Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крутицкий, Задача Дирихле для уравнения диффузии вне плоских разомкнутых поверхностей, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 4, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9608>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:23:55

Задача Дирихле для уравнения диффузии вне плоских разомкнутых поверхностей

П. А. Крутицкий

В пространстве $\mathbb{R}^3$ введем декартовы координаты $x = (x_1, x_2, x_3)$. Рассмотрим конечное число разомкнутых плоских компактных поверхностей с липшицевой границей, расположенных в плоскости $x_3 = 0$ и содержащих свои предельные точки. Будем предполагать, что эти поверхности не имеют общих точек друг с другом, в том числе не имеют общих граничных точек. Совокупность этих поверхностей обозначим Ω . Тем самым, Ω – (несвязная) двумерная замкнутая липшицева область на плоскости $x_3 = 0$. Введем соболевские пространства на Ω :

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{-1/2}(\Omega) &= \{u: u \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^2), \text{ supp } u \subset \Omega\}, \\ H^{1/2}(\Omega) &= \{u: u = U|_{\Omega} \text{ для некоторого } U \in H^{1/2}(\mathbb{R}^2)\}, \\ \|u\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)} &= \|u\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)}, \quad \|u\|_{H^{1/2}(\Omega)} = \min_{U|_{\Omega}=u, U \in H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} \|U\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

Пространства $H^{\pm 1/2}(\mathbb{R}^2)$ и $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ вводятся обычным образом [1], [2]. Сформулируем задачу Дирихле для стационарного уравнения диффузии в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$.

ЗАДАЧА D. Найти функцию $u(x) \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u(x) - k^2 u(x) = 0, \quad k > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

граничному условию $u|_{\Omega} = f \in H^{1/2}(\Omega)$ и условиям на бесконечности: $u(x) = o(|x|^{-1})$, $|\nabla u(x)| = o(|x|^{-1})$ при $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow \infty$.

Граничное условие подразумевает, что функция $u(x)$ имеет след на Ω , который удовлетворяет этому условию. Построим решение задачи D. Ищем решение в виде потенциала простого слоя $U[g](x)$ для стационарного уравнения диффузии

$$\begin{aligned}u(x) = U[g](x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} g(y) K(x-y) dy_1 dy_2, \quad K(x-y) = \frac{\exp(-k|x-y|)}{|x-y|}, \quad (1) \\ |x-y| &= ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2)^{1/2},\end{aligned}$$

с плотностью $g \in \tilde{H}^{-1/2}(\Omega) \subset H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$. Функция $U[g](x)$ определена при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$.

Из [2] вытекает, что потенциал $U[g](x)$ принадлежит $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$, имеет след на Ω : $U[g](x)|_{\Omega} \in H^{1/2}(\Omega)$ и принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ (см. [2; с. 202]). Кроме того, потенциал $U[g](x)$ удовлетворяет условиям на бесконечности. Тем самым, при любой функции g из пространства $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ потенциал $U[g](x)$ удовлетворяет всем условиям задачи D, кроме граничного условия. Выберем функцию $g \in \tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ так, чтобы удовлетворить этому условию. Подставляя потенциал $U[g](x)$ в граничное условие задачи D, получаем операторное уравнение

$$U[g](x)|_{\Omega} = f \in H^{1/2}(\Omega), \quad (2)$$

которое изучено в [1]. Из [1] следует, что уравнение имеет единственное решение $g \in \tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ при любой правой части $f \in H^{1/2}(\Omega)$. Потенциал $U[g](x)$, построенный на этом решении, удовлетворяет всем условиям задачи D. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи D существует и дается формулой (1), где $g \in \tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ – единственное решение уравнения (2), которое однозначно разрешимо в $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$.*

Докажем единственность решения задачи D. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Задача D имеет не более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть теперь $u(x)$ – решение однородной задачи D. Рассмотрим шар B_r достаточно большого радиуса r с центром в начале координат. Считаем, что $\bar{\Omega} \subset B_r$ и $\bar{\Omega} \cap \partial B_r = \emptyset$. Черта сверху означает замыкание, а ∂B_r – сфера, граница шара B_r . Пусть $\mathbb{R}_+^3 = \{x: x \in \mathbb{R}^3, \pm x_3 > 0\}$, так что $\mathbb{R}_+^3$ – верхнее полупространство, а $\mathbb{R}_-^3$ – нижнее полупространство. Положим $B_r^\pm = B_r \cap \mathbb{R}_\pm^3$ и $\partial B_r \cap \mathbb{R}_\pm^3 = S_r^\pm$. Через S_r обозначим пересечение шара B_r и плоскости $x_3 = 0$. Под $\partial B_r^\pm$ понимается граница полушара $B_r^\pm$. Поскольку $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$, то для функции $u(x)$ в B_r^+ и в B_r^- справедлива формула Грина [2; теорема 4.4, с. 118]:

$$\begin{aligned} & \|\nabla u\|_{L_2(B_r^\pm)}^2 + k^2 \|u\|_{L_2(B_r^\pm)}^2 \\ &= \left(u, \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{L_2(S_r^\pm)} \mp \left(u, \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^\pm \right)_{L_2(\Omega)} \mp \left(u, \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right)_{L_2(S_r \setminus \Omega)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Под n понимается внешняя к B_r нормаль на ∂B_r . Под $(\partial u / \partial x_3)^\pm$ понимается аналог нормальной производной (след) на Ω функции $\partial u / \partial x_3$ при стремлении к Ω из $\mathbb{R}_\pm^3$. Поскольку $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, то след $u|_{\partial B_r^\pm} \in H^{1/2}(\partial B_r^\pm)$ функции $u(x)$ на $\partial B_r^\pm$ при стремлении из $B_r^\pm$ существует (см. [2; теоремы 3.37, 3.38, с. 102]), и существует след нормальной производной функции $u(x)$ на $\partial B_r^\pm$: $(\partial u / \partial n)|_{\partial B_r^\pm} \in H^{-1/2}(\partial B_r^\pm)$ при стремлении к $\partial B_r^\pm$ из $B_r^\pm$ [2; с. 116–118]. Пространства $H^{1/2}(\partial B_r^\pm)$ и $H^{-1/2}(\partial B_r^\pm)$ определяются в [2] и являются двойственными на $\partial B_r^\pm$ в смысле скалярного произведения в $L_2(\partial B_r^\pm)$, следовательно, сумма скалярных произведений в правой части (3) определена. Отметим, что в формуле (3) учтены свойства гладкости функции $u(x)$. Сложим тождества, определяемые формулой (3) для B_r^+ и B_r^- , учитывая, что функция $u(x)$ является решением однородной задачи D, а потому удовлетворяет однородному граничному условию: $u|_\Omega = 0 \in H^{1/2}(\Omega)$. Тогда получим

$$\|\nabla u\|_{L_2(B_r \setminus \Omega)}^2 + k^2 \|u\|_{L_2(B_r \setminus \Omega)}^2 = \left(u, \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{L_2(\partial B_r)}.$$

Устремляя r к ∞ и принимая во внимание, что функция $u(x)$ удовлетворяет условиям на бесконечности задачи D, находим: $\|\nabla u\|_{L_2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)}^2 + k^2 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)}^2 = 0$. Поскольку $k > 0$, отсюда следует, что $\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)}^2 = 0$, т. е. $u \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Таким образом, однородная задача D имеет только тривиальное решение. В силу линейности задачи D, неоднородная задача D имеет не более одного решения. Теорема доказана.

В заключение отметим, что задача Дирихле для уравнения Лапласа вне плоских разомкнутых поверхностей изучалась в [3].

Список литературы

- [1] П. А. Крутицкий, УМН, 69:1(415) (2014), 171–172; англ. пер.: P. A. Krutitskii, *Russian Math. Surveys*, 69:1 (2014), 162–164. [2] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, xiv+357 pp. [3] А. В. Сетуха, Численные методы решения некоторых краевых задач с обобщенными граничными условиями и их приложения к аэродинамике, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, М., 2003, 372 с.

Павел Александрович Крутицкий
(Pavel A. Krutitskii)

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: biem@mail.ru

Представлено М. И. Зеликиным
Принято редколлегией

05.06.2014