Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Фонарёв, Исключительные векторные расслоения
на грассманианах, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 4, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 11:47:16

Исключительные векторные расслоения на грассманианах

А. В. Фонарёв

Пусть $X = \text{Gr}(k, V)$ – грассманиан k -мерных подпространств в векторном пространстве V размерности n . Обозначим через U тавтологическое расслоение. В частности, на X имеется короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow U \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow V/U \rightarrow 0.$$

Для всякой диаграммы Юнга α можно построить эквивариантные векторные расслоения $\Sigma^\alpha U$ и $\Sigma^\alpha(V/U)$, применив соответствующий функтор Шура Σ^α . Обозначим через $Y_{a,b}$ множество диаграмм, вписанных в прямоугольник размера $a \times b$.

Пусть γ – строго монотонный путь на вещественной плоскости, ведущий из точки $(0, 0)$ в точку $(n - k, k)$. Рассмотрим точки γ по меньшей мере с одной целочисленной координатой: $(0, 0) = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{l-1}, y_{l-1}), (x_l, y_l) = (n - k, k)$ в порядке возрастания первой координаты.

Данная работа посвящена доказательству следующей теоремы, предложенной в качестве гипотезы в [1] (гипотеза 9.8).

ТЕОРЕМА. *Имеется полуортогональное разложение ограниченной производной категории грассманиана:*

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1(1), \dots, \mathcal{A}_l(l) \rangle,$$

где $\mathcal{A}_i$ порождается векторными расслоениями $\Sigma^\lambda U^* \otimes \Sigma^\mu(V/U)$ для всех возможных пар $(\lambda, \mu) \in Y_{y_i, n-k-x_i} \times Y_{x_i, k-y_i}$.

Для начала опишем строение подкатегорий $\mathcal{A}_i$. Зафиксируем пару чисел $0 \leq a \leq k$, $0 \leq b \leq n - k$ и пару диаграмм $(\lambda_0, \mu_0) \in Y_{a,b} \times Y_{n-k-b, k-a}$. Прямая проверка с применением теоремы Бореля–Ботта–Вейля [2] и правила Литтлвуда–Ричардсона [3; р. 121] показывает следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Множество расслоений*

$$\{\Sigma^\lambda U^* \otimes \Sigma^\mu(V/U) \mid \lambda \subseteq \lambda_0, \mu \subseteq \mu_0\} \quad (1)$$

образует исключительный блок в смысле [1].

Как следствие, если в эквивариантной категории $D_G^b(X)$ перейти к двойственному исключительному набору $\{\mathcal{E}_{\lambda, \mu}\}_{\lambda \subseteq \lambda_0, \mu \subseteq \mu_0}$, он, в свою очередь, окажется исключительным уже в обычной производной категории $D^b(X)$. Более того, можно проверить, что $\mathcal{E}_{\lambda, \mu}$ не зависит от выбора диаграмм λ_0 и μ_0 .

Рассмотрим многообразие частичных флагов $Y = \text{Fl}(k, n - b; V)$ вместе с проекциями

$$\text{Gr}(k, V) = X \xleftarrow{p} Y \xrightarrow{q} \text{Gr}(n - b, V).$$

Обозначим через W и U тавтологические подрасслоения $U \subset W \subset V \otimes \mathcal{O}_Y$ на Y рангов k и $n - b$ соответственно. Пусть $(\lambda, \mu) \in Y_{a,b} \times Y_{n-k-b, k-a}$. Прямым вычислением с использованием формулы проекции последовательно для отображений p и q получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеем $\mathcal{E}_{\lambda, \mu}^* = p_*(\Sigma^\lambda W \otimes \Sigma^\mu(W/U)^*)$, причем высшие прямые образы зануляются: $R^i p_*(\Sigma^\lambda W \otimes \Sigma^\mu(W/U)^*) = 0$ при $i > 0$.*

Предположим, что λ имеет максимально возможную ширину b . Тогда выполнено следующее.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгебраической геометрии НИУ “ВШЭ” (грант Правительства РФ, дог. 11.G34.31.0023) и фонда Д. Зимина “Династия”.

DOI: 10.4213/gm9609

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для некоторых целых чисел $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_b < n$ и диаграмм $\lambda_b \subset \lambda_{b-1} \subset \dots \subset \lambda_1 \subset \lambda$ имеется точная последовательность вида

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_{\lambda^-, \mu^+}(-1) \rightarrow \mathcal{E}_{\lambda_b, \mu} \otimes \Lambda^{n_b} V^* \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_{\lambda_1, \mu} \otimes \Lambda^{n_1} V^* \rightarrow \mathcal{E}_{\lambda, \mu} \rightarrow 0, \quad (2)$$

где λ^- получается из λ удалением первой строки, μ^+ получается из μ добавлением первого столбца высоты $n - k - b$, а числа n_i и диаграммы λ_j такие же, как в [4; предложение 5.3].

Для доказательства предложения 3 нужно рассмотреть соответствующие комплексы на $\text{Gr}(n - b, V)$, построенные в работе [4], и применить к ним преобразование Фурье–Мукаи $p_*(\Sigma^\mu(W/U)^* \otimes q^*(-))$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. Заметим, что любой строго монотонный путь из точки с координатами $(0, 0)$ в точку с координатами $(n - k, k)$ можно продеформировать в любой другой. При этом подкатегории $\mathcal{A}_i$ меняются только при проходе пути через точку целочисленной решетки.

Заметим, что пути, идущему сначала вверх, а затем вправо, соответствует разложение, получающееся небольшой перестройкой полного исключительного набора, построенного М. Капрановым в [5]. Значит, достаточно проверить, что при элементарных преобразованиях вида

происходит перестройка полуортогонального разложения.

Оказывается, можно ограничиться преобразованиями вида

которые, в свою очередь, явно описываются комплексами типа (2).

СЛЕДСТВИЕ. Рассмотрим $X = \text{Gr}(k, 2k)$, а в качестве пути γ возьмем прямолинейный отрезок, соединяющий точки $(0, 0)$ и (k, k) . Соответствующее полуортогональное разложение инвариантно относительно внешнего автоморфизма X .

Список литературы

- [1] A. Kuznetsov, A. Polishchuk, “Exceptional collections on isotropic Grassmannians”, *J. Eur. Math. Soc.* (to appear); 2011, 51 pp., [arXiv:1110.5607](https://arxiv.org/abs/1110.5607). [2] M. Demazure, *Invent. Math.*, **33**:3 (1976), 271–272. [3] W. Fulton, *Young tableaux. With applications to representation theory and geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. [4] А. В. Фонарёв, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:5 (2013), 203–224. [5] М. М. Капранов, *Invent. Math.*, **92**:3 (1988), 479–508.

Антон Вячеславович Фонарёв
(Anton V. Fonarev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
НИУ “ВШЭ”
E-mail: avfonarev@mi.ras.ru

Представлено Д. О. Орловым
Принято редколлегией

23.06.2014