереве $\mathbb{T}_p^\circ$. Чтобы проиллюстрировать теорему 7.5, построим случайное блуждание на корневом дереве, связанном с $\mathbb{Z}_p$, граничный процесс которого совпадает с изотропным процессом, управляемым оператором $C \cdot \mathbb{D}^\alpha$, где $C = p^{-\alpha}(1 - p^{-\alpha})$.

Абелеву группу $\mathbb{Z}_p$ можно отождествить с границей дерева $\mathbb{T}_p^\circ$ с корнем o , где каждая вершина v имеет p исходящих соседей. В нашем отождествлении это дерево шаров ультраметрического пространства $(\mathbb{Z}_p, d_p)$ с корнем o , соответствующим всему $\mathbb{Z}_p$, и ультраметрикой $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$. См. рис. 4 выше, где $p = 2$. Зафиксируем постоянную $c \in (0, 1)$ и рассмотрим простое случайное блуждание на $\mathbb{T}_p^\circ$ такое, что

$$p(v, v^-) = 1 - c \quad \text{и} \quad p(v^-, v) = \begin{cases} 1/p, & \text{если } v^- = o, \\ c/p & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8.4)$$

Используя [63; теорема 1.38 и предложение 9.3], можно точно вычислить функцию Грина $G(v, o)$, вероятности попадания $F(v, o)$ и другие величины, связанные с нашим случайным блужданием. В частности, выбирая $c = (1 + p^{-\alpha})^{-1}$, получим

$$F(v, o) = p^{-\alpha|v|} \quad \text{и} \quad G(v, o) = \frac{p^{-\alpha|v|}}{1 - p^{-\alpha}}, \quad (8.5)$$

где $|v|$ – расстояние на графе от v до o . Видим, что функция Грина обращается в нуль на бесконечности, откуда следует, что случайное блуждание регулярно.

Переходные вероятности инвариантны относительно всех автоморфизмов дерева. Каждый такой автоморфизм должен оставлять на месте o и каждый уровень дерева. Пусть $\nu = \nu_o$ – предельное распределение на $\partial\mathbb{T}_p^\circ$ случайного блуждания, начинающегося в o . Тогда ν также инвариантно под действием группы автоморфизмов дерева (действие которой продолжено на границу). В частности, оно инвариантно под действием $\mathbb{Z}_p$. Итак, при отождествлении $\partial\mathbb{T}_p^\circ$ с $\mathbb{Z}_p$ имеем, что $\nu = \mu_p$ есть нормированная мера Хаара группы $\mathbb{Z}_p$.

Теперь рассмотрим граничный процесс, индуцированный нашим случайным блужданием, как процесс со скачками на $\mathbb{Z}_p$. По теореме 7.1 граничный процесс возникает как изотропный процесс с эталонной мерой μ_p . Пусть $\mathcal{L}$ – его лапласиан. В силу следствия 7.2 множество $\text{sp} \mathcal{L}$ совпадает с множеством значений функции $v \mapsto 1/G(v, o)$, $v \in \mathbb{T}_p^\circ$, к которому добавлен $\{0\}$. Ввиду вышеприведенной формулы для $G(v, o)$ это означает, что

$$\text{sp} \mathcal{L} = \{0, (1 - p^{-\alpha}), p^\alpha(1 - p^{-\alpha}), p^{2\alpha}(1 - p^{-\alpha}), \dots\}.$$

Напомним, что

$$\text{spec } \mathbb{D}^\alpha = \{0, p^\alpha, p^{2\alpha}, \dots\} = \frac{p^\alpha}{1 - p^{-\alpha}} \text{spec } \mathcal{L}.$$

Поскольку $\mathbb{D}^\alpha$ и $\mathcal{L}$ имеют одинаковые ортонормальные базисы из собственных функций, заключаем, что они пропорциональны, т. е.

$$\mathbb{D}^\alpha = \frac{p^\alpha}{1 - p^{-\alpha}} \mathcal{L}. \quad (8.6)$$

Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. *Граничный процесс $\{X_t\}_{t>0}$, связанный с определенным в (8.4) случайным блужданием с параметром $c = (1 + p^{-\alpha})^{-1}$, и изотропный процесс $\{X_t^\alpha\}_{t>0}$, управляемый оператором $\mathbb{D}^\alpha$, связаны линейной заменой времени: $X_{t/C}^\alpha = X_t$, где $C = p^{-\alpha}(1 - p^{-\alpha})$.*

Из равенства (8.6) следует, что плотность скачков $\mathbb{J}_\alpha(x, y)$ оператора $\mathbb{D}^\alpha$ и ядро Дуба–Найм $\Theta_o(x, y)$ оператора $\mathcal{L}$ связаны равенством

$$\mathbb{J}_\alpha(x, y) = \frac{p^\alpha}{1 - p^{-\alpha}} \Theta_o(x, y). \quad (8.7)$$

В заключение покажем, как вычислить ядро Дуба–Найм

$$\Theta_o(x, y) = \frac{1}{G(o, o)F(o, v)F(v, o)}, \quad \text{где } v = x \wedge y,$$

напрямую, используя данные из (8.5). У нас еще нет $F(o, v)$. Имеем

$$N(v) = \frac{1}{F(o, v)F(v, o)}.$$

Поскольку эта величина зависит только от уровня k вершины v , рассмотрим произвольный геодезический луч $[o = v_0, v_1, \dots]$ и построим линейную рекурсию для $N(v_k)$. Обозначая через w_1 произвольного соседа вершины o , отличного от v_1 , и применяя [63; предложение 9.3(b)] и (8.5), получим

$$F(o, v_1) = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} F(w_1, o)F(o, v_1) = \frac{1}{p} + \frac{(p-1)p^{-\alpha}}{p} F(o, v_1),$$

откуда следует, что

$$F(o, v_1) = \frac{p^\alpha}{p^{\alpha+1} - p + 1}.$$

Итак, получаем начальные значения

$$N(v_0) = 1 \quad \text{и} \quad N(v_1) = p^{\alpha+1} - p + 1.$$

Далее, при $k \geq 1$ пусть w_{k+1} — исходящий сосед вершины v_k , отличный от v_{k+1} . Снова применяя [63; предложение 9.3(b)] и (8.5), получим

$$\begin{aligned} F(v_k, v_{k+1}) &= \frac{p^\alpha}{p(p^\alpha + 1)} + \frac{(p-1)p^\alpha}{p(p^\alpha + 1)} F(w_{k+1}, v_k)F(v_k, v_{k+1}) \\ &\quad + \frac{1}{p^\alpha + 1} F(v_{k-1}, v_k)F(v_k, v_{k+1}). \end{aligned}$$

Подставим значение $F(w_{k+1}, v_k) = p^{-\alpha}$ и разделим на

$$F(o, v_{k+1}) = F(o, v_k)F(v_k, v_{k+1}) = F(o, v_{k-1})F(v_{k-1}, v_k)F(v_k, v_{k+1}).$$

Тогда

$$\frac{1}{F(o, v_k)} = \frac{p^\alpha}{p(p^\alpha + 1)} \frac{1}{F(o, v_{k+1})} + \frac{p-1}{p(p^\alpha + 1)} \frac{1}{F(o, v_k)} + \frac{1}{p^\alpha + 1} \frac{1}{F(o, v_{k-1})}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $1/F(v_k, o) = p^{\alpha k}$, получим

$$N(v_k) = \frac{1}{p(p^\alpha + 1)} N(v_{k+1}) + \frac{p-1}{p(p^\alpha + 1)} N(v_k) + \frac{p^\alpha}{p^\alpha + 1} N(v_{k-1}).$$

Это однородная линейная рекурсия второго порядка с постоянными коэффициентами. Ее характеристический многочлен имеет корни 1 и $p^{\alpha+1}$. Поэтому

$$N(v_k) = A + Bp^{(\alpha+1)k}.$$

Подставляя начальные значения, без труда находим значения A и B . Чтобы получить ядро Дуба–Наим, нужно умножить на $1/G(o, o) = 1 - p^{-\alpha}$. Итак,

$$\Theta_o(x, y) = \frac{(1 - p^{-\alpha})(p-1)}{p^{\alpha+1} - 1} + \frac{(1 - p^{-\alpha})(p^{\alpha+1} - p)}{p^{\alpha+1} - 1} p^{(\alpha+1)k} = \frac{1 - p^{-\alpha}}{p^\alpha} \mathbb{J}_\alpha(x, y),$$

что и требовалось.

8.3. Случайное блуждание, соответствующее $\mathfrak{D}^\alpha$ на $\mathbb{Q}_p$. Мы построим случайное блуждание, соответствующее дробной производной на всем $\mathbb{Q}_p$, используя лемму 7.6 и теорему 7.7 о двойственности изотропных процессов и случайных блужданий в некомпактном случае.

Дерево, связанное с $\mathbb{Q}_p$, является однородным деревом $T = \mathbb{T}_p$ со степенями $p+1$. Нужно выбрать базовый конец ϖ . Тогда можно отождествить его нижнюю границу $\partial^* \mathbb{T}_p$ с полем p -адических чисел. Относительно ϖ каждая вершина v имеет предшественника v^- и p последователей. Каждое поддереву $T_v = T_{\varpi, v}$ изоморфно корневому дереву $\mathbb{T}_p^o$, рассмотренному выше в компактном случае p -адических целых чисел. В частности, выберем такую корневую вершину o , что $\partial T_o = \mathbb{Z}_p$. См. рис. 5 выше с $p=2$.

Теперь определим случайное блуждание на $\mathbb{T}_p$, как в (8.4), но с предшественниками относительно ϖ :

$$p(v, v^-) = 1 - c \quad \text{и} \quad p(v^-, v) = \frac{c}{p}, \quad \text{где} \quad c = (1 + p^{-\alpha})^{-1}. \quad (8.8)$$

Касательно следующих величин см., например, [62; с. 423, 424]. Для всех $v \in \mathbb{T}_p$

$$F(v, v^-) = p^{-\alpha}, \quad F(v^-, v) = p^{-1}, \quad G(v, v) = \frac{1 + p^{-\alpha}}{1 - p^{-\alpha-1}}$$

и

$$\nu_v(\partial T_v) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{-\alpha-1}}.$$

Это дает, что эталонная мера μ граничного процесса относительно ϖ , заданная леммой 7.6, является стандартной мерой Хаара на $\mathbb{Q}_p$.

Вычислим $\vartheta = (1 - p^{-\alpha})/(1 + p^{-\alpha})$. Кроме того, положим $\mathfrak{h}(v) = d(v, v \wedge o) - d(o, v \wedge o)$ (где d – графовая метрика). Это *орициклическое число* вершины v . То есть вершины с $\mathfrak{h}(v) = k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются элементами k -го поколения H_k дерева (см. рис. 5), а ∂T_v соответствует шару радиуса p^{-k} в стандартной ультраметрике на $\mathbb{Q}_p$. Тогда

$$K(v, \varpi) = p^{\alpha \mathfrak{h}(v)} \quad \text{и} \quad \mathfrak{m}(v) = p^{(\alpha-1)\mathfrak{h}(v)}.$$

Объединяя вышесказанное, получаем

$$\Phi(v) = \frac{1 + p^{-\alpha}}{1 - p^{-\alpha}} p^{-\alpha \mathfrak{h}(v)} \quad \text{и} \quad \mathfrak{j}(v) = \frac{(1 - p^{-\alpha})^2}{(1 + p^{-\alpha})(1 - p^{-\alpha-1})} p^{(\alpha+1)\mathfrak{h}(v)}.$$

Переводя это обратно в p -адические обозначения, заключаем, что внутренняя метрика и плотность скачков граничного процесса относительно ϖ задаются формулами

$$d_\phi(x, y) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 + p^{-\alpha}} \|x - y\|_p^\alpha,$$

$$J(x, y) = \frac{(1 - p^{-\alpha})^2}{(1 + p^{-\alpha})(1 - p^{-\alpha-1})} \frac{1}{\|x - y\|_p^{\alpha+1}} = \frac{1 - p^{-\alpha}}{p^\alpha + 1} J_\alpha(x, y),$$

где J_α – плотность скачков, связанная с $\mathfrak{D}^\alpha$. Итак, мы наконец получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. *Граничный процесс $\{X_t\}_{t>0}$ относительно базового конца ϖ , связанный со случайным блужданием (8.8) на $\mathbb{T}_p$, и изотропный процесс со скачками $\{X_t^\alpha\}_{t>0}$, управляемый оператором $\mathfrak{D}^\alpha$ на $\mathbb{Q}_p$, связаны линейной заменой времени: $X_{t/C^*} = X_t^\alpha$, где $C^* = (1 - p^{-\alpha})/(p^\alpha + 1)$.*

Список литературы

- [1] S. Albeverio, W. Karwowski, “Diffusion on p -adic numbers”, *Gaussian random fields* (Nagoya, 1990), Ser. Probab. Statist., **1**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, 86–99.
- [2] S. Albeverio, W. Karwowski, “A random walk on p -adics – the generator and its spectrum”, *Stochastic Process. Appl.*, **53**:1 (1994), 1–22.
- [3] S. Albeverio, X. Zhao, “On the relation between different constructions of random walks on p -adics”, *Markov Process. Related Fields*, **6**:2 (2000), 239–255.
- [4] D. Aldous, S. N. Evans, “Dirichlet forms on totally disconnected spaces and bipartite Markov chains”, *J. Theoret. Probab.*, **12**:3 (1999), 839–857.
- [5] A. Bendikov, B. Bobikau, Ch. Pittet, “Some spectral and geometric aspects of countable groups”, *Random walks, boundaries and spectra*, Progr. Probab., **64**, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011, 227–234.

- [6] A. Bendikov, B. Bobikau, Ch. Pittet, “Spectral properties of a class of random walks on locally finite groups”, *Groups Geom. Dyn.*, **7**:4 (2013), 791–820.
- [7] A. Bendikov, A. Grigor’yan, Ch. Pittet, “On a class of Markov semigroups on discrete ultra-metric spaces”, *Potential Anal.*, **37**:2 (2012), 125–169.
- [8] A. Bendikov, P. Krupski, “On the spectrum of the hierarchical Laplacian”, *Potential Anal.*, 2014 (to appear); 2013, 27 pp., arXiv:1308.4883v2.
- [9] A. Bendikov, L. Saloff-Coste, *Random walks on some countable groups*, preprint, 2011.
- [10] C. Berg, G. Forst, *Potential theory on locally compact abelian groups*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **87**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975, vii+197 pp.
- [11] S. Brofferio, W. Woess, “On transience of card shuffling”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**:5 (2001), 1513–1519.
- [12] P. Cartier, “Fonctions harmoniques sur un arbre”, *Convegno di Calcolo delle Probabilità* (INDAM, Rome, 1971), *Symposia Mathematica*, **9**, Academic Press, London, 1972, 203–270.
- [13] D. I. Cartwright, “Random walks on direct sums of discrete groups”, *J. Theoret. Probab.*, **1**:4 (1988), 341–356.
- [14] D. I. Cartwright, P. M. Soardi, W. Woess, “Martin and end compactifications of non-locally finite graphs”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **338**:2 (1993), 679–693.
- [15] Z.-Q. Chen, M. Fukushima, J. Ying, “Traces of symmetric Markov processes and their characterizations”, *Ann. Probab.*, **34**:3 (2006), 1052–1102.
- [16] T. Coulhon, A. Grigor’yan, Ch. Pittet, “A geometric approach to on-diagonal heat kernel low bounds on groups”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **51**:6 (2001), 1763–1827.
- [17] D. A. Darling, P. Erdős, “On the recurrence of a certain chain”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**:2 (1968), 336–338.
- [18] C. Dellacherie, S. Martínez, J. San Martín, “Ultrametric matrices and induced Markov chains”, *Adv. in Appl. Math.*, **17**:2 (1996), 169–183.
- [19] C. Dellacherie, S. Martínez, J. San Martín, “Ultrametric and tree potential”, *J. Theoret. Probab.*, **22**:2 (2009), 311–347.
- [20] J. L. Doob, “Boundary properties for functions with finite Dirichlet integrals”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **12** (1962), 573–621.
- [21] J. Douglas, “Solution of the problem of Plateau”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33**:1 (1931), 263–321.
- [22] S. N. Evans, “Local properties of Lévy processes on a totally disconnected group”, *J. Theoret. Probab.*, **2**:2 (1989), 209–259.
- [23] S. N. Evans, “Local field Brownian motion”, *J. Theoret. Probab.*, **6**:4 (1993), 817–850.
- [24] S. N. Evans, “Local fields, Gaussian measures, and Brownian motions”, *Topics in probability and Lie groups: boundary theory*, CRM Proc. Lecture Notes, **28**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 11–50.
- [25] Н. Ферейг, С. А. Молчанов, “Случайные блуждания на абелевых группах с бесконечным числом образующих”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.*, 1978, № 5, 22–29; англ. пер.: N. Fereig, S. A. Molchanov, “Random walks on abelian groups with an infinite number of generators”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **33**:5 (1978), 17–23.
- [26] L. Flatto, J. Pitt, “Recurrence criteria for random walks on countable Abelian groups”, *Illinois J. Math.*, **18**:1 (1974), 1–19.
- [27] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, 2nd ed., de Gruyter Stud. Math., **19**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011, x+489 pp.

- [28] M. Gromov, “Asymptotic invariants of infinite groups”, *Geometric group theory*, v. 2 (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **182**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, 1–295.
- [29] S. Haran, “Riesz potentials and explicit sums in arithmetic”, *Invent. Math.*, **101**:1 (1990), 697–703.
- [30] S. Haran, “Analytic potential theory over the p -adics”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **43**:4 (1993), 905–944.
- [31] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis*, v. 1: *Structure of topological groups, integration theory, group representations*, Grundlehren Math. Wiss., **115**, Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963, viii+519 pp.
- [32] B. Hughes, “Trees and ultrametric spaces: a categorical equivalence”, *Adv. Math.*, **189**:1 (2004), 148–191.
- [33] Р. С. Исагилов, “О спектре самосопряженного оператора в $L_2(K)$, где K – локальное поле; аналог формулы Фейнмана–Каца”, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 18–24; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “On the spectrum of a self-adjoint operator in $L_2(K)$, where K is a local field; an analogue of the Feynman–Kac formula”, *Theoret. and Math. Phys.*, **89**:1 (1991), 1024–1028.
- [34] М. А. Касымджанова, “Рекуррентность инвариантных цепей Маркова на классе абелевых групп”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1981, № 3, 3–7; англ. пер.: M. A. Kasymdzhanova, “Recurrence of invariant Markov chains on a class of abelian groups”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **36**:3 (1981), 1–6.
- [35] H. Kesten, F. Spitzer, “Random walks on countably infinite Abelian groups”, *Acta Math.*, **114**:1 (1965), 237–265.
- [36] J. Kigami, “Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees”, *Adv. Math.*, **225**:5 (2010), 2674–2730.
- [37] J. Kigami, “Transitions on a noncompact Cantor set and random walks on its defining tree”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist.*, **49**:4 (2013), 1090–1129.
- [38] А. Н. Кочубей, “Параболические уравнения над полем p -адических чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:6 (1991), 1312–1330; англ. пер.: A. N. Kochubei, “Parabolic equations over the field of p -adic numbers”, *Math. USSR-Izv.*, **39**:3 (1992), 1263–1280.
- [39] A. N. Kochubei, *Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **244**, Marcel Dekker Inc., New York, 2001, xii+316 pp.
- [40] G. F. Lawler, “Recurrence and transience for a card shuffling model”, *Combin. Probab. Comput.*, **4**:2 (1995), 133–142.
- [41] S. Martínez, D. Remenik, J. San Martín, “Level-wise approximation of a Markov process associated to the boundary of an infinite tree”, *J. Theoret. Probab.*, **20**:3 (2007), 561–579.
- [42] M. Del Muto, A. Figà-Talamanca, “Diffusion on locally compact ultrametric spaces”, *Expo. Math.*, **22**:3 (2004), 197–211.
- [43] M. Del Muto, A. Figà-Talamanca, “Anisotropic diffusion on totally disconnected abelian groups”, *Pacific J. Math.*, **225**:2 (2006), 221–229.
- [44] L. Naïm, “Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **7** (1957), 183–281.
- [45] J. Pearson, J. Bellissard, “Noncommutative Riemannian geometry and diffusion on ultrametric Cantor sets”, *J. Noncommut. Geom.*, **3**:3 (2009), 447–480.

- [46] Ch. Pittet, L. Saloff-Coste, “Amenable groups, isoperimetric profiles and random walks”, *Geometric group theory down under* (Canberra, 1996), de Gruyter, Berlin, 1999, 293–316.
- [47] Ch. Pittet, L. Saloff-Coste, “On the stability of the behavior of random walks on groups”, *J. Geom. Anal.*, **10**:4 (2000), 713–737.
- [48] C. Pittet, L. Saloff-Coste, “On random walks on wreath products”, *Ann. Probab.*, **30**:2 (2002), 948–977.
- [49] R. Rammal, G. Toulouse, M. A. Virasoro, “Ultrametricity for physicists”, *Rev. Modern Phys.*, **58**:3 (1986), 765–788.
- [50] J. J. Rodríguez-Vega, W. A. Zúñiga-Galindo, “Taibleson operators, p -adic parabolic equations and ultrametric diffusion”, *Pacific J. Math.*, **237**:2 (2008), 327–347.
- [51] L. Saloff-Coste, “Opérateurs pseudo-différentiels sur certains groupes totalement discontinus”, *Studia Math.*, **83**:3 (1986), 205–228.
- [52] L. Saloff-Coste, “Probability on groups: random walks and invariant diffusions”, *Notices Amer. Math. Soc.*, **48**:9 (2001), 968–977.
- [53] R. L. Schilling, R. Song, Z. Vondraček, *Bernstein functions. Theory and applications*, 2nd ed., de Gruyter Stud. Math., **37**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2012, xiv+410 pp.
- [54] P. M. Soardi, *Potential theory on infinite networks*, Lecture Notes in Math., **1590**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, viii+187 pp.
- [55] M. H. Taibleson, *Fourier analysis on local fields*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1975, xii+294 pp.
- [56] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon, *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Tracts in Math., **100**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, xii+156 pp.
- [57] В. С. Владимиров, “Обобщенные функции над полем p -адических чисел”, *УМН*, **43**:5(263) (1988), 17–53; англ. пер.: V. S. Vladimirov, “Generalized functions over the field of p -adic numbers”, *Russian Math. Surveys*, **43**:5 (1988), 19–64.
- [58] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, “ P -adic Schrödinger-type equation”, *Lett. Math. Phys.*, **18**:1 (1989), 43–53.
- [59] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p -adic analysis and mathematical physics*, Ser. Soviet East European Math., **1**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994, xx+319 pp.
- [60] Z. Vondraček, “A characterization of Markov chains on infinite graphs by limiting distributions”, *Arch. Math. (Basel)*, **65**:5 (1995), 449–460.
- [61] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Math., **138**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, xii+334 pp.
- [62] W. Woess, “Lamplighters, Diestel–Leader graphs, random walks, and harmonic functions”, *Combin. Probab. Comput.*, **14**:3 (2005), 415–433.
- [63] W. Woess, *Denumerable Markov chains. Generating functions, boundary theory, random walks on trees*, EMS Textbk. Math., Eur. Math. Soc., Zürich, 2009, xviii+351 pp.
- [64] W. Woess, *On the duality between jump processes on ultrametric spaces and random walks on trees*, 2012, 24 pp., [arXiv: 1211.7216](https://arxiv.org/abs/1211.7216).

- [65] M. Yamasaki, “Discrete potentials on an infinite network”, *Mem. Fac. Sci. Shimane Univ.*, **13** (1979), 31–44.
- [66] W. A. Zúñiga-Galindo, “Parabolic equations and Markov processes over p -adic fields”, *Potential Anal.*, **28**:2 (2008), 185–200.

Александр Давидович Бендиков

(Alexander Bendikov)

Institute of Mathematics, Wroclaw University,
Wroclaw, Poland

E-mail: bendikov@math.uni.wroc.pl

Поступила в редакцию

12.05.2014

Александр Асатурович Григорьян

(Alexander Grigor'yan)

University of Bielefeld, Germany

E-mail: grigor@math.uni-bielefeld.de

Кристоф Питтэ

(Christophe Pittet)

LATP, Université d'Aix-Marseille, Marseille, France

E-mail: pittet@cmi.univ-mrs.fr

Вольфганг Вёсс

(Wolfgang Woess)

Institut für Mathematische Strukturtheorie, Technische
Universität Graz, Graz, Austria

E-mail: woess@TUGraz.at