Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Панюшев, О двойных конусах и разложении тензорных произведений,
УМН, 1996, том 51, выпуск 2, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm961>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:25:51

О ДВОЙНЫХ КОНУСАХ И РАЗЛОЖЕНИИ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Д. И. ПАНЮШЕВ

В настоящей заметке излагаются некоторые результаты об алгебрах инвариантов двойных конусов и их приложения к разложению тензорных произведений неприводимых представлений простых алгебр Ли. Основное поле k алгебраически замкнуто и имеет характеристику 0.

Пусть G – простая алгебраическая группа, $U \subset G$ – максимальная унитарная подгруппа и V_λ – неприводимый G -модуль со старшим весом λ . Обозначим через $C(\lambda)$ замыкание орбиты старшего вектора в V_λ^* . Это аффинный конус над обобщенным флаговым многообразием. Если λ, μ – два доминантных веса, то $C(\lambda, \mu) := C(\lambda) \times C(\mu)$ называется (аффинным) двойным конусом. Как показано в [1], [2], описание алгебры U -инвариантов (=ковариантов) $k[C(\lambda, \mu)]^U$ тесно связано с нахождением разложения серии тензорных произведений $V_{n\lambda} \otimes V_{m\mu}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Более точно, алгебра $k[C(\lambda, \mu)]^U$ полиградуирована и, если $r = \text{rk } G$, то градуирующая подгруппа есть $\mathbb{N}^{r+2}$. Допустим нам известно явное выражение для ряда Пуанкаре этой алгебры в виде рациональной функции. Тогда мы можем найти разложение указанной выше серии тензорных произведений, просто разлагая в ряд известную рациональную функцию.

Далее рассматриваются только двойные конусы, связанные с фундаментальными весами. Геометрически это значит, что $C(\lambda, \mu)$ – факториальное многообразие. Структура алгебры $\mathcal{A} := k[C(\lambda, \mu)]^U$ зависит от числа $\tilde{c} = \tilde{c}(\lambda, \mu)$, являющегося сложностью двойного конуса относительно действия группы $\tilde{G} = G \times (k^*)^2$ (см. [2], [3]). Если $\tilde{c} = 0$, то $\mathcal{A}$ – алгебра полиномов, и все такие случаи были описаны П. Литтельманом [1]. Все случаи, для которых $\tilde{c} = 1$, были найдены в [2]. Для них алгебра $\mathcal{A}$ оказалась гиперповерхностью (см. [3, Sect. 3]). Наши новые результаты касаются случая $\tilde{c} = 2$. нумерация фундаментальных весов такая же, как в [4].

ТЕОРЕМА 1. 1. Следующий список содержит все фундаментальные веса φ_i простых групп такие, что $\tilde{c}(\varphi_i, \varphi_i) = 2$:

$$\begin{aligned} B_m, C_m \ (m \geq 3), D_m \ (m \geq 4) - \varphi_2; E_6 - \varphi_6; \\ E_7 - \varphi_6; E_8 - \varphi_1; F_4 - \varphi_1, \varphi_4; G_2 - \varphi_1, \varphi_2. \end{aligned}$$

2. Во всех этих случаях алгебра U -инвариантов является полным пересечением гомологической размерности ≤ 2 , причем минимальная система образующих и соотношения явно указываются.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ. Список весов извлекается из таблиц в [2]. Для вычисления алгебры U -инвариантов используется теорема об ограничении (см. [3, Sect. 1]). При этом выясняется, что почти все двойные конусы из списка имеют изоморфные (или “близкие”) алгебры U -инвариантов.

Заметим, что если старший корень Λ простой алгебры Ли фундаментален, то он появляется в вышеприведенном списке. В следующей теореме собраны результаты, относящиеся к этой группе двойных конусов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – простая алгебраическая группа, такая что $\text{rk } G \geq 4$ и Λ является фундаментальным весом. Тогда $k[C(\Lambda, \Lambda)]^U$ изоморфно некоторой явно указываемой подалгебре в $k[C(\varphi_2, \varphi_2)]^{U(D_4)} = \mathcal{A}$. Более точно,

- (1) $k[C(\varphi_2, \varphi_2)]^{U(D_m)} \simeq \mathcal{A} \ (m \geq 4)$, и гомологическая размерность этих алгебр равна 2;
- (2) существует подалгебра $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, имеющая гомологическую размерность 2 такая, что $k[C(\varphi_2, \varphi_2)]^{U(B_m)} \simeq \mathcal{A}_1$ при $m \geq 4$;
- (3) существует подалгебра $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$, являющаяся гиперповерхностью такая, что $k[C(\Lambda, \Lambda)]^U \simeq \mathcal{A}_2$ для всех особых простых групп.

ПРИМЕР. Опишем строение алгебры $\mathcal{A} := k[C(\varphi_6, \varphi_6)]^{U(E_6)}$. Будем задавать образующие, выписывая их степени по каждому из сомножителей двойного конуса и соответствующие веса. Эта запись корректна, ибо в каждом таком случае соответствующее весовое подпространство алгебры $\mathcal{A}$ одномерно.

Образующие: $x = (1, 0, \varphi_6)$, $y = (0, 1, \varphi_6)$, $i = (1, 1, \underline{0})$, $m = (1, 1, \varphi_6)$, $n = (1, 1, \varphi_3)$, $p = (1, 1, \varphi_1\varphi_5)$, $\alpha = (2, 1, \varphi_3)$, $\beta = (1, 2, \varphi_3)$, $q = (2, 2, \varphi_2\varphi_4)$.

Соотношение: $*x\beta + *y\alpha + *mn = 0$. Здесь “*” означает ненулевой скаляр, зависящий от нормировки образующих.

Поэтому мы получаем следующую формулу для ряда Пуанкаре $F_{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_6, z_1, z_2)$ алгебры $\mathcal{A}$:
числитель:

$$1 - z_1^2 z_2^2 t_3 t_6,$$

знаменатель:

$$(1 - z_1 t_6)(1 - z_2 t_6)(1 - z_1 z_2)(1 - z_1 z_2 t_6)(1 - z_1 z_2 t_3)(1 - z_1 z_2 t_1 t_5)(1 - z_1^2 z_2 t_3)(1 - z_1 z_2^2 t_3)(1 - z_1^2 z_2^2 t_2 t_4).$$

Коэффициент при $z_1^n z_2^m$ в тейлоровском разложении этой функции (являющийся полиномом от $t_i - x$) определяет разложение тензорного произведения $V_{n\varphi_6} \otimes V_{m\varphi_6}$. А именно, моном $dt_1^{l_1} \dots t_6^{l_6}$ означает, что E_6 -модуль со старшим весом $\sum l_i \varphi_i$ входит с кратностью d в разложение этого тензорного произведения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Littelmann P. // J. Algebra. 1994. V. 166. P. 142–157. [2] Panyushev D. // Comment. Math. Helv. 1993. V. 68. P. 455–468. [3] Panyushev D. // Math. Ann. 1995. V. 301. P. 655–675. [4] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.

Принято редколлегией
26.12.1995