Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Галаев, Группы голономии лоренцевых многообразий, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 2, 55–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9610>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 10:23:50

УДК 514.764.214

Группы голономии лоренцевых многообразий

А. С. Галаев

В работе дан обзор недавних результатов о классификации связных групп голономии лоренцевых многообразий. Получено упрощение конструкции лоренцевых метрик со всеми возможными связными группами голономии. В качестве применений рассмотрены уравнение Эйнштейна, лоренцевы многообразия с параллельными и рекуррентными спинорными полями, конформно плоские метрики Волкера и классификация 2-симметрических лоренцевых многообразий.

Библиография: 123 названия.

Ключевые слова: лоренцево многообразие, группа голономии, алгебра голономии, многообразие Волкера, уравнение Эйнштейна, рекуррентное спинорное поле, конформно плоское многообразие, 2-симметрическое лоренцево многообразие.

DOI: 10.4213/rm9610

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	56
2. Группы и алгебры голономии: определения и факты.....	60
2.1. Группы голономии связностей в векторных расслоениях.....	60
2.2. Группы голономии псевдоримановых многообразий.....	61
2.3. Связные неприводимые группы голономии римановых и псевдоримановых многообразий.....	64
3. Слабо неприводимые подалгебры в $\mathfrak{so}(1, n + 1)$	67
4. Тензоры кривизны и классификация алгебр Берже.....	70
4.1. Алгебраические тензоры кривизны и классификация алгебр Берже.....	71
4.2. Тензор кривизны многообразий Волкера.....	73
5. Пространства слабых тензоров кривизны.....	75
6. О классификации слабых алгебр Берже.....	79
7. Конструкции метрик и классификационная теорема.....	81
8. Уравнение Эйнштейна.....	86
8.1. Алгебры голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна.....	86
8.2. Примеры метрик Эйнштейна.....	86
8.3. Лоренцевы многообразия с тотально изотропным оператором Риччи.....	88
8.4. Упрощение уравнения Эйнштейна.....	89
8.5. Случай размерности 4.....	90

9. Римановы и лоренцевы многообразия с рекуррентными спинорными полями	92
9.1. Римановы многообразия	93
9.2. Лоренцевы многообразия	94
10. Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии	95
11. 2-симметрические лоренцевы многообразия	99
Список литературы	101

1. Введение

Понятие группы голономии впервые было введено в работах Э. Картана [42] и [44], в [43] он использовал группы голономии для классификации римановых симметрических пространств. Группа голономии псевдориманова многообразия является подгруппой Ли группы Ли псевдоортогональных преобразований касательного пространства в некоторой точке многообразия и состоит из параллельных переносов вдоль кусочно гладких петель в этой точке. Чаще всего рассматривают связную группу голономии, т. е. компоненту единицы группы голономии, для ее определения нужно рассмотреть параллельные переносы вдоль стягиваемых петель. Алгебра Ли, соответствующая группе голономии, называется алгеброй голономии. Группа голономии псевдориманова многообразия представляет собой инвариант соответствующей связности Леви-Чивиты; она дает информацию о тензоре кривизны и о параллельных сечениях векторных расслоений, ассоциированных с многообразием, таких как тензорное расслоение или спинорное расслоение.

Важным результатом является классификация Берже связных неприводимых групп голономии римановых многообразий [23]. Оказывается, что связная группа голономии n -мерного неразложимого, не являющегося локально симметрическим, риманова многообразия содержится в следующем списке: $SO(n)$; $U(m)$, $SU(m)$ ($n = 2m$); $Sp(m)$, $Sp(m) \cdot Sp(1)$ ($n = 4m$); $Spin(7)$ ($n = 8$); G_2 ($n = 7$). Берже получил лишь список возможных групп голономии, и возникла задача показать, что существуют многообразия с каждой из этих групп голономии. В частности, это привело к знаменитой теореме Калаби–Яу [123]. Лишь в 1987 г. Брайнт [38] построил примеры римановых многообразий с группами голономии $Spin(7)$ и G_2 . Таким образом, на решение этой задачи потребовалось более тридцати лет. Теорема разложения де Рама [48] сводит проблему классификации связных групп голономии римановых многообразий к случаю неприводимых групп голономии.

Неразложимые римановы многообразия со специальными (т. е. отличными от $SO(n)$) группами голономии имеют важные геометрические свойства. Многообразия с большинством из этих групп голономии являются многообразиями Эйнштейна или Риччи-плоскими и допускают параллельные спинорные поля. Благодаря этим свойствам, римановы многообразия со специальными группами голономии получили применения в теоретической физике (в теории струн, теории суперсимметрии и М-теории) [25], [45], [79], [88], [89], [103]. В свя-

зи с этим за последние 20 лет появилось множество работ, где описываются конструкции полных и компактных римановых многообразий со специальными группами голономии, приведем лишь некоторые из них: [18], [20], [47], [51], [88], [89]. Важно отметить, что в теории струн и М-теории предполагается, что наше пространство локально представляет собой произведение

$$\mathbb{R}^{1,3} \times M \quad (1.1)$$

пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ и некоторого компактного риманова многообразия M размерности 6, 7 или 8 с группой голономии $SU(3)$, G_2 или $Spin(7)$ соответственно. Параллельные спинорные поля на многообразии M определяют суперсимметрии.

Естественно рассмотреть задачу классификации связных групп голономии псевдоримановых многообразий, а в первую очередь – лоренцевых многообразий.

Имеется классификация Берже связных неприводимых групп голономии псевдоримановых многообразий [23]. Однако в случае псевдоримановых многообразий недостаточно рассматривать только неприводимые группы голономии. Теорема разложения Ву [122] позволяет ограничиться рассмотрением связных слабо неприводимых групп голономии. Слабо неприводимая группа голономии не сохраняет никакого невырожденного собственного векторное подпространство касательного пространства. Такая группа голономии может сохранять вырожденное подпространство касательного пространства. В этом случае группа голономии не является редуктивной, в чем и заключается основная сложность.

Долгое время имелись лишь результаты о группах голономии четырехмерных лоренцевых многообразий [10], [81], [87], [91], [92], [102], [109]. В этих работах получена классификация связных групп голономии, рассмотрена связь этой классификации с уравнением Эйнштейна, классификацией Петрова [108] полей тяготения и другими вопросами общей теории относительности.

В 1993 г. Берард-Бержери и Икемакхен сделали первый шаг к классификации связных групп голономии лоренцевых многообразий произвольной размерности [21]. Мы описываем все последующие шаги классификации и ее следствия.

В разделе 2 настоящей работы излагаются определения и некоторые известные результаты о группах голономии римановых и псевдоримановых многообразий.

В разделе 3 мы приступаем к изучению алгебр голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ лоренцевых многообразий (M, g) размерности $n+2 \geq 4$. Теорема Ву позволяет предполагать, что алгебра голономии является слабо неприводимой. Если $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{so}(1, n+1)$, то $\mathfrak{g}$ сохраняет некоторую изотропную прямую касательного пространства и содержится в максимальной подалгебре $\mathfrak{sim}(n) \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$, сохраняющей эту прямую. Прежде всего мы даем геометрическую интерпретацию [57] классификации Берарда-Бержери и Икемакхена [21] слабо неприводимых подалгебр в $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Оказывается, что эти подалгебры исчерпываются алгебрами Ли транзитивных групп Ли преобразований подобия евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Далее мы приступаем к изучению вопроса, какие из полученных подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ являются алгебрами голономии лоренцевых многообразий. Прежде всего следует классифицировать подалгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$, эти алгебры порождаются образами элементов пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ алгебраических тензоров кривизны (тензоров, удовлетворяющих первому тождеству Бьянки) и являются кандидатами в алгебры голономии. В разделе 4 мы описываем структуру пространств тензоров кривизны $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ для подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ [55] и сводим проблему классификации алгебр Берже к проблеме классификации слабых алгебр Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, эти алгебры порождаются образами элементов пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$, состоящего из линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathfrak{h}$, удовлетворяющих некоторому тождеству. Далее мы находим тензор кривизны многообразий Волкера, т. е. многообразий с алгебрами голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

В разделе 5 приведены результаты вычисления пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ из [59]. Это дает полную структуру пространств тензоров кривизны для алгебр голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ возникло как пространство значений некоторой компоненты тензора кривизны лоренцева многообразия. Позже оказалось, что этому пространству принадлежит также некоторая компонента тензора кривизны риманова супермногообразия [63].

Лайстнер [100] классифицировал слабые алгебры Берже, показав далеко не тривиальным образом, что они исчерпываются алгебрами голономии римановых пространств. Возникает естественная проблема получить простое прямое доказательство этого факта. В разделе 6 мы даем такое доказательство из [68] для случая полупростых, не являющихся простыми, алгебр Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Теорема Лайстнера влечет классификацию подалгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

В разделе 7 мы показываем, что все алгебры Берже могут быть реализованы как алгебры голономии лоренцевых многообразий, мы значительно упростим конструкции метрик из [56]. Этим мы завершаем классификацию алгебр голономии лоренцевых многообразий.

Возникает задача построения примеров лоренцевых многообразий с различными группами голономии и дополнительными глобальными геометрическими свойствами. В [17], [19] даны конструкции глобально гиперболических лоренцевых многообразий с некоторыми классами групп голономии. Глобальная гиперболичность представляет собой некоторое сильное условие причинности в лоренцевой геометрии, обобщающее понятие полноты в римановой геометрии. В [95] предложены некоторые конструкции, использующие идею Калузы–Клейна. В работах [16], [97], [101] изучаются различные глобальные геометрические свойства лоренцевых многообразий с разными группами голономии. Группы голономии обсуждаются в недавнем обзоре по глобальной лоренцевой геометрии [105]. В [16] рассматриваются лоренцевы многообразия с несвязными группами голономии, приводятся примеры. В [70], [71] мы приводим алгоритмы для нахождения алгебры голономии произвольного лоренцева многообразия.

Далее рассматриваются применения полученной классификации.

В разделе 8 мы рассматриваем связь алгебр голономии и уравнения Эйнштейна. Эта тема мотивирована работой физиков-теоретиков Гиббонса и Попа [76], в которой была поставлена задача нахождения метрик Эйнштейна с ал-

гебрами голономии в $\mathfrak{sim}(n)$, были рассмотрены примеры и дана их физическая интерпретация. Мы находим алгебры голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна [60], [61]. Далее, мы показываем, что на многообразии Волкера существуют специальные координаты, позволяющие существенно упростить уравнение Эйнштейна [74]. Даны примеры метрик Эйнштейна из [60], [62].

В разделе 9 приводятся результаты о римановых и лоренцевых многообразиях, допускающие рекуррентные спинорные поля [67]. Рекуррентные спинорные поля представляют собой обобщения параллельных спинорных полей. Односвязные римановы многообразия с параллельными спинорными полями классифицированы в [121] в терминах групп голономии. Аналогичная задача для лоренцевых многообразий рассматривалась в [40], [52] и была решена в [98], [99]. Связь групп голономии лоренцевых многообразий и некоторых других решений уравнений на спинорные поля обсуждается в [12], [13], [17] и в физических работах, ссылки на которые приводятся ниже.

В разделе 10 дана локальная классификация конформно плоских лоренцевых многообразий со специальными группами голономии [66]. Соответствующие локальные метрики представляют собой некоторые расширения римановых метрик постоянной секционной кривизны до метрик Волкера. Отмечено, что ранее стояла задача нахождения примеров таких метрик в размерности 4 [75], [81].

В разделе 11 мы получаем классификацию 2-симметрических лоренцевых многообразий, т. е. многообразий, удовлетворяющих условию $\nabla^2 R = 0$, $\nabla R \neq 0$. Мы обсуждаем и упрощаем доказательство этого результата из [5], демонстрируя применения теории групп голономии. Проблема классификации 2-симметрических многообразий рассматривалась также в [28], [29], [90], [112].

Лоренцевы многообразия со слабо неприводимыми, не являющимися неприводимыми группами голономии допускают параллельные распределения изотропных прямых; такие многообразия называют также многообразиями Волкера [37], [120]. Эти многообразия изучаются в геометрических и физических работах. В работах [35], [36], [77] выражается надежда, что лоренцевы многообразия со специальными группами голономии найдут применения в теоретической физике, например в М-теории и теории струн. Предлагается заменить многообразие (1.1) неразложимым лоренцевым многообразием с некоторой подходящей группой голономии. В последнее время в связи с теорией 11-мерной супергравитации появились физические работы, в которых изучаются 11-мерные лоренцевы многообразия, допускающие спинорные поля, удовлетворяющие некоторым уравнениям. При этом используются группы голономии [11], [53], [113]. Отметим также работы [45], [46], [78]. Все это показывает важность изучения групп голономии лоренцевых многообразий и связанных с ними геометрических структур.

В случае псевдоримановых многообразий сигнатур, отличных от римановой и лоренцевой, классификация групп голономии отсутствует. Имеют место только частные результаты [22], [26], [27], [30], [58], [65], [69], [73], [85].

В заключение укажем некоторые другие результаты о группах голономии. Рассмотрение конуса над римановым многообразием позволяет получать римановы метрики со специальными группами голономии и интерпретировать

киллинговы спинорные поля как параллельные спинорные поля [34]. В связи с этим в работе [4] изучались группы голономии конусов над псевдоримановыми, в частности лоренцевыми, многообразиями. Известны результаты о неприводимых группах голономии линейных связностей без кручения [9], [39], [104], [111]. Группы голономии определены также для многообразий с конформными метриками, в частности, эти группы позволяют определить наличие метрик Эйнштейна в конформном классе [14]. Понятие группы голономии используется и для суперсвязностей на супермногообразиях [1], [63].

Автор благодарен Д. В. Алексеевскому за полезные обсуждения и советы.

2. Группы и алгебры голономии: определения и факты

В этом разделе излагаются определения и некоторые известные результаты о группах голономии псевдоримановых многообразий [25], [88], [89], [94]. Все многообразия предполагаются связными.

2.1. Группы голономии связностей в векторных расслоениях. Пусть M – гладкое многообразие, а E – векторное расслоение над M со связностью ∇ . Связность определяет параллельный перенос: для произвольной кусочно гладкой кривой $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ определен изоморфизм векторных пространств

$$\tau_\gamma: E_{\gamma(a)} \rightarrow E_{\gamma(b)}.$$

Зафиксируем точку $x \in M$. Группой голономии G_x связности ∇ в точке x называется группа, состоящая из параллельных переносов вдоль всех кусочно гладких петель в точке x . Рассматривая только петли, гомотопные постоянной петле, получим ограниченную группу голономии G_x^0 . Если многообразие M односвязно, то $G_x^0 = G_x$. Известно, что группа G_x является подгруппой Ли группы Ли $\mathrm{GL}(E_x)$; группа G_x^0 является связной компонентой единицы группы Ли G_x . Пусть $\mathfrak{g}_x \subset \mathfrak{gl}(E_x)$ – соответствующая алгебра Ли; эта алгебра называется алгеброй голономии связности ∇ в точке x . Группы голономии в различных точках связного многообразия изоморфны, и можно говорить о группе голономии $G \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ или об алгебре голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ связности ∇ (здесь m – ранг расслоения E). В случае односвязного многообразия алгебра голономии однозначно определяет группу голономии.

Напомним, что сечение $X \in \Gamma(E)$ называется параллельным, если $\nabla X = 0$. Это равносильно тому, что для любой кусочно гладкой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ имеем $\tau_\gamma X_{\gamma(a)} = X_{\gamma(b)}$. Аналогично, подрасслоение $F \subset E$ называется параллельным, если для любого сечения X подрасслоения F и любого векторного поля Y на M сечение $\nabla_Y X$ снова принадлежит F . Это равносильно тому, что для любой кусочно гладкой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ выполнено $\tau_\gamma F_{\gamma(a)} = F_{\gamma(b)}$.

Важность групп голономии показывает следующий фундаментальный принцип.

ТЕОРЕМА 1. *Существует взаимно однозначное соответствие между параллельными сечениями X расслоения E и векторами $X_x \in E_x$, инвариантными относительно G_x .*

Опишем это соответствие. Для параллельного сечения X нужно взять значение X_x в точке $x \in M$. Так как X инвариантно относительно параллельных переносов, то вектор X_x инвариантен относительно группы голономии. Обратно, имея X_x , определим поле X . Для всякой точки $y \in M$ положим $X_y = \tau_\gamma X_x$, где γ – любая кривая с началом в точке x и концом в точке y . Значение X_y не зависит от выбора кривой γ .

Схожий результат имеет место для подрасслоений.

ТЕОРЕМА 2. *Существует взаимно однозначное соответствие между параллельными подрасслоениями $F \subset E$ и векторными подпространствами $F_x \subset E_x$, инвариантными относительно G_x .*

Следующая теорема, доказанная Амброзом и Зингером [8], показывает связь алгебры голономии и тензора кривизны R связности ∇ .

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $x \in M$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_x$ линейно порождается операторами следующего вида:*

$$\tau_\gamma^{-1} \circ R_y(X, Y) \circ \tau_\gamma \in \mathfrak{gl}(E_x),$$

где γ – произвольная кусочно гладкая кривая с началом в точке x и концом в точке y , а $X, Y \in T_y M$.

2.2. Группы голономии псевдоримановых многообразий. Обратимся к псевдоримановым многообразиям. Напомним, что псевдоримановым многообразием сигнатуры (r, s) называется гладкое многообразие M , на котором задано гладкое поле g симметрических невырожденных билинейных форм сигнатуры (r, s) (r – число минусов) в каждой точке. Если $r = 0$, то такое псевдориманово многообразие называется римановым. Если $r = 1$, то (M, g) называется лоренцевым. В этом случае будем для удобства полагать $s = n + 1$, $n \geq 0$.

На касательном расслоении TM псевдориманова многообразия M канонически задается связность Леви-Чивиты ∇ , определяемая двумя условиями: поле форм g параллельно ($\nabla g = 0$) и кручение равно нулю ($\text{Тог} = 0$). Обозначим через $O(T_x M, g_x)$ группу линейных преобразований пространства $T_x M$, сохраняющих форму g_x . Так как метрика g параллельна, то $G_x \subset O(T_x, M g_x)$. Касательное пространство $(T_x M, g_x)$ можно отождествить с псевдоевклидовым пространством $\mathbb{R}^{r,s}$, метрику этого пространства будем обозначать символом g . Тогда можем отождествить группу голономии G_x с подгруппой Ли в $O(r, s)$, а алгебру голономии $\mathfrak{g}_x$ с подалгеброй в $\mathfrak{so}(r, s)$.

Связность ∇ естественным образом продолжается до связности в тензорном расслоении $\otimes_q^p TM$, группа голономии этой связности совпадает с естественным представлением группы G_x в пространстве тензоров $\otimes_q^p T_x M$. Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Существует взаимно однозначное соответствие между тензорными полями A типа (p, q) и тензорами $A_x \in \otimes_q^p T_x M$, инвариантными относительно G_x .*

Итак, если мы знаем группу голономии многообразия, то геометрическую задачу нахождения параллельных тензорных полей на многообразии можно свести к более простой алгебраической задаче нахождения инвариантных элементов группы голономии. Приведем несколько примеров применения этого принципа.

Напомним, что псевдориманово многообразие (M, g) называется плоским, если (M, g) допускает локальные параллельные поля реперов. Получаем, что (M, g) является плоским тогда и только тогда, когда $G^0 = \{\text{id}\}$ (или $\mathfrak{g} = \{0\}$). Более того, из теоремы Амброза–Зингера следует, что последнее условие равносильно равенству нулю тензора кривизны.

Далее, псевдориманово многообразие (M, g) называется *псевдокэлеровым*, если на M существует параллельное поле эндоморфизмов J со свойствами $J^2 = -\text{id}$ и $g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$ для всех векторных полей X и Y на M . Очевидно, что псевдориманово многообразие (M, g) сигнатуры $(2r, 2s)$ является псевдокэлеровым тогда и только тогда, когда $G \subset U(r, s)$.

Для произвольной подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ положим

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{R \in \text{Hom}(\wedge^2 \mathbb{R}^{r,s}, \mathfrak{g}) \mid R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \\ \text{для всех } X, Y, Z \in \mathbb{R}^{r,s}\}.$$

Множество $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ называется пространством тензоров кривизны типа $\mathfrak{g}$. Будем обозначать через $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}))$ линейное подпространство пространства $\mathfrak{g}$, порожденное элементами вида $R(X, Y)$ для всех $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$, $X, Y \in \mathbb{R}^{r,s}$. Из теоремы Амброза–Зингера и первого тождества Бьянки следует, что если $\mathfrak{g}$ – алгебра голономии псевдориманова пространства (M, g) в точке $x \in M$, то $R_x \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$, т. е. знание алгебры голономии позволяет получить ограничение на тензор кривизны, это будет многократно применяться ниже. Более того, имеет место равенство $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$. Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ называется алгеброй Берже, если выполнено равенство $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$. Алгебры Берже естественно считать кандидатами в алгебры голономии псевдоримановых многообразий. Каждый элемент $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{so}(r, s))$ обладает свойством

$$(R(X, Y)Z, W) = (R(Z, W)X, Y), \quad X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^{r,s}. \quad (2.1)$$

Теорема 3 не дает хорошей возможности найти алгебру голономии. Иногда удобно использовать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Если псевдориманово многообразие (M, g) аналитично, то алгебра голономии $\mathfrak{g}_x$ порождается следующими операторами:*

$$R(X, Y)_x, \nabla_{Z_1} R(X, Y)_x, \nabla_{Z_2} \nabla_{Z_1} R(X, Y)_x, \dots \in \mathfrak{so}(T_x M, g_x),$$

где $X, Y, Z_1, Z_2, \dots \in T_x M$.

Подпространство $U \subset \mathbb{R}^{r,s}$ называется невырожденным, если ограничение формы g на это подпространство невырождено. Подгруппа Ли $G \subset O(r, s)$ (или подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$) называется неприводимой, если она не имеет собственных инвариантных подпространств в $\mathbb{R}^{r,s}$; G (или $\mathfrak{g}$) называется слабо

неприводимой, если она не имеет собственных инвариантных невырожденных подпространств в $\mathbb{R}^{r,s}$.

Ясно, что подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ неприводима (слабо неприводима) тогда и только тогда, когда соответствующая связная подгруппа Ли $G^0 \subset \mathrm{SO}(r, s)$ неприводима (слабо неприводима). Если подгруппа $G \subset \mathrm{O}(r, s)$ неприводима, то она слабо неприводима. Обратное верно, только если форма g положительно или отрицательно определена.

Рассмотрим два псевдоримановых многообразия (M, g) и (N, h) . Пусть $x \in M$, а $y \in N$, и пусть G_x, H_y обозначают соответствующие группы голономии. Прямое произведение многообразий $M \times N$ является псевдоримановым многообразием относительно метрики $g + h$. Псевдориманово многообразие называется (локально) неразложимым, если оно не является (локальным) прямым произведением псевдоримановых многообразий. Обозначим через $F_{(x,y)}$ группу голономии многообразия $M \times N$ в точке (x, y) . Имеем $F_{(x,y)} = G_x \times H_y$. Это утверждение имеет следующее обращение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть (M, g) – псевдориманово многообразие, $x \in M$. Предположим, что суженная группа голономии G_x^0 не является слабо неприводимой. Тогда для пространства $T_x M$ имеем разложение в ортогональную (относительно g_x) прямую сумму невырожденных линейных подпространств:

$$T_x M = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_t,$$

при этом G_x^0 действует тривиально на E_0 , $G_x^0(E_i) \subset E_i$ ($i = 1, \dots, t$) и G_x^0 действует слабо неприводимо на E_i ($i = 1, \dots, t$). Существуют плоское псевдориманово подмногообразие $N_0 \subset M$ и локально неразложимые псевдоримановы подмногообразия $N_1, \dots, N_t \subset M$, содержащие точку x , такие, что $T_x N_i = E_i$ ($i = 0, \dots, t$). Существуют открытые подмножества $U \subset M$, $U_i \subset N_i$ ($i = 0, \dots, t$), содержащие точку x , при этом

$$U = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_t, \quad g|_{TU \times TU} = g|_{TU_0 \times TU_0} + g|_{TU_1 \times TU_1} + \cdots + g|_{TU_t \times TU_t}.$$

Кроме того, имеем разложение

$$G_x^0 = \{\mathrm{id}\} \times H_1 \times \cdots \times H_t,$$

где $H_i = G_x^0|_{E_i}$ – нормальные подгруппы Ли в G_x^0 ($i = 1, \dots, t$).

Более того, если многообразие M односвязно и полно, то имеем глобальное разложение

$$M = N_0 \times N_1 \times \cdots \times N_t.$$

Локальное утверждение этой теоремы для случая римановых многообразий доказали Борель и Лихнерович [31]. Глобальное утверждение для случая римановых многообразий доказал де Рам [48]. Утверждение этой теоремы для случая псевдоримановых многообразий доказал Ву [122].

В [70] даны алгоритмы для нахождения разложения де Рама для римановых многообразий и разложения Ву для лоренцевых многообразий. При этом используется анализ параллельных билинейных симметрических форм на многообразии.

Из теоремы 6 следует, что псевдориманово многообразие является локально неразложимым тогда и только тогда, когда его ограниченная группа голономии слабо неприводима.

Важно отметить, что алгебры Ли групп H_i из теоремы 6 являются алгебрами Берже. Следующая теорема является алгебраической версией теоремы 6.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(p, q)$ – подалгебра Берже, не являющаяся неприводимой. Тогда существуют ортогональное разложение

$$\mathbb{R}^{p,q} = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

и разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$$

в прямую сумму идеалов такие, что $\mathfrak{g}_i$ аннулирует V_j при $i \neq j$ и $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{so}(V_i)$ является слабо неприводимой подалгеброй Берже.

2.3. Связные неприводимые группы голономии римановых и псевдоримановых многообразий. В предыдущем пункте мы видели, что задачу классификации подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ со свойством $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$ можно свести к задаче классификации слабо неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$, удовлетворяющих этому свойству. Для подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ слабая неприводимость равносильна неприводимости. Напомним, что псевдориманово многообразие (M, g) называется локально симметрическим, если для его тензора кривизны выполнено $\nabla R = 0$. По всякому локально симметрическому псевдориманову многообразию можно построить односвязное псевдориманово симметрическое многообразие с той же алгеброй голономии. Имеется классификация Э. Картана односвязных симметрических римановых многообразий [25], [43], [82]. Если группа голономии такого пространства неприводима, то она совпадает с подгруппой изотропии. Итак, связные неприводимые группы голономии локально симметрических римановых многообразий известны.

Важно заметить, что имеет место взаимно однозначное соответствие между односвязными неразложимыми симметрическими римановыми многообразиями (M, g) и простыми $\mathbb{Z}_2$ -градуированными алгебрами Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}^n$ такими, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ совпадает с алгеброй голономии многообразия (M, g) . Пространство (M, g) можно восстановить, используя его алгебру голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ и значение $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})$ тензора кривизны пространства (M, g) в некоторой точке. Для этого определим структуру алгебры Ли на векторном пространстве $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$[A, B] = [A, B]_{\mathfrak{h}}, \quad [A, X] = AX, \quad [X, Y] = R(X, Y), \quad A, B \in \mathfrak{h}, \quad X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда $M = G/H$, где G – односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а $H \subset G$ – связная подгруппа Ли, соответствующая подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

В 1955 г. Берже получил список возможных связных неприводимых групп голономии римановых многообразий [23].

ТЕОРЕМА 8. Если $G \subset \mathrm{SO}(n)$ – связная неприводимая подгруппа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ которой удовлетворяет условию $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$, то либо G является группой голономии локально симметрического риманова пространства,

либо G является одной из следующих групп: $SO(n)$; $U(m)$, $SU(m)$, $n = 2m$; $Sp(m)$, $Sp(m) \cdot Sp(1)$, $n = 4m$; $Spin(7)$, $n = 8$; G_2 , $n = 7$.

Первоначально в списке Берже присутствовала также группа $Spin(9) \subset SO(16)$. В [2] Алексеевский показал, что римановы многообразия с группой голономии $Spin(9)$ являются локально симметрическими. Список всех возможных связных неприводимых групп голономии римановых многообразий, не являющихся локально симметрическими, из теоремы 8 совпадает со списком связных подгрупп Ли $G \subset SO(n)$, действующих транзитивно на единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (из которого нужно исключить группы $Spin(9)$ и $Sp(m) \cdot T$, где T – окружность). Заметив это, в 1962 г. Саймонс получил в [114] прямое доказательство результата Берже. Более простое и геометрическое доказательство получил совсем недавно Олмос [107].

Доказательство теоремы 8 Берже основано на классификации неприводимых вещественных линейных представлений вещественных компактных алгебр Ли. Каждое такое представление можно получить из фундаментальных представлений с помощью тензорных произведений и разложения последних на неприводимые компоненты. Доказательство Берже сводится к проверке того, что такие представления (за небольшим числом исключений) не могут являться представлениями голономии: из тождества Бьянки следует, что $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, если представление содержит больше одного тензорного сомножителя. Остается исследовать только фундаментальные представления, явно описанные Э. Картаном. С помощью сложных вычислений для них также удается показать, что из тождества Бьянки вытекает, что либо $\nabla R = 0$, либо $R = 0$, за небольшим числом исключений, указанных в теореме 8.

Примеры римановых многообразий с группами голономии $U(n/2)$, $SU(n/2)$, $Sp(n/4)$ и $Sp(n/4) \cdot Sp(1)$ построили Калаби, Яу и Алексеевский. В 1987 г. Брайнт [40] построил примеры римановых многообразий с группами голономии $Spin(7)$ и G_2 . Это завершает классификацию связных групп голономии римановых многообразий.

Дадим описание геометрических структур на римановых многообразиях с группами голономии из теоремы 8.

$SO(n)$: Это группа голономии риманова многообразия общего положения. На таком многообразии не возникает никаких дополнительных геометрических структур, связанных с группой голономии.

$U(m)$ ($n = 2m$): Многообразия с этой группой голономии являются кэлеровыми, на каждом из этих многообразий существует параллельная комплексная структура.

$SU(m)$ ($n = 2m$): Каждое из многообразий с этой группой голономии является кэлеровым и Риччи-плоским. Они называются специальными кэлеровыми многообразиями или многообразиями Калаби–Яу.

$Sp(m)$ ($n = 4m$): На каждом из многообразий с этой группой голономии существует параллельная кватернионная структура, т.е. параллельные комплексные структуры I , J , K , связанные соотношениями $IJ = -JI = K$. Эти многообразия называются гиперкэлеровыми.

$\mathrm{Sp}(m) \cdot \mathrm{Sp}(1)$ ($n = 4m$): На каждом из многообразий с этой группой голономии существует параллельное трехмерное подрасслоение расслоения эндоморфизмов касательных пространств, которое локально порождается параллельной кватернионной структурой.

$\mathrm{Spin}(7)$ ($n = 8$), G_2 ($n = 7$): Многообразия с этими группами голономии являются Риччи-плоскими. На многообразии с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$ имеется параллельная 4-форма, на многообразии с группой голономии G_2 имеется параллельная 3-форма.

Таким образом, неразложимые римановы многообразия со специальными (т. е. отличными от $\mathrm{SO}(n)$) группами голономии имеют важные геометрические свойства. Благодаря этим свойствам, римановы многообразия со специальными группами голономии получили применения в теоретической физике (в теории струн и М-теории) [45], [79], [89].

Пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ для неприводимых алгебр голономии римановых многообразий $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ вычислил Алексеевский [2]. Для $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ определим соответствующий тензор Риччи, полагая

$$\mathrm{Ric}(R)(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y),$$

$X, Y \in \mathbb{R}^n$. Пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ допускает следующее разложение в прямую сумму $\mathfrak{g}$ -модулей:

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}_0(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{R}_1(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{R}'(\mathfrak{g}),$$

где $\mathcal{R}_0(\mathfrak{g})$ состоит из тензоров кривизны с нулевым тензором Риччи, $\mathcal{R}_1(\mathfrak{g})$ состоит из тензоров, обнуляемых алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (это пространство тривиально или одномерно), а $\mathcal{R}'(\mathfrak{g})$ – дополнение к этим двум пространствам. Если $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}_1(\mathfrak{g})$, то каждое риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ – локально симметрическое. Такие подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ называются *симметрическими алгебрами Берже*. Алгебры голономии неприводимых римановых симметрических пространств исчерпываются алгебрами $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}(n/2)$, $\mathfrak{sp}(n/4) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ и симметрическими алгебрами Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$. Для алгебр голономии $\mathfrak{su}(m)$, $\mathfrak{sp}(m)$, G_2 и $\mathfrak{spin}(7)$ имеем $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}_0(\mathfrak{g})$, что и показывает, что многообразия с такими алгебрами голономии являются Риччи-плоскими. Далее, для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ имеем $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}_0(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{R}_1(\mathfrak{g})$, поэтому соответствующие многообразия являются многообразиями Эйнштейна.

Следующая теорема, доказанная в 1955 г. Берже, дает классификацию возможных связных неприводимых групп голономии псевдоримановых многообразий [23].

ТЕОРЕМА 9. Если $G \subset \mathrm{SO}(r, s)$ – связная неприводимая подгруппа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ которой удовлетворяет условию $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$, то либо G является группой голономии локально симметрического псевдориманова пространства, либо G является одной из следующих групп: $\mathrm{SO}(r, s)$; $\mathrm{U}(p, q)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $r = 2p$, $s = 2q$; $\mathrm{Sp}(p, q)$, $\mathrm{Sp}(p, q) \cdot \mathrm{Sp}(1)$, $r = 4p$, $s = 4q$; $\mathrm{SO}(r, \mathbb{C})$, $s = r$; $\mathrm{Sp}(p, \mathbb{R}) \cdot \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $r = s = 2p$; $\mathrm{Sp}(p, \mathbb{C}) \cdot \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, $r = s = 4p$; $\mathrm{Spin}(7)$, $r = 0$, $s = 8$; $\mathrm{Spin}(4, 3)$, $r = s = 4$; $\mathrm{Spin}(7)^{\mathbb{C}}$, $r = s = 8$; G_2 , $r = 0$, $s = 7$; $G_{2(2)}^*$, $r = 4$, $s = 3$; $G_2^{\mathbb{C}}$, $r = s = 7$.

Доказательство теоремы 9 основано на том, что подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ удовлетворяет условию $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда ее комплексификация $\mathfrak{g}(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(r + s, \mathbb{C})$ удовлетворяет условию $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))) = \mathfrak{g}(\mathbb{C})$. Иными словами, в теореме 9 перечислены связные вещественные группы Ли, алгебры Ли которых исчерпывают вещественные формы комплексификаций алгебр Ли групп Ли из теоремы 8.

В 1957 г. в [24] Берже получил список связных неприводимых групп голономии псевдоримановых симметрических пространств (мы не приводим этот список здесь ввиду его громоздкости).

3. Слабо неприводимые подалгебры в $\mathfrak{so}(1, n + 1)$

В этом разделе мы дадим геометрическую интерпретацию из [57] классификации Берарда-Бержери и Икемакхена [21] слабо неприводимых подалгебр в $\mathfrak{so}(1, n + 1)$.

Приступим к изучению алгебр голономии лоренцевых многообразий. Рассмотрим связное лоренцево многообразие (M, g) размерности $n + 2 \geq 4$. отождествим касательное пространство в некоторой точке многообразия (M, g) с пространством Минковского $\mathbb{R}^{1, n+1}$. Будем обозначать метрику Минковского на $\mathbb{R}^{1, n+1}$ символом g . Тогда алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M, g) в этой точке отождествляется с подалгеброй лоренцевой алгебры Ли $\mathfrak{so}(1, n + 1)$. Согласно теореме 6, (M, g) не является локально произведением псевдоримановых многообразий тогда и только тогда, когда его алгебра голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)$ слабо неприводима. Поэтому будем предполагать, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)$ слабо неприводима. Если $\mathfrak{g}$ неприводима, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, n + 1)$. Это следует из результатов Берже. В действительности, $\mathfrak{so}(1, n + 1)$ не содержит никакой собственной неприводимой подалгебры; прямые геометрические доказательства этого утверждения можно найти в [50] и [33]. Итак, мы можем предполагать, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)$ слабо неприводима и не является неприводимой, тогда $\mathfrak{g}$ сохраняет некоторое вырожденное подпространство $U \subset \mathbb{R}^{1, n+1}$, а вместе с ним и изотропную прямую $\ell = U \cap U^\perp \subset \mathbb{R}^{1, n+1}$. Зафиксируем произвольный изотропный вектор $p \in \ell$, тогда $\ell = \mathbb{R}p$. Зафиксируем какой-либо изотропный вектор q такой, что $g(p, q) = 1$. Подпространство $E \subset \mathbb{R}^{1, n+1}$, ортогональное векторам p и q , евклидово; чаще всего будем обозначать это пространство через $\mathbb{R}^n$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Получаем базис Витта $p, e_1, \dots, e_n, q$ пространства $\mathbb{R}^{1, n+1}$.

Обозначим через $\mathfrak{so}(1, n + 1)_{\mathbb{R}p}$ подалгебру в $\mathfrak{so}(1, n + 1)$, сохраняющую изотропную прямую $\mathbb{R}p$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(1, n + 1)_{\mathbb{R}p}$ может быть отождествлена со следующей матричной алгеброй Ли:

$$\mathfrak{so}(1, n + 1)_{\mathbb{R}p} = \left\{ \begin{pmatrix} a & X^t & 0 \\ 0 & A & -X \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^n, A \in \mathfrak{so}(n) \right\}.$$

Отождествим матрицу, приведенную выше, с тройкой (a, A, X) . Естественно выделяются подалгебры $\mathbb{R}$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathbb{R}^n$ в $\mathfrak{so}(1, n + 1)_{\mathbb{R}p}$. Ясно, что $\mathbb{R}$ коммутирует

с $\mathfrak{so}(n)$, а $\mathbb{R}^n$ является идеалом, также имеем

$$[(a, A, 0), (0, 0, X)] = (0, 0, aX + AX).$$

Получаем разложение¹

$$\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n)) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Каждая слабо неприводимая, не являющаяся неприводимой подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ сопряжена некоторой слабо неприводимой подалгебре в $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$.

Пусть $SO^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ – связная подгруппа Ли группы Ли $SO(1, n+1)$, сохраняющая изотропную прямую $\mathbb{R}p$. Подалгебры $\mathbb{R}$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ соответствуют следующим связным подгруппам Ли:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \text{id} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid f \in SO(n) \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & X^t & -X^t X/2 \\ 0 & \text{id} & -X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^n \right\} \subset SO^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}.$$

Получаем разложение

$$SO^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p} = (\mathbb{R}^+ \times SO(n)) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Напомним, что всякая подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ компактна и имеет место разложение

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h}),$$

где $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ есть коммутант $\mathfrak{h}$, а $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ – центр $\mathfrak{h}$ [118].

Следующий результат принадлежит Берарду-Бержери и Икемакхену [21].

ТЕОРЕМА 10. *Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ слабо неприводима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли одного из следующих типов.*

Тип 1:

$$\mathfrak{g}^{1, \mathfrak{h}} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a & X^t & 0 \\ 0 & A & -X \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^n, A \in \mathfrak{h} \right\},$$

где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – подалгебра.

Тип 2:

$$\mathfrak{g}^{2, \mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X^t & 0 \\ 0 & A & -X \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^n, A \in \mathfrak{h} \right\},$$

где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – подалгебра.

¹Пусть $\mathfrak{h}$ – некоторая алгебра Ли. Будем писать $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, если $\mathfrak{h}$ раскладывается в прямую сумму идеалов $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}$. Будем писать $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_2$, если $\mathfrak{h}$ раскладывается в прямую сумму подалгебры $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ и идеала $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}$. В соответствующих ситуациях для групп Ли используем символы $\times$ и $\ltimes$.

Тип 3:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi} &= \{(\varphi(A), A, 0) \mid A \in \mathfrak{h}\} \ltimes \mathbb{R}^n \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \varphi(A) & X^t & 0 \\ 0 & A & -X \\ 0 & 0 & -\varphi(A) \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^n, A \in \mathfrak{h} \right\}, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – подалгебра с условием $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}$ и $\varphi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{R}$ – ненулевое линейное отображение со свойством $\varphi|_{\mathfrak{h}'} = 0$.

Тип 4:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} &= \{(0, A, X + \psi(A)) \mid A \in \mathfrak{h}, X \in \mathbb{R}^m\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X^t & \psi(A)^t & 0 \\ 0 & A & 0 & -X \\ 0 & 0 & 0 & -\psi(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^m, A \in \mathfrak{h} \right\}, \end{aligned}$$

где имеет место ортогональное разложение $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ такое, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(m)$, $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \geq n-m$ и $\psi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ – сюръективное линейное отображение со свойством $\psi|_{\mathfrak{h}'} = 0$.

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, ассоциированная выше со слабо неприводимой подалгеброй $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$, называется *ортогональной частью* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Доказательство этой теоремы, приведенное в [21], – алгебраическое и не дает никакой интерпретации полученных алгебр. Приведем геометрическое доказательство этого результата вместе с наглядной интерпретацией.

ТЕОРЕМА 11. *Имеет место изоморфизм групп Ли*

$$\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p} \simeq \mathrm{Sim}^0(n),$$

где $\mathrm{Sim}^0(n)$ – связная группы Ли преобразований подобия евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. При этом изоморфизме слабо неприводимые подгруппы Ли в $\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ соответствуют транзитивным подгруппам Ли в $\mathrm{Sim}^0(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим границу ∂L^{n+1} пространства Лобачевского,

$$\partial L^{n+1} = \{ \mathbb{R}X \mid X \in \mathbb{R}^{1,n+1}, g(X, X) = 0, X \neq 0 \},$$

как множество прямых изотропного конуса

$$C = \{ X \in \mathbb{R}^{1,n+1} \mid g(X, X) = 0 \}.$$

Отождествим ∂L^{n+1} с n -мерной единичной сферой S^n следующим образом. Рассмотрим базис $e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ пространства $\mathbb{R}^{1,n+1}$, где

$$e_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(p - q), \quad e_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(p + q).$$

Рассмотрим векторное подпространство $E_1 = E \oplus \mathbb{R}e_{n+1} \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$. Каждая изотропная прямая пересекает аффинное подпространство $e_0 + E_1$ в единственной точке. Пересечение $(e_0 + E_1) \cap C$ представляет собой множество

$$\{ X \in \mathbb{R}^{1,n+1} \mid x_0 = 1, x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \},$$

являющееся n -мерной сферой S^n . Это дает нам отождествление $\partial L^{n+1} \simeq S^n$.

Группа $SO^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ действует на ∂L^{n+1} (как группа конформных преобразований) и сохраняет точку $\mathbb{R}p \in \partial L^{n+1}$, т.е. $SO^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ действует в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n \simeq \partial L^{n+1} \setminus \{\mathbb{R}p\}$ как группа преобразований подобия. Действительно, вычисления показывают, что элементы

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \text{id} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & X^t & -X^t X/2 \\ 0 & \text{id} & -X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$$

действуют в $\mathbb{R}^n$ как гомотетия $Y \mapsto aY$, специальное ортогональное преобразование $f \in SO(n)$ и сдвиг $Y \mapsto Y + X$ соответственно. Такие преобразования порождают группу $\text{Sim}^0(n)$. Это и дает изоморфизм $SO^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p} \simeq \text{Sim}^0(n)$. Далее, легко установить, что подгруппа $G \subset SO^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ сохраняет собственное невырожденное подпространство в $\mathbb{R}^{1, n+1}$ тогда и только тогда, когда соответствующая подгруппа $G \subset \text{Sim}^0(n)$ сохраняет собственное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$. А последнее условие равносильно транзитивности действия G в $\mathbb{R}^n$ [3], [7].

Остается классифицировать связные транзитивные подгруппы в $\text{Sim}^0(n)$. Это легко сделать, используя результаты из [3], [7] (см. [57]).

ТЕОРЕМА 12. *Связная подгруппа $G \subset \text{Sim}^0(n)$ транзитивна тогда и только тогда, когда G сопряжена группе одного из следующих типов.*

Тип 1: $G = (\mathbb{R}^+ \times H) \ltimes \mathbb{R}^n$, где $H \subset SO(n)$ – связная подгруппа Ли.

Тип 2: $G = H \ltimes \mathbb{R}^n$.

Тип 3: $G = (\mathbb{R}^\Phi \times H) \ltimes \mathbb{R}^n$, где $\Phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow SO(n)$ есть гомоморфизм и

$$\mathbb{R}^\Phi = \{a \cdot \Phi(a) \mid a \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^+ \times SO(n)$$

– группа винтовых гомотетий $\mathbb{R}^n$.

Тип 4: $G = (H \times U^\Psi) \ltimes W$, где имеет место ортогональное разложение $\mathbb{R}^n = U \oplus W$, $H \subset SO(W)$, $\Psi: U \rightarrow SO(W)$ – инъективный гомоморфизм и

$$U^\Psi = \{\Psi(u) \cdot u \mid u \in U\} \subset SO(W) \times U$$

– группа винтовых движений $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно установить, что подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$, соответствующие подгруппам $G \subset \text{Sim}^0(n)$ из последней теоремы, исчерпывают алгебры Ли теоремы 10. Далее будем обозначать алгебру Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ через $\mathfrak{sim}(n)$.

4. Тензоры кривизны и классификация алгебр Берже

В этом разделе мы рассмотрим структуру пространств тензоров кривизны $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ для подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Вместе с результатом Лайстнера [100] о классификации слабых алгебр Берже это даст классификацию подалгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Далее мы найдем тензор кривизны многообразий Волкера, т.е. многообразий с алгебрами голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Результаты этого раздела опубликованы в [55], [66].

4.1. Алгебраические тензоры кривизны и классификация алгебр Берже. При изучении пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ для подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ возникает пространство

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \{P \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{h}) \mid g(P(X)Y, Z) + g(P(Y)Z, X) + g(P(Z)X, Y) = 0, \quad X, Y, Z \in \mathbb{R}^n\}, \quad (4.1)$$

где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – подалгебра. Пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ называется пространством слабых тензоров кривизны для $\mathfrak{h}$. Через $L(\mathcal{P}(\mathfrak{h}))$ будем обозначать линейное подпространство в $\mathfrak{h}$, порожденное элементами вида $P(X)$ для всех $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ и $X \in \mathbb{R}^n$. Легко установить [55], [100], что если $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})$, то для всякого $Z \in \mathbb{R}^n$ имеем $P(\cdot) = R(\cdot, Z) \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. По этой причине алгебра $\mathfrak{h}$ называется слабой алгеброй Берже, если выполнено равенство $L(\mathcal{P}(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$. Естественным образом вводится структура $\mathfrak{h}$ -модуля в пространстве $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$:

$$P_\xi(X) = [\xi, P(X)] - P(\xi X),$$

где $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, $\xi \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathbb{R}^n$. Это влечет, что подпространство $L(\mathcal{P}(\mathfrak{h})) \subset \mathfrak{h}$ является идеалом в $\mathfrak{h}$.

Удобно отождествить алгебру Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)$ с пространством бивекторов $\wedge^2 \mathbb{R}^{1, n+1}$ таким образом, что

$$(X \wedge Y)Z = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X, \quad X, Y, Z \in \mathbb{R}^{1, n+1}.$$

Тогда элемент $(a, A, X) \in \mathfrak{sim}(n)$ соответствует бивектору $-ap \wedge q + A - p \wedge X$, где $A \in \mathfrak{so}(n) \simeq \wedge^2 \mathbb{R}^n$.

Следующая теорема из [55] дает структуру пространств тензоров кривизны для слабо неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

ТЕОРЕМА 13. *Каждый тензор кривизны $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1, \mathfrak{h}})$ однозначно определен элементами*

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad R_0 \in \mathcal{R}(\mathfrak{h}), \quad P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}), \quad T \in \odot^2 \mathbb{R}^n$$

следующим образом:

$$R(p, q) = -\lambda p \wedge q - p \wedge \vec{v}, \quad R(X, Y) = R_0(X, Y) + p \wedge (P(X)Y - P(Y)X), \quad (4.2)$$

$$R(X, q) = -g(\vec{v}, X)p \wedge q + P(X) - p \wedge T(X), \quad R(p, X) = 0, \quad (4.3)$$

$X, Y \in \mathbb{R}^n$. В частности, имеем изоморфизм $\mathfrak{h}$ -модулей

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1, \mathfrak{h}}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n \oplus \odot^2 \mathbb{R}^n \oplus \mathcal{R}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{P}(\mathfrak{h}).$$

Далее,

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{2, \mathfrak{h}}) = \{R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1, \mathfrak{h}}) \mid \lambda = 0, \quad \vec{v} = 0\},$$

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{3, \mathfrak{h}, \varphi}) = \{R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1, \mathfrak{h}}) \mid \lambda = 0, \quad R_0 \in \mathcal{R}(\ker \varphi), \quad g(\vec{v}, \cdot) = \varphi(P(\cdot))\},$$

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{4, \mathfrak{h}, m, \psi}) = \{R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{2, \mathfrak{h}}) \mid R_0 \in \mathcal{R}(\ker \psi), \quad \text{pr}_{\mathbb{R}^{n-m}} \circ T = \psi \circ P\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1 [55]. *Всякая слабо неприводимая подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ является алгеброй Берже тогда и только тогда, когда ее ортогональная часть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ является слабой алгеброй Берже.*

СЛЕДСТВИЕ 2 [55]. *Всякая слабо неприводимая подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ такая, что ее ортогональная часть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ является алгеброй голономии риманова многообразия, является алгеброй Берже.*

Следствие 1 сводит проблему классификации алгебр Берже для лоренцевых многообразий к проблеме классификации слабых алгебр Берже.

ТЕОРЕМА 14 [55]. (I) *Для всякой слабой алгебры Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ существуют ортогональное разложение*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^{n_s} \oplus \mathbb{R}^{n_{s+1}} \quad (4.4)$$

и соответствующее разложение $\mathfrak{h}$ в прямую сумму идеалов

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_s \oplus \{0\}, \quad (4.5)$$

при этом $\mathfrak{h}_i(\mathbb{R}^{n_j}) = 0$ при $i \neq j$, $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ и представление $\mathfrak{h}_i$ неприводимо в $\mathbb{R}^{n_i}$.

(II) *Предположим, что дана подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, для которой существуют разложения пункта (I). Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{P}(\mathfrak{h}_s).$$

Берард-Бержери и Икемакхен [21] показали, что ортогональная часть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ алгебры голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ допускает разложение части (I) теоремы 14.

СЛЕДСТВИЕ 3 [55]. *Предположим, что дана подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, для которой существуют разложения пункта (I) теоремы 14. В этом случае $\mathfrak{h}$ является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{h}_i$ является слабой алгеброй Берже при всех $i = 1, \dots, s$.*

Итак, достаточно рассматривать неприводимые слабые алгебры Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Оказывается, что эти алгебры представляют собой неприводимые алгебры голономии римановых многообразий. Это далеко не тривиальное утверждение получил Лайстнер [100].

ТЕОРЕМА 15 [100]. *Всякая неприводимая подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда она является алгеброй голономии риманова многообразия.*

Ниже, в разделе 6, мы еще обсудим доказательство этой теоремы. Из следствия 1 и теоремы 15 получаем классификацию слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми алгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

ТЕОРЕМА 16. *Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ является слабо неприводимой, не являющейся неприводимой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из подалгебр $\mathfrak{g}^{1, \mathfrak{h}}$, $\mathfrak{g}^{2, \mathfrak{h}}$, $\mathfrak{g}^{3, \mathfrak{h}, \varphi}$, $\mathfrak{g}^{4, \mathfrak{h}, m, \psi} \subset \mathfrak{sim}(n)$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – алгебра голономии риманова многообразия.*

Вернемся к утверждению теоремы 13. Заметим, что элементы, определяющие $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}})$ из теоремы 13, зависят от выбора векторов $p, q \in \mathbb{R}^{1,n+1}$. Рассмотрим вещественное число $\mu \neq 0$, вектор $p' = \mu p$ и произвольный изотропный вектор q' такой, что $g(p', q') = 1$. Существует единственный вектор $W \in E$ такой, что

$$q' = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{1}{2} g(W, W) p + W + q \right).$$

Соответствующее пространство E' имеет вид

$$E' = \{ -g(X, W) p + X \mid X \in E \}.$$

Будем рассматривать отображение

$$E \ni X \mapsto X' = -g(X, W) p + X \in E'.$$

Легко показать, что тензор R определяется элементами $\tilde{\lambda}, \tilde{v}, \tilde{R}_0, \tilde{P}, \tilde{T}$, где, например, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda, \quad \tilde{v} = \frac{1}{\mu} (\vec{v} - \lambda W)', \quad \tilde{P}(X') = \frac{1}{\mu} (P(X) + R_0(X, W))', \\ \tilde{R}_0(X', Y') Z' &= (R_0(X, Y) Z)'. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Пусть $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}})$. Соответствующий тензор Риччи имеет следующий вид:

$$\text{Ric}(p, q) = \lambda, \quad \text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(R_0)(X, Y), \quad (4.7)$$

$$\text{Ric}(X, q) = g(X, \vec{v} - \widetilde{\text{Ric}}(P)), \quad \text{Ric}(q, q) = -\text{tr } T, \quad (4.8)$$

где $\widetilde{\text{Ric}}(P) = \sum_{i=1}^n P(e_i) e_i$. Для скалярной кривизны имеем

$$s = 2\lambda + s_0,$$

где s_0 – скалярная кривизна тензора R_0 .

Оператор Риччи имеет следующий вид:

$$\text{Ric}(p) = \lambda p, \quad \text{Ric}(X) = g(X, \vec{v} - \widetilde{\text{Ric}}(P)) p + \text{Ric}(R_0)(X), \quad (4.9)$$

$$\text{Ric}(q) = -(\text{tr } T) p - \widetilde{\text{Ric}}(P) + \vec{v} + \lambda q. \quad (4.10)$$

4.2. Тензор кривизны многообразий Волкера. Всякое лоренцево многообразие (M, g) с алгеброй голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ (локально) допускает распределение ℓ изотропных прямых. Эти многообразия называются многообразиями Волкера [37], [120].

Векторное расслоение $\mathcal{E} = \ell^\perp / \ell$ называется экраным. Алгебра голономии индуцированной связности в $\mathcal{E}$ совпадает с ортогональной частью $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ алгебры голономии многообразия (M, g) .

На многообразии Волкера (M, g) существуют такие локальные координаты $v, x^1, \dots, x^n, u$, что метрика g имеет вид

$$g = 2 dv du + h + 2A du + H (du)^2, \quad (4.11)$$

где $h = h_{ij}(x^1, \dots, x^n, u) dx^i dx^j$ – семейство римановых метрик, зависящих от параметра u , $A = A_i(x^1, \dots, x^n, u) dx^i$ – семейство 1-форм, зависящих от u , а H – локальная функция на M .

Отметим, что алгебры голономии метрик h содержатся в ортогональной части $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ алгебры голономии метрики g , и это включение может быть строгим.

Векторное поле ∂_v определяет параллельное распределение изотропных прямых и является рекуррентным, т. е. имеет место равенство

$$\nabla \partial_v = \frac{1}{2} \partial_v H du \otimes \partial_v.$$

Поэтому векторное поле ∂_v пропорционально параллельному векторному полю тогда и только тогда, когда $d(\partial_v H du) = 0$, что равносильно равенствам

$$\partial_v \partial_i H = \partial_v^2 H = 0.$$

В этом случае координаты можно выбрать так, что $\nabla \partial_v = 0$ и $\partial_v H = 0$. Алгебры голономии типа 2 и 4 обнуляют вектор p , поэтому соответствующие многообразия допускают (локальные) параллельные изотропные векторные поля, а локальные координаты можно выбрать так, что $\partial_v H = 0$. Напротив, алгебры голономии типа 1 и 3 не обнуляют этот вектор, и поэтому соответствующие многообразия допускают только рекуррентные изотропные векторные поля, в этом случае имеем $d(\partial_v H du) \neq 0$.

Важный класс многообразий Волкера представляют плоские гравитационные волны, которые локально определяются с помощью (4.11), где $A = 0$, $h = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$ и $\partial_v H = 0$. Плоские гравитационные волны – это в точности многообразия Волкера с коммутативными алгебрами голономии $\mathfrak{g} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Бобель [32] построил координаты

$$v, x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^{n_1}), \dots, x_{s+1} = (x_{s+1}^1, \dots, x_{s+1}^{n_{s+1}}), u, \quad (4.12)$$

соответствующие разложению (4.4). Это означает, что

$$h = h_1 + \dots + h_{s+1}, \quad h_\alpha = \sum_{i,j=1}^{n_\alpha} h_{\alpha ij} dx_\alpha^i dx_\alpha^j, \quad h_{s+1} = \sum_{i=1}^{n_{s+1}} (dx_{s+1}^i)^2, \quad (4.13)$$

$$A = \sum_{\alpha=1}^{s+1} A_\alpha, \quad A_\alpha = \sum_{k=1}^{n_\alpha} A_k^\alpha dx_\alpha^k, \quad A_{s+1} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^k} h_{\alpha ij} = \frac{\partial}{\partial x_\beta^k} A_i^\alpha = 0, \quad \text{если } \beta \neq \alpha. \quad (4.14)$$

Рассмотрим поле реперов

$$p = \partial_v, \quad X_i = \partial_i - A_i \partial_v, \quad q = \partial_u - \frac{1}{2} H \partial_v. \quad (4.15)$$

Рассмотрим распределение E , порожденное векторными полями $X_1, \dots, X_n$. Слои этого распределения можно отождествить с касательными пространствами римановых многообразий с римановыми метриками $h(u)$. Пусть R_0 – тензор,

соответствующий семейству тензоров кривизны метрик $h(u)$ при этом отождествлении. Аналогично, обозначим через $\text{Ric}(h)$ соответствующий эндоморфизм Риччи, действующий на сечениях распределения E . Теперь тензор кривизны R метрики g однозначно определен функцией λ , сечением $\vec{v} \in \Gamma(E)$, симметрическим полем эндоморфизмов $T \in \Gamma(\text{End}(E))$, $T^* = T$, тензором кривизны $R_0 = R(h)$ и тензором $P \in \Gamma(E^* \otimes \mathfrak{so}(E))$. Эти тензоры могут быть выражены в терминах коэффициентов метрики (4.11). Пусть $P(X_k)X_j = P_{jk}^i X_i$ и $T(X_j) = \sum_i T_{ij} X_j$. Тогда

$$h_{il} P_{jk}^l = g(R(X_k, q)X_j, X_i), \quad T_{ij} = -g(R(X_i, q)q, X_j).$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\lambda = \frac{1}{2} \partial_v^2 H, \quad \vec{v} = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_v H - A_i \partial_v^2 H) h^{ij} X_j, \quad (4.16)$$

$$h_{il} P_{jk}^l = -\frac{1}{2} \nabla_k F_{ij} + \frac{1}{2} \nabla_k \dot{h}_{ij} - \dot{\Gamma}_{kj}^l h_{li}, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} = & \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j H - \frac{1}{4} (F_{ik} + \dot{h}_{ik}) (F_{jl} + \dot{h}_{jl}) h^{kl} - \frac{1}{4} (\partial_v H) (\nabla_i A_j + \nabla_j A_i) \\ & - \frac{1}{2} (A_i \partial_j \partial_v H + A_j \partial_i \partial_v H) - \frac{1}{2} (\nabla_i \dot{A}_j + \nabla_j \dot{A}_i) \\ & + \frac{1}{2} A_i A_j \partial_v^2 H + \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij} + \frac{1}{4} \dot{h}_{ij} \partial_v H, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где

$$F = dA, \quad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i,$$

– дифференциал 1-формы A , а ковариантные производные берутся относительно метрики h , точка означает частную производную по переменной u . В случае, когда h , A и H не зависят от u , тензор кривизны метрики (4.11) найден в [76]. В [76] найден также тензор Риччи для произвольной метрики (4.11).

Важно заметить, что координаты Волкера не определены канонически, например, полезно наблюдение из [76], показывающее, что если

$$H = \lambda v^2 + v H_1 + H_0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \partial_v H_1 = \partial_v H_0 = 0,$$

то преобразование координат

$$v \mapsto v - f(x^1, \dots, x^n, u), \quad x^i \mapsto x^i, \quad u \mapsto u$$

меняет метрику (4.11) следующим образом:

$$A_i \mapsto A_i + \partial_i f, \quad H_1 \mapsto H_1 + 2\lambda f, \quad H_0 \mapsto H_0 + H_1 f + \lambda f^2 + 2\dot{f}. \quad (4.19)$$

5. Пространства слабых тензоров кривизны

Хотя Лайстнер показал, что подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, порождаемые образами пространств $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$, исчерпываются алгебрами голономии римановых пространств, он не нашел сами пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Здесь мы приведем результаты

Таблица 1. Пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для неприводимых алгебр голономии римановых многообразий $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$	$\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$	$\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$	$\dim \mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$
$\mathfrak{so}(2)$	$\mathbb{R}^2$	0	0
$\mathfrak{so}(3)$	$\mathbb{R}^3$	$V_{4\pi_1}$	5
$\mathfrak{so}(4)$	$\mathbb{R}^4$	$V_{3\pi_1+\pi'_1} \oplus V_{\pi_1+3\pi'_1}$	16
$\mathfrak{so}(n), n \geq 5$	$\mathbb{R}^n$	$V_{\pi_1+\pi_2}$	$\frac{(n-2)n(n+2)}{3}$
$\mathfrak{u}(m), n = 2m \geq 4$	$\mathbb{R}^n$	$(\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$	$m^2(m-1)$
$\mathfrak{su}(m), n = 2m \geq 4$	0	$(\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$	$m^2(m-1)$
$\mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(1), n = 4m \geq 8$	$\mathbb{R}^n$	$\odot^3(\mathbb{C}^{2m})^*$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{3}$
$\mathfrak{sp}(m), n = 4m \geq 8$	0	$\odot^3(\mathbb{C}^{2m})^*$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{3}$
$G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$	0	$V_{\pi_1+\pi_2}$	64
$\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$	0	$V_{\pi_2+\pi_3}$	112
$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n), n \geq 4,$ – симметрическая алгебра Берже	$\mathbb{R}^n$	0	0

вычисления этих пространств из [59], что даст полную структуру пространств тензоров кривизны для алгебр голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – неприводимая подалгебра. Рассмотрим $\mathfrak{h}$ -эквивариантное отображение

$$\widetilde{\text{Ric}}: \mathcal{P}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{\text{Ric}}(P) = \sum_{i=1}^n P(e_i)e_i.$$

Определение этого отображения не зависит от выбора ортонормального базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$ ядро отображения $\widetilde{\text{Ric}}$. Пусть $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ – ортогональное дополнение этого пространства в $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Таким образом,

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_0(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{P}_1(\mathfrak{h}).$$

Так как подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ неприводима, а отображение $\widetilde{\text{Ric}}$ является $\mathfrak{h}$ -эквивариантным, то пространство $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ либо тривиально, либо изоморфно $\mathbb{R}^n$. Пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}(n/2)$ найдены в [100]. В [59] мы вычисляем пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для остальных алгебр голономии римановых многообразий. Главным результатом является таблица 1, где даны пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для всех неприводимых алгебр голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ римановых многообразий (для компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ выражение V_Λ обозначает неприводимое представление $\mathfrak{h}$, определяемое неприводимым представлением алгебры Ли $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ со старшим весом Λ ; $(\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$ обозначает подпространство в $\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m$, состоящее из тензоров таких, что свертка верхнего индекса с любым нижним индексом дает нуль).

Рассмотрим натуральное $\mathfrak{h}$ -эквивариантное отображение

$$\tau: \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{h}), \quad \tau(u \otimes R) = R(\cdot, u).$$

Следующая теорема будет использована для получения явного вида некоторых $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Доказательство теоремы следует из результатов работ [2], [100] и таблицы 1.

ТЕОРЕМА 17. *Для произвольной неприводимой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, $n \geq 4$, $\mathfrak{h}$ -эквивариантное отображение $\tau: \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ является сюръективным. Более того, $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}_0(\mathfrak{h})) = \mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$ и $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}_1(\mathfrak{h})) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$.*

Пусть $n \geq 4$ и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – неприводимая подалгебра. Из теоремы 17 следует, что произвольный $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ можно записать в виде $R(\cdot, x)$, где $R \in \mathcal{R}_0(\mathfrak{h})$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Аналогично, произвольный $P \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$ может быть представлен в виде $\sum_i R_i(\cdot, x_i)$ для некоторых $R_i \in \mathcal{R}_1(\mathfrak{h})$ и $x_i \in \mathbb{R}^n$.

Явный вид некоторых $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Используя полученные выше результаты и результаты из [2], можно получить явный вид пространств $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Из результатов работы [100] следует, что

$$\mathcal{P}(\mathfrak{u}(m)) \simeq \odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m.$$

Дадим явное описание этого изоморфизма. Пусть

$$S \in \odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m \subset (\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}).$$

Рассмотрим отождествление

$$\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \oplus i\mathbb{R}^m$$

и выберем базис $e_1, \dots, e_m$ пространства $\mathbb{R}^m$. Определим комплексные числа S_{abc} , $a, b, c = 1, \dots, m$, так, что

$$S(e_a)e_b = \sum_c S_{acb}e_c.$$

Имеем $S_{abc} = S_{cba}$. Определим отображение $S_1: \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$ условиями

$$S_1(e_a)e_b = \sum_c \overline{S_{abc}}e_c, \quad S_1(ie_a) = -iS_1(e_a), \quad S_1(e_a)ie_b = iS_1(e_a)e_b.$$

Легко проверить, что

$$P = S - S_1: \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$$

принадлежит $\mathcal{P}(\mathfrak{u}(n))$ и каждый элемент пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{u}(n))$ имеет такой вид. Полученный элемент принадлежит пространству $\mathcal{P}(\mathfrak{su}(n))$ тогда и только тогда, когда $\sum_b S_{abb} = 0$ для всех $a = 1, \dots, m$, т.е. $S \in (\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$. Если $m = 2k$, т.е. $n = 4k$, то P принадлежит $\mathcal{P}(\mathfrak{sp}(k))$ тогда и только тогда, когда $S(e_a) \in \mathfrak{sp}(2k, \mathbb{C})$, $a = 1, \dots, m$, т.е.

$$S \in (\mathfrak{sp}(2k, \mathbb{C}))^{(1)} \simeq \odot^3(\mathbb{C}^{2k})^*.$$

В [72] показано, что для каждого $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{u}(m))$

$$g(\widetilde{\text{Ric}}(P), X) = -\text{tr}_{\mathbb{C}} P(JX), \quad X \in \mathbb{R}^{2m}.$$

В [2] показано, что произвольный $R \in \mathcal{R}_1(\mathfrak{so}(n)) \oplus \mathcal{R}'(\mathfrak{so}(n))$ имеет вид $R = R_S$, где $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – симметрическое линейное отображение и

$$R_S(X, Y) = SX \wedge Y + X \wedge SY. \quad (5.1)$$

Легко проверить, что

$$\tau(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_1(\mathfrak{so}(n)) \oplus \mathcal{R}'(\mathfrak{so}(n))) = \mathcal{P}(\mathfrak{so}(n)).$$

Это равенство и (5.1) показывают, что пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{so}(n))$ линейно порождается элементами P вида

$$P(y) = Sy \wedge x + y \wedge Sx,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $S \in \odot^2 \mathbb{R}^n$ фиксированы, а $y \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор. Для таких P имеем $\widetilde{\text{Ric}}(P) = (\text{tr } S - S)x$. Это означает, что пространство $\mathcal{P}_0(\mathfrak{so}(n))$ линейно порождается элементами P вида

$$P(y) = Sy \wedge x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $S \in \odot^2 \mathbb{R}^n$ удовлетворяют $\text{tr } S = 0$, $Sx = 0$, а $y \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор.

Изоморфизм $\mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n)) \simeq \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом: $x \in \mathbb{R}^n$ соответствует элементу $P = x \wedge \cdot \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n))$, т. е. $P(y) = x \wedge y$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Каждый $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{u}(m))$ имеет вид

$$P(y) = -\frac{1}{2}g(Jx, y)J + \frac{1}{4}(x \wedge y + Jx \wedge Jy),$$

где J – комплексная структура на $\mathbb{R}^{2m}$, вектор $x \in \mathbb{R}^{2m}$ – фиксированный, а вектор $y \in \mathbb{R}^{2m}$ – произвольный.

Каждый $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(1))$ имеет вид

$$P(y) = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 g(J_{\alpha}x, y)J_{\alpha} + \frac{1}{4} \left(x \wedge y + \sum_{\alpha=1}^3 J_{\alpha}x \wedge J_{\alpha}y \right),$$

где (J_1, J_2, J_3) – кватернионная структура на $\mathbb{R}^{4m}$, $x \in \mathbb{R}^{4m}$ – фиксированный, а $y \in \mathbb{R}^{4m}$ – произвольный вектор.

Мы покажем, что для присоединенного представления $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{h})$ простой компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$, отличной от $\mathfrak{so}(3)$, произвольный элемент $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ имеет вид

$$P(y) = [x, y].$$

Если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – симметрическая алгебра Берже, то

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) = \{R(\cdot, x) \mid x \in \mathbb{R}^n\},$$

где R – образующий элемент пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}$.

В общем случае пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – неприводимая подалгебра и $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$. Тогда $\widetilde{\text{Ric}}(P) \wedge \cdot \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n))$. Более того, легко проверить, что

$$\widetilde{\text{Ric}}\left(P + \frac{1}{n-1}\widetilde{\text{Ric}}(P) \wedge \cdot\right) = 0,$$

т. е.

$$P + \frac{1}{n-1}\widetilde{\text{Ric}}(P) \wedge \cdot \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{so}(n)).$$

Таким образом, включение

$$\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{P}(\mathfrak{so}(n)) = \mathcal{P}_0(\mathfrak{so}(n)) \oplus \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n))$$

имеет вид

$$P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \mapsto \left(P + \frac{1}{n-1}\widetilde{\text{Ric}}(P) \wedge \cdot, -\frac{1}{n-1}\widetilde{\text{Ric}}(P) \wedge \cdot\right) \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{so}(n)) \oplus \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n)).$$

Эта конструкция определяет тензор $W = P + (1/(n-1))\widetilde{\text{Ric}}(P) \wedge \cdot$, являющийся аналогом тензора Вейля для $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, и этот тензор представляет собой некоторую компоненту тензора Вейля лоренцева многообразия.

6. О классификации слабых алгебр Берже

Одним из ключевых моментов классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий является результат Лайстнера о классификации неприводимых слабых алгебр Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Лайстнер классифицировал все такие подалгебры, и оказалось, что полученный список совпадает со списком неприводимых алгебр голономии римановых многообразий. Возникает естественная проблема получить простое прямое доказательство этого факта. В [68] мы даем такое доказательство для случая полупростых, не являющихся простыми алгебр Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$.

В работе [55] первый вариант которой был опубликован в апреле 2003 г. на сайте www.arXiv.org, была доказана теорема Лайстнера 15 для $n \leq 9$. Для этого были перечислены неприводимые подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ для $n \leq 9$ (см. таблицу 2). Второй столбец таблицы содержит алгебры голономии неприводимых римановых многообразий. В третьем столбце содержатся алгебры, не являющиеся алгебрами голономии римановых многообразий.

Для полупростой компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ через $\pi_{\Lambda_1, \dots, \Lambda_l}^{\mathbb{K}}(\mathfrak{h})$ обозначаем образ представления $\pi_{\Lambda_1, \dots, \Lambda_l}^{\mathbb{K}}: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{so}(n)$, которое однозначно определяется комплексным представлением $\rho_{\Lambda_1, \dots, \Lambda_l}: \mathfrak{h}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(U)$, задаваемым числовыми отметками $\Lambda_1, \dots, \Lambda_l$ на схеме Дынкина (здесь $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ – комплексификация алгебры $\mathfrak{h}$, U – некоторое комплексное линейное пространство), $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$ или $\mathbb{C}$, если $\rho_{\Lambda_1, \dots, \Lambda_l}$ является соответственно вещественным, кватернионным или комплексным. Символ $\mathfrak{t}$ обозначает одномерный центр.

Для алгебр, не являющихся алгебрами голономии римановых многообразий, с помощью компьютерной программы были найдены пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ как решения соответствующих систем линейных уравнений. Оказалось, что

$$\mathcal{P}(\pi_{1,0}^{\mathbb{H}}(\mathfrak{sp}(2))) = \mathcal{P}(\pi_{1,0}^{\mathbb{H}}(\mathfrak{sp}(2)) \oplus \mathfrak{t}),$$

Таблица 2. Неприводимые подалгебры в $\mathfrak{so}(n)$ ($n \leq 9$)

n	неприводимые алгебры голономии n -мерных римановых многообразий	другие неприводимые подалгебры в $\mathfrak{so}(n)$
$n = 1$		
$n = 2$	$\mathfrak{so}(2)$	
$n = 3$	$\pi_2^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(3))$	
$n = 4$	$\pi_{1,1}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)), \pi_1^{\mathbb{C}}(\mathfrak{su}(2)), \pi_1^{\mathbb{C}}(\mathfrak{su}(2)) \oplus \mathfrak{t}$	
$n = 5$	$\pi_{1,0}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(5)), \pi_4^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(3))$	
$n = 6$	$\pi_{1,0,0}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(6)), \pi_{1,0}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{su}(3)), \pi_{1,0}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{su}(3)) \oplus \mathfrak{t}$	
$n = 7$	$\pi_{1,0,0}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(7)), \pi_{1,0}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_2)$	$\pi_6^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(3))$
$n = 8$	$\pi_{1,0,0,0}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(8)), \pi_{1,0}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{su}(4)), \pi_{1,0}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{su}(4)) \oplus \mathfrak{t},$ $\pi_{1,0}^{\mathbb{H}}(\mathfrak{sp}(2)), \pi_{1,0,1}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(1)), \pi_{0,0,1}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(7)),$ $\pi_{1,3}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)), \pi_{1,1}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{su}(3))$	$\pi_3^{\mathbb{C}}(\mathfrak{so}(3)),$ $\pi_3^{\mathbb{C}}(\mathfrak{so}(3)) \oplus \mathfrak{t},$ $\pi_{1,0}^{\mathbb{H}}(\mathfrak{sp}(2)) \oplus \mathfrak{t}$
$n = 9$	$\pi_{1,0,0,0}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(9)), \pi_{2,2}^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3))$	$\pi_8^{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(3))$

т.е. $L(\mathcal{P}(\pi_{1,0}^{\mathbb{H}}(\mathfrak{sp}(2)) \oplus \mathfrak{t})) = \pi_{1,0}^{\mathbb{H}}(\mathfrak{sp}(2))$ и $\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{t}$ не является слабой алгеброй Берже. Для остальных алгебр третьего столбца таблицы имеем $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = 0$. Значит, алгебры Ли из третьего столбца таблицы 2 не являются слабыми алгебрами Берже.

Оказалось, что к этому времени Лайстнер уже доказал теорему 15 и опубликовал это доказательство в виде препринта в случае, если n чётно и представление $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – комплексного типа, т.е. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}(n/2)$. В этом случае $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) \simeq (\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})^{(1)}$, где $(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})^{(1)}$ – первое продолжение подалгебры $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{gl}(n/2, \mathbb{C})$. Используя этот факт и классификацию неприводимых представлений с нетривиальными продолжениями, Лайстнер доказал, что каждая слабая алгебра Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}(n/2)$ является алгеброй голономии некоторого риманова многообразия.

Случай подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ вещественного типа (т.е. некомплексного типа) является куда более сложным. В этом случае Лайстнер рассмотрел комплексифицированное представление $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, являющееся неприводимым. Используя классификацию неприводимых представлений комплексных полупростых алгебр Ли, он нашел критерий в терминах весов этих представлений того, что представление $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ является слабой алгеброй Берже. Далее Лайстнер рассмотрел, случай за случаем, простые алгебры Ли $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$, а затем и полупростые алгебры (проблема сводится к случаю полупростых алгебр Ли вида $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}$, где $\mathfrak{k}$ – простая, и снова для $\mathfrak{k}$ были рассмотрены различные возможности). Полное доказательство опубликовано в [100].

Мы рассматриваем случай полупростых, не являющихся простыми, неприводимых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ с неприводимой комплексификацией $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$. Простым способом мы показываем, что достаточно рассматривать случай $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}$, где $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ – простая неприводимая подалгебра, а пространством представления является тензорное произведение $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2m}$.

В этом случае пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ совпадает с $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{g}_1$, где $\mathfrak{g}_1$ – первое продолжение Танака неположительно градуированной алгебры Ли

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0,$$

здесь $\mathfrak{g}_{-2} = \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}^{2m}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \text{Cid}_{\mathbb{C}^{2m}}$, а градуировка определяется элементом $-\text{id}_{\mathbb{C}^{2m}}$. Мы показываем, что если $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ нетривиально, то $\mathfrak{g}_1$ изоморфно $\mathbb{C}^{2m}$, второе продолжение Танака $\mathfrak{g}_2$ изоморфно $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{g}_3 = 0$. Тогда полное продолжение Танака определяет простую $|2|$ -градуированную комплексную алгебру Ли

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

Хорошо известно, что имеет место взаимно однозначное соответствие между односвязными неразложимыми симметрическими римановыми многообразиями (M, g) и простыми $\mathbb{Z}_2$ -градуированными алгебрами Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}^n$ такими, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Если симметрическое пространство является кватернионнокэлеровым, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{f} \subset \mathfrak{so}(4k)$, где $n = 4k$ и $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{sp}(k)$. Комплексификация алгебры $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}^{4k}$ совпадает с $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2k})$, где $\mathfrak{k} = \mathfrak{f} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{sp}(2k, \mathbb{C})$. Пусть e_1, e_2 – стандартный базис пространства $\mathbb{C}^2$, и пусть

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Мы получаем следующую $\mathbb{Z}$ -градуировку алгебры Ли $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} &= \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \\ &= \mathbb{C}F \oplus e_2 \otimes \mathbb{C}^{2k} \oplus (\mathfrak{k} \oplus \mathbb{C}H) \oplus e_1 \otimes \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}E. \end{aligned}$$

Обратно, каждая такая простая $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли определяет, с точностью до двойственности, односвязное кватернионно-кэлерово симметрическое пространство. В этом и заключается доказательство.

7. Конструкции метрик и классификационная теорема

Выше мы получили классификацию слабо неприводимых алгебр Берже, содержащихся в $\mathfrak{sim}(n)$. В настоящем разделе мы покажем, что все эти алгебры могут быть реализованы как алгебры голономии лоренцевых многообразий, мы значительно упростим конструкции метрик из [56]. Этим мы завершим классификацию алгебр голономии лоренцевых многообразий.

Метрики, реализующие алгебры Берже типов 1 и 2, построили Берард-Бержери и Икемакхен в [21]. Эти метрики имеют вид

$$g = 2 \, dv \, du + h + (\lambda v^2 + H_0) (du)^2,$$

где h – риманова метрика на $\mathbb{R}^n$ с алгеброй голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а H_0 – достаточно общая функция переменных $x^1, \dots, x^n$. Если $\lambda \neq 0$, то алгебра голономии этой метрики совпадает с $\mathfrak{g}^{1, \mathfrak{h}}$; если $\lambda = 0$, то алгебра голономии метрики g совпадает с $\mathfrak{g}^{2, \mathfrak{h}}$.

В [56] мы приводим единую конструкцию метрик со всеми возможными алгебрами голономии. Здесь мы упростим эту конструкцию.

ЛЕММА 1. Для произвольной алгебры голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ риманова многообразия найдется $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ такой, что векторное подпространство $P(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{h}$ порождает алгебру Ли $\mathfrak{h}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ неприводима. Если $\mathfrak{h}$ – одна из алгебр голономии $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}(m)$, $\mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(1)$, то в качестве P можно взять один из тензоров, описанных в разделе 5 при произвольном ненулевом фиксированном $X \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что $P(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{h}$ порождает алгебру Ли $\mathfrak{h}$. Аналогично, если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – симметрическая алгебра Берже, то можно рассмотреть ненулевой $X \in \mathbb{R}^n$ и положить $P = R(X, \cdot)$, где R – тензор кривизны соответствующего симметрического пространства. Для $\mathfrak{su}(m)$ воспользуемся изоморфизмом $\mathcal{P}(\mathfrak{su}(m)) \simeq (\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$ из раздела 5 и возьмем P , определяемый элементом $S \in (\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$, который не принадлежит пространству $(\odot^2(\mathbb{C}^{m_0})^* \otimes \mathbb{C}^{m_0})_0$ ни для какого $m_0 < m$. Поступим аналогично для $\mathfrak{sp}(m)$.

Подалгебра $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$ порождается следующими матрицами [15]:

$$\begin{aligned} A_1 &= E_{12} - E_{34}, & A_2 &= E_{12} - E_{56}, & A_3 &= E_{13} + E_{24}, & A_4 &= E_{13} - E_{67}, \\ A_5 &= E_{14} - E_{23}, & A_6 &= E_{14} - E_{57}, & A_7 &= E_{15} + E_{26}, & A_8 &= E_{15} + E_{47}, \\ A_9 &= E_{16} - E_{25}, & A_{10} &= E_{16} + E_{37}, & A_{11} &= E_{17} - E_{36}, & A_{12} &= E_{17} - E_{45}, \\ A_{13} &= E_{27} - E_{35}, & A_{14} &= E_{27} + E_{46}, \end{aligned}$$

где $E_{ij} \in \mathfrak{so}(7)$ ($i < j$) – кососимметрическая матрица такая, что $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$.

Рассмотрим линейное отображение $P \in \text{Hom}(\mathbb{R}^7, G_2)$, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} P(e_1) &= A_6, & P(e_2) &= A_4 + A_5, & P(e_3) &= A_1 + A_7, & P(e_4) &= A_1, \\ P(e_5) &= A_4, & P(e_6) &= -A_5 + A_6, & P(e_7) &= A_7. \end{aligned}$$

Используя компьютер, легко проверить, что $P \in \mathcal{P}(G_2)$, а элементы $A_1, A_4, A_5, A_6, A_7 \in G_2$ порождают алгебру Ли G_2 .

Подалгебра $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$ порождается следующими матрицами [15]:

$$\begin{aligned} A_1 &= E_{12} + E_{34}, & A_2 &= E_{13} - E_{24}, & A_3 &= E_{14} + E_{23}, & A_4 &= E_{56} + E_{78}, \\ A_5 &= -E_{57} + E_{68}, & A_6 &= E_{58} + E_{67}, & A_7 &= -E_{15} + E_{26}, & A_8 &= E_{12} + E_{56}, \\ A_9 &= E_{16} + E_{25}, & A_{10} &= E_{37} - E_{48}, & A_{11} &= E_{38} + E_{47}, & A_{12} &= E_{17} + E_{28}, \\ A_{13} &= E_{18} - E_{27}, & A_{14} &= E_{35} + E_{46}, & A_{15} &= E_{36} - E_{45}, & A_{16} &= E_{18} + E_{36}, \\ A_{17} &= E_{17} + E_{35}, & A_{18} &= E_{26} - E_{48}, & A_{19} &= E_{25} + E_{38}, & A_{20} &= E_{23} + E_{67}, \\ A_{21} &= E_{24} + E_{57}. \end{aligned}$$

Линейное отображение $P \in \text{Hom}(\mathbb{R}^8, \mathfrak{spin}(7))$, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} P(e_1) &= 0, & P(e_2) &= -A_{14}, & P(e_3) &= 0, & P(e_4) &= A_{21}, \\ P(e_5) &= A_{20}, & P(e_6) &= A_{21} - A_{18}, & P(e_7) &= A_{15} - A_{16}, & P(e_8) &= A_{14} - A_{17}, \end{aligned}$$

принадлежит пространству $\mathcal{P}(\mathfrak{spin}(7))$, а элементы $A_{14}, A_{15} - A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{20}, A_{21} \in \mathfrak{spin}(7)$ порождают алгебру Ли $\mathfrak{spin}(7)$.

В случае произвольной алгебры голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ утверждение леммы следует из теоремы 14.

Рассмотрим произвольную алгебру голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ риманова многообразия. Будем исходить из того, что $\mathfrak{h}$ является слабой алгеброй Берже, т.е. $L(\mathcal{P}(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$. Первоначальная конструкция требует фиксации достаточного числа элементов $P_1, \dots, P_N \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, чьи образы порождают $\mathfrak{h}$. Только что доказанная лемма позволяет ограничиться одним $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Напомним, что для $\mathfrak{h}$ имеют место разложения (4.4) и (4.5). Будем предполагать, что базис $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ согласован с разложением (4.4). Пусть $m_0 = n_1 + \dots + n_s = n - n_{s+1}$. Тогда $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(m_0)$ и $\mathfrak{h}$ не переводит в нуль никакие нетривиальные подпространства в $\mathbb{R}^{m_0}$. Заметим, что в случае алгебры Ли $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$ имеем $0 < m_0 \leq m$. Определим числа P_{ji}^k такие, что $P(e_i)e_j = P_{ji}^k e_k$. Рассмотрим на $\mathbb{R}^{n+2}$ следующую метрику:

$$g = 2 dv du + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + 2A_i dx^i du + H \cdot (du)^2, \quad (7.1)$$

где

$$A_i = \frac{1}{3}(P_{jk}^i + P_{kj}^i)x^j x^k, \quad (7.2)$$

а H – функция, которая будет зависеть от типа алгебры голономии, которую мы хотим получить.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$ определим числа $\varphi_i = \varphi(P(e_i))$.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$ определим числа ψ_{ij} , $j = m+1, \dots, n$, такие, что

$$\psi(P(e_i)) = - \sum_{j=m+1}^n \psi_{ij} e_j. \quad (7.3)$$

ТЕОРЕМА 18. *Алгебра голономии $\mathfrak{g}$ метрики g в точке 0 зависит от функции H следующим образом:*

H	$\mathfrak{g}$
$v^2 + \sum_{i=m_0+1}^n (x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}$
$\sum_{i=m_0+1}^n (x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}$
$2v\varphi_i x^i + \sum_{i=m_0+1}^n (x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$
$2 \sum_{j=m+1}^n \psi_{ij} x^i x^j + \sum_{i=m_0+1}^m (x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$

Из теорем 16 и 18 получаем основную классификационную теорему.

ТЕОРЕМА 19. *Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ является слабо неприводимой, не являющейся неприводимой алгеброй голономии лоренцева многообразия тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из подалгебр $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$, $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} \subset \mathfrak{sim}(n)$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – алгебра голономии риманова многообразия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 18. Рассмотрим поле реперов (4.15). Пусть $X_p = p$ и $X_q = q$. Индексы $a, b, c, \dots$ будут пробегать все индексы базисных векторных полей. Компоненты связности Γ_{ba}^c определяются формулой $\nabla_{X_a} X_b = \Gamma_{ba}^c X_c$. Построенные метрики – аналитические. Из доказательства теоремы 9.2 из [94] следует, что $\mathfrak{g}$ порождается элементами вида

$$\nabla_{X_{a_\alpha}} \cdots \nabla_{X_{a_1}} R(X_a, X_b)(0) \in \mathfrak{so}(T_0 M, g_0) = \mathfrak{so}(1, n+1), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots,$$

где ∇ – связность Леви-Чивиты, определяемая метрикой g , а R – тензор кривизны. Компоненты тензора кривизны определяются равенством

$$R(X_a, X_b)X_c = \sum_d R_{cab}^d X_d.$$

Заметим, что имеет место рекуррентная формула

$$\begin{aligned} \nabla_{a_\alpha} \cdots \nabla_{a_1} R_{cab}^d &= X_{a_\alpha} \nabla_{a_{\alpha-1}} \cdots \nabla_{a_1} R_{cab}^d \\ &\quad + [\Gamma_{a_\alpha}, \nabla_{X_{a_{\alpha-1}}} \cdots \nabla_{X_{a_1}} R(X_a, X_b)]_c^d, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где Γ_{a_α} обозначает оператор с матрицей $(\Gamma_{ba_\alpha}^a)$. Так как мы рассматриваем метрику Волкера, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Учитывая сказанное, нетрудно найти алгебру голономии $\mathfrak{g}$. Проведем вычисления для алгебры четвертого типа. Для других типов алгебр доказательство аналогично. Пусть $H = 2 \sum_{j=m+1}^n \psi_{ij} x^i x^j + \sum_{i=m_0+1}^m (x^i)^2$. Мы должны доказать равенство $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{4, \mathfrak{h}, m, \psi}$. Ясно, что $\nabla \partial_v = 0$, поэтому $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Возможно ненулевые скобки Ли базисных векторных полей имеют вид

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= -F_{ij} p = 2P_{ik}^j x^k p, \quad [X_i, q] = C_{iq}^p p, \\ C_{iq}^p &= -\frac{1}{2} \partial_i H = \begin{cases} -\sum_{j=m+1}^n \psi_{ij} x^j, & 1 \leq i \leq m_0, \\ -x^i, & m_0 + 1 \leq i \leq m, \\ -\psi_{ki} x^k, & m + 1 \leq i \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Используя это, можно легко найти матрицы операторов Γ_a , а именно, $\Gamma_p = 0$,

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \begin{pmatrix} 0 & Y_k^t & 0 \\ 0 & 0 & -Y_k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_k^t = (P_{1i}^k x^i, \dots, P_{m_0 i}^k x^i, 0, \dots, 0), \\ \Gamma_q &= \begin{pmatrix} 0 & Z^t & 0 \\ 0 & (P_{jk}^i x^k) & -Z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z^t = -(C_{1q}^p, \dots, C_{nq}^p). \end{aligned}$$

Достаточно вычислить следующие компоненты тензора кривизны:

$$\begin{aligned} R_{j i q}^k &= P_{ji}^k, \quad R_{j i l}^k = 0, \quad R_{q i j}^k = -P_{ji}^k, \\ R_{q j q}^j &= -1, \quad m_0 + 1 \leq j \leq m, \quad R_{q j q}^l = -\psi_{jl}, \quad m + 1 \leq l \leq n. \end{aligned}$$

Это влечет

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)}(R(X_i, q)(0)) &= P(e_i), \quad \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}(R(X_i, q)(0)) = \psi(P(e_i)), \\ \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}(R(X_j, q)(0)) &= -e_j, \quad m_0 + 1 \leq j \leq m, \\ \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}(R(X_i, X_j)(0)) &= P(e_j)e_i - P(e_i)e_j.\end{aligned}$$

Получаем включение $\mathfrak{g}^{4, \mathfrak{h}, m, \psi} \subset \mathfrak{g}$. Формула (7.4) и индукция позволяют установить обратное включение. Теорема доказана.

Рассмотрим два *примера*. Из доказательства леммы 1 следует, что алгебра голономии метрики

$$g = 2 \, dv \, du + \sum_{i=1}^7 (dx^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^7 A_i \, dx^i \, du,$$

где

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{2}{3}(2x^2x^3 + x^1x^4 + 2x^2x^4 + 2x^3x^5 + x^5x^7), \\ A_2 &= \frac{2}{3}(-x^1x^3 - x^2x^3 - x^1x^4 + 2x^3x^6 + x^6x^7), \\ A_3 &= \frac{2}{3}(-x^1x^2 + (x^2)^2 - x^3x^4 - (x^4)^2 - x^1x^5 - x^2x^6), \\ A_4 &= \frac{2}{3}(-(x^1)^2 - x^1x^2 + (x^3)^2 + x^3x^4), \\ A_5 &= \frac{2}{3}(-x^1x^3 - 2x^1x^7 - x^6x^7), \\ A_6 &= \frac{2}{3}(-x^2x^3 - 2x^2x^7 - x^5x^7), \\ A_7 &= \frac{2}{3}(x^1x^5 + x^2x^6 + 2x^5x^6),\end{aligned}$$

в точке $0 \in \mathbb{R}^9$ совпадает с $\mathfrak{g}^{2, G_2} \subset \mathfrak{so}(1, 8)$. Аналогично, алгебра голономии метрики

$$g = 2 \, dv \, du + \sum_{i=1}^8 (dx^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^8 A_i \, dx^i \, du,$$

где

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{4}{3}x^7x^8, & A_2 &= \frac{2}{3}((x^4)^2 + x^3x^5 + x^4x^6 - (x^6)^2), \\ A_3 &= -\frac{4}{3}x^2x^5, & A_4 &= \frac{2}{3}(-x^2x^4 - 2x^2x^6 - x^5x^7 + 2x^6x^8), \\ A_5 &= \frac{2}{3}(x^2x^3 + 2x^4x^7 + x^6x^7), & A_6 &= \frac{2}{3}(x^2x^4 + x^2x^6 + x^5x^7 - x^4x^8), \\ A_7 &= \frac{2}{3}(-x^4x^5 - 2x^5x^6 + x^1x^8), & A_8 &= \frac{2}{3}(-x^4x^6 + x^1x^7),\end{aligned}$$

в точке $0 \in \mathbb{R}^{10}$ совпадает с $\mathfrak{g}^{2, \mathrm{spin}(7)} \subset \mathfrak{so}(1, 9)$.

8. Уравнение Эйнштейна

В этом разделе мы рассмотрим связь алгебр голономии и уравнения Эйнштейна. Мы найдем алгебры голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна. Далее, мы покажем, что в случае ненулевой космологической константы на многообразии Волкера существуют специальные координаты, позволяющие существенно упростить уравнение Эйнштейна. Будут даны примеры метрик Эйнштейна. Эта тема мотивирована работой физиков Гиббонса и Попа [76]. Приводимые результаты опубликованы в [60], [61], [62], [74].

8.1. Алгебры голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна.

Рассмотрим лоренцево многообразие (M, g) с алгеброй голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Прежде всего, в [72] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20. Пусть (M, g) – локально неразложимое лоренцево многообразие Эйнштейна, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Тогда алгебра голономии многообразия (M, g) имеет тип 1 или 2. Если космологическая константа многообразия (M, g) не равна нулю, то алгебра голономии многообразия (M, g) имеет тип 1. Если (M, g) допускает локальные параллельные изотропные векторные поля, то (M, g) – Риччи-плоское многообразие.

Классификацию завершают следующие две теоремы из [60].

ТЕОРЕМА 21. Пусть (M, g) – локально неразложимое $(n + 2)$ -мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если (M, g) – Риччи-плоское многообразие, то имеет место одно из следующих утверждений.

(I) Алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M, g) имеет тип 1, и в разложении (4.5) для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ по крайней мере одна подалгебра $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из следующих алгебр Ли: $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{u}(n_i/2)$, $\mathfrak{sp}(n_i/4) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ или с симметрической алгеброй Берже.

(II) Алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M, g) имеет тип 2, и в разложении (4.5) для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждая подалгебра $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из следующих алгебр Ли: $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{su}(n_i/2)$, $\mathfrak{sp}(n_i/4)$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$.

ТЕОРЕМА 22. Пусть (M, g) – локально неразложимое $(n + 2)$ -мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если (M, g) – многообразие Эйнштейна, не являющееся Риччи-плоским, то алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M, g) имеет тип 1 и в разложении (4.5) для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждая подалгебра $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из следующих алгебр Ли: $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{u}(n_i/2)$, $\mathfrak{sp}(n_i/4) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ или с симметрической алгеброй Берже. Более того, $n_{s+1} = 0$.

8.2. Примеры метрик Эйнштейна. В этом пункте мы докажем существование метрик с каждой из алгебр голономии, полученных в предыдущем пункте.

Из (4.7) и (4.8) следует, что уравнение Эйнштейна

$$\text{Ric} = \Lambda g$$

для метрики (4.11) можно переписать в обозначениях п. 4.2 следующим образом:

$$\lambda = \Lambda, \quad \text{Ric}(h) = \Lambda h, \quad \vec{v} = \widetilde{\text{Ric}}(P), \quad \text{tr } T = 0. \quad (8.1)$$

Прежде всего, рассмотрим метрику (4.11) такую, что h – риманова метрика Эйнштейна с алгеброй голономии $\mathfrak{h}$ и ненулевой космологической константой Λ , а $A = 0$. Пусть

$$H = \Lambda v^2 + H_0,$$

где H_0 – функция координат $x^1, \dots, x^n$. Тогда первые три уравнения из (8.1) выполнены. Из (4.18) следует, что последнее уравнение имеет вид

$$\Delta H_0 = 0,$$

где

$$\Delta = h^{ij}(\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k \partial_k) \quad (8.2)$$

– оператор Лапласа–Бельтрами метрики h . Выбирая достаточно общую гармоническую функцию H_0 , мы получим, что метрика g эйнштейнова и неразложима. Из теоремы 22 следует, что $\mathfrak{g} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Взяв в той же конструкции $\Lambda = 0$, получим Риччи-плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$.

Построим Риччи-плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{g} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n$, где $\mathfrak{h}$ – как в части (I) теоремы 21. Для этого воспользуемся конструкцией раздела 7. Рассмотрим $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ с $\widetilde{\text{Ric}}(P) \neq 0$. Напомним, что $h_{ij} = \delta_{ij}$. Пусть

$$H = v H_1 + H_0,$$

где H_1 и H_0 – функции координат $x^1, \dots, x^n$. Третье уравнение из (8.1) принимает вид

$$\partial_k H_1 = 2 \sum_i P_{ii}^k,$$

поэтому достаточно взять

$$H_1 = 2 \sum_{i,k} P_{ii}^k x^k.$$

Последнее уравнение имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 H_0 - \frac{1}{4} \sum_{i,j} F_{ij}^2 - \frac{1}{2} H_1 \sum_i \partial_i A_i - 2 A_i \sum_k P_{kk}^i = 0.$$

Заметим, что

$$F_{ij} = 2 P_{ik}^j x^k, \quad \sum_i \partial_i A_i = -2 \sum_{i,k} P_{ii}^k x^k.$$

Получаем уравнение вида $\sum_i \partial_i^2 H_0 = K$, где K – многочлен степени два. Частное решение этого уравнения можно найти в виде

$$H_0 = \frac{1}{2}(x^1)^2 K_2 + \frac{1}{6}(x^1)^3 \partial_1 K_1 + \frac{1}{24}(x^i)^4 (\partial_i)^2 K,$$

где

$$K_1 = K - \frac{1}{2}(x^i)^2 (\partial_i)^2 K, \quad K_2 = K_1 - x^1 \partial_1 K_1.$$

Чтобы сделать метрику g неразложимой, добавим к полученной функции H_0 гармоническую функцию

$$(x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 - (n-1)(x^n)^2.$$

Так как $\partial_v \partial_i H \neq 0$, то алгебра голономии метрики g имеет тип 1 или 3. Из теоремы 21 следует, что $\mathfrak{g} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Аналогично можно построить пример Риччи-плоской метрики с алгеброй голономии $\mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$, где $\mathfrak{h}$ – как в части (II) теоремы 21. Для этого достаточно рассмотреть $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ с $\widetilde{\text{Ric}}(P) = 0$, взять $H_1 = 0$ и получить нужную H_0 .

Мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 23. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра из теоремы 21 или 22, тогда существует $(n+2)$ -мерное лоренцево многообразие Эйнштейна (или Риччи-плоское) с алгеброй голономии $\mathfrak{g}$.

ПРИМЕР 1. В разделе 7 мы построили метрики с алгебрами голономии

$$\mathfrak{g}^{2,G_2} \subset \mathfrak{so}(1,8) \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}^{2,\text{spin}(7)} \subset \mathfrak{so}(1,9).$$

Выбирая только что описанным способом функции H , получим Риччи-плоские метрики с теми же алгебрами голономии.

8.3. Лоренцевы многообразия с totally изотропным оператором Риччи. В предыдущем пункте мы видели, что, в отличие от случая римановых многообразий, лоренцевы многообразия ни с какими из алгебр голономии не являются автоматически Риччи-плоскими или многообразиями Эйнштейна. Сейчас мы увидим, что все-таки лоренцевы многообразия с некоторыми алгебрами голономии автоматически удовлетворяют некоторому более слабому условию на тензор Риччи.

Лоренцево многообразие (M, g) называется *totally Риччи-изотропным*, если образ оператора Риччи этого многообразия изотропный, т. е.

$$g(\text{Ric}(x), \text{Ric}(y)) = 0$$

для всех векторных полей X и Y . Очевидно, что каждое Риччи-плоское многообразие является totally Риччи-изотропным. Если (M, g) – спинорное многообразие, допускающее параллельное спинорное поле, то это многообразие является totally Риччи-изотропным [40], [52].

ТЕОРЕМА 24. Пусть (M, g) – локально неразложимое $(n+2)$ -мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если (M, g) – тотально Риччи-изотропное, то его алгебра голономии – та же, что в теореме 21.

ТЕОРЕМА 25. Пусть (M, g) – локально неразложимое $(n+2)$ -мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если алгебра голономии многообразия (M, g) имеет тип 2 и в разложении (4.5) алгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждая подалгебра $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из алгебр Ли $\mathfrak{su}(n_i/2)$, $\mathfrak{sp}(n_i/4)$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$, то многообразие (M, g) – тотально Риччи-изотропное.

Заметим, что эту теорему можно доказать также следующим образом. Локально (M, g) допускает спинорную структуру. Из [72], [100] следует, что (M, g) допускает локальные параллельные спинорные поля, следовательно, многообразие (M, g) – тотально Риччи-изотропное.

8.4. Упрощение уравнения Эйнштейна. Уравнение Эйнштейна для метрики (4.11) рассмотрели Гиббонс и Поп в [76]. Прежде всего, оно влечет, что

$$H = \Lambda v^2 + vH_1 + H_0, \quad \partial_v H_1 = \partial_v H_0 = 0.$$

Далее, оно равносильно системе уравнений

$$\begin{aligned} \Delta H_0 - \frac{1}{2} F^{ij} F_{ij} - 2A^i \partial_i H_1 - H_1 \nabla^i A_i + 2\Lambda A^i A_i - 2\nabla^i \dot{A}_i \\ + \frac{1}{2} \dot{h}^{ij} \dot{h}_{ij} + h^{ij} \ddot{h}_{ij} + \frac{1}{2} h^{ij} \dot{h}_{ij} H_1 = 0, \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\nabla^j F_{ij} + \partial_i H_1 - 2\Lambda A_i + \nabla^j \dot{h}_{ij} - \partial_i (h^{jk} \dot{h}_{jk}) = 0, \quad (8.4)$$

$$\Delta H_1 - 2\Lambda \nabla^i A_i - \Lambda h^{ij} \dot{h}_{ij} = 0, \quad (8.5)$$

$$\text{Ric}_{ij} = \Lambda h_{ij}, \quad (8.6)$$

где оператор Δ дан формулой (8.2). Эти уравнения можно получить, рассмотрев уравнения (8.1) и применив формулы п. 4.2.

Координаты Волкера не определены однозначно. Например, Шимминг [110] доказал, что если $\partial_v H = 0$, то координаты можно выбрать так, что $A = 0$ и $H = 0$. Главная теорема этого пункта дает возможность найти аналогичные координаты и тем самым существенно упростить уравнение Эйнштейна для случая $\Lambda \neq 0$.

ТЕОРЕМА 26. Пусть (M, g) – локально неразложимое $(n+2)$ -мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если (M, g) – многообразие Эйнштейна с ненулевой космологической константой Λ , то в окрестности каждой точки существуют координаты $v, x^1, \dots, x^n$, и такие, что метрика g имеет вид

$$g = 2 dv du + h + (\Lambda v^2 + H_0) (du)^2,$$

где $\partial_v H_0 = 0$ и h – u -семейство римановых метрик Эйнштейна с космологической константой Λ , удовлетворяющее уравнениям

$$\Delta H_0 + \frac{1}{2} h^{ij} \ddot{h}_{ij} = 0, \quad (8.7)$$

$$\nabla^j \dot{h}_{ij} = 0, \quad (8.8)$$

$$h^{ij} \dot{h}_{ij} = 0, \quad (8.9)$$

$$\text{Ric}_{ij} = \Lambda h_{ij}. \quad (8.10)$$

Обратно, каждая такая метрика является метрикой Эйнштейна.

Таким образом, мы свели уравнение Эйнштейна для лоренцевых метрик с $\Lambda \neq 0$ к проблеме нахождения семейств римановых метрик Эйнштейна, удовлетворяющих уравнениям (8.8), (8.9), и функции H_0 , удовлетворяющей уравнению (8.7).

8.5. Случай размерности 4. Рассмотрим случай многообразий размерности 4, т. е. $n = 2$. Будем писать $x = x^1$, $y = x^2$.

Риччи-плоские метрики Волкера в размерности 4 найдены в [92]. Для них мы имеем $h = (dx)^2 + (dy)^2$, $A_2 = 0$, $H = -(\partial_x A_1)v + H_0$, где A_1 – гармоническая функция, а функция H_0 – решение некоторого уравнения Пуассона.

В [102] описаны все 4-мерные метрики Волкера–Эйнштейна с $\Lambda \neq 0$. Координаты можно выбрать так, что h – метрика постоянной секционной кривизны, не зависящая от u . Далее, $A = W dz + \bar{W} d\bar{z}$, $W = i\partial_z L$, где $z = x + iy$, а L есть $\mathbb{R}$ -значная функция, заданная формулой

$$L = 2 \operatorname{Re} \left(\phi \partial_z (\ln P_0) - \frac{1}{2} \partial_z \phi \right), \quad 2P_0^2 = \left(1 + \frac{\Lambda}{|\Lambda|} z \bar{z} \right)^2, \quad (8.11)$$

где $\phi = \phi(z, u)$ – произвольная функция, голоморфная относительно переменной z и гладко зависящая от u . Окончательно, $H = \Lambda^2 v + H_0$, а функцию $H_0 = H_0(z, \bar{z}, u)$ можно найти схожим образом.

В этом пункте мы приведем примеры эйнштейновых метрик Волкера с $\Lambda \neq 0$, $A = 0$ и h , зависящим от u . Решение из [102] не подходит для построения примеров такого вида, поскольку “простые” функции $\phi(z, u)$ определяют “сложные” формы A . Аналогичные примеры можно построить в случае размерности 5, этот случай обсуждается в [76], [78].

Заметим, что каждая риманова метрика Эйнштейна в размерности 2 (и 3) имеет постоянную секционную кривизну, поэтому такие метрики с одинаковой константой Λ локально изометричны, а координаты можно выбрать так, что $\partial_u h = 0$. Так же, как в [102], показывается, что если $\Lambda > 0$, то можно считать, что $h = ((dx)^2 + \sin^2 x (dy)^2)/\Lambda$, $H = \Lambda v^2 + H_0$, и уравнение Эйнштейна сводится к системе

$$\begin{aligned} \Delta_{S^2} f &= -2f, & \Delta_{S^2} H_0 &= 2\Lambda \left(2f^2 - (\partial_x f)^2 + \frac{(\partial_y f)^2}{\sin^2 x} \right), \\ \Delta_{S^2} &= \partial_x^2 + \frac{\partial_y^2}{\sin^2 x} + \cot x \partial_x. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Функция f определяет 1-форму A :

$$A = -\frac{\partial_y f}{\sin x} dx + \sin x \partial_x f dy.$$

Аналогично, если $\Lambda < 0$, то рассмотрим

$$h = \frac{1}{-\Lambda \cdot x^2} ((dx)^2 + (dy)^2)$$

и получим

$$\begin{aligned} \Delta_{L^2} f &= 2f, & \Delta_{L^2} H_0 &= -4\Lambda f^2 - 2\Lambda x^2 ((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2), \\ \Delta_{L^2} &= x^2 (\partial_x^2 + \partial_y^2) \end{aligned} \quad (8.13)$$

и $A = -\partial_y f dx + \partial_x f dy$. Таким образом, чтобы найти частное решение системы уравнений (8.7)–(8.10), удобно сначала найти функцию f , а потом, изменяя координаты, избавиться от 1-формы A . После такой замены координат метрика h не зависит от u тогда и только тогда, когда A – киллингова форма для h [76]. Если $\Lambda > 0$, то это равносильно тому, что

$$f = c_1(u) \sin x \sin y + c_2(u) \sin x \cos y + c_3(u) \cos x;$$

для $\Lambda < 0$ это равносильно равенству

$$f = c_1(u) \frac{1}{x} + c_2(u) \frac{y}{x} + c_3(u) \frac{x^2 + y^2}{x}.$$

Функции $\phi(z, u) = c(u)$, $c(u)z$, $c(u)z^2$ из (8.11) определяют киллингову форму A [74]. Для других функций ϕ форма A имеет сложную структуру. Пусть g – метрика Эйнштейна вида (4.11) с $\Lambda \neq 0$, $A = 0$ и $H = \Lambda v^2 + H_0$. Тензор кривизны R метрики g имеет вид

$$R(p, q) = \Lambda p \wedge q, \quad R(X, Y) = \Lambda X \wedge Y, \quad R(X, q) = -p \wedge T(X), \quad R(p, X) = 0.$$

Метрика g неразложима тогда и только тогда, когда $T \neq 0$. В этом случае алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{sim}(2)$.

Для тензора Вейля имеем

$$\begin{aligned} W(p, q) &= \frac{\Lambda}{3} p \wedge q, & W(p, X) &= -\frac{2\Lambda}{3} p \wedge X, \\ W(X, Y) &= \frac{\Lambda}{3} X \wedge Y, & W(X, q) &= -\frac{2\Lambda}{3} X \wedge q - p \wedge T(X). \end{aligned}$$

В [81] показано, что метрика g имеет тип Петрова II или D (тип может зависеть от точки). Из критерия Бела следует, что g имеет тип II в точке $m \in M$ тогда и только тогда, когда $T_m \neq 0$, в противном случае g имеет тип D. Так как эндоморфизм T_m – симметрический с нулевым следом, он либо равен нулю, либо имеет ранг 2. Следовательно, $T_m = 0$ тогда и только тогда, когда $\det T_m = 0$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функцию $f = c(u)x^2$, тогда $A = 2xc(u) dy$. Выберем $H_0 = -\Lambda x^4 c^2(u)$. Чтобы избавиться от формы A , решим систему уравнений

$$\frac{dx(u)}{du} = 0, \quad \frac{dy(u)}{du} = 2\Lambda c(u)x^3(u)$$

с начальными условиями $x(0) = \tilde{x}$ и $y(0) = \tilde{y}$. Получим преобразование

$$v = \tilde{v}, \quad x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y} + 2\Lambda b(u)\tilde{x}^3, \quad u = \tilde{u},$$

где функция $b(u)$ удовлетворяет $db(u)/du = c(u)$ и $b(0) = 0$. Относительно новых координат имеем

$$g = 2dv du + h(u) + (\Lambda v^2 + 3\Lambda x^4 c^2(u)) (du)^2, \\ h(u) = \frac{1}{-\Lambda \cdot x^2} ((36\Lambda^2 b^2(u)x^4 + 1) (dx)^2 + 12\Lambda b(u)x^2 dx dy + (dy)^2).$$

Пусть $c(u) \equiv 1$, тогда $b(u) = u$ и $\det T = -9\Lambda^4 x^4 (x^4 + v^2)$. Равенство $\det T_m = 0$ ($m = (v, x, y, u)$) равносильно равенству $v = 0$. Метрика g неразложима. Эта метрика имеет тип Петрова D на множестве $\{(0, x, y, u)\}$ и тип II на его дополнении.

ПРИМЕР 3. Функция $f = \ln(\tan(x/2)) \cos x + 1$ является частным решением первого уравнения в (8.12). Получаем $A = (\cos x - \ln(\cot(x/2)) \sin^2 x) dy$. Рассмотрим преобразование

$$\tilde{v} = v, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y - \Lambda u \left(\ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right), \quad \tilde{u} = u.$$

Относительно новых координат имеем

$$g = 2dv du + h(u) + (\Lambda v^2 + \tilde{H}_0) (du)^2, \\ h(u) = \left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{4\Lambda u^2}{\sin^4 x} \right) (dx)^2 + \frac{4u}{\sin x} dx dy + \frac{\sin^2 x}{\Lambda} (dy)^2,$$

где $\tilde{H}_0$ удовлетворяет уравнению $\Delta_h \tilde{H}_0 = -\frac{1}{2} h^{ij} \ddot{h}_{ij}$. Примером такой функции $\tilde{H}_0$ является

$$\tilde{H}_0 = -\Lambda \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \ln^2 \left(\cot \frac{x}{2} \right) \right).$$

Имеем

$$\det T = -\frac{\Lambda^4}{\sin^4 x} \left(v^2 + \left(\ln \left(\cot \frac{x}{2} \right) \cos x - 1 \right)^2 \right).$$

Поэтому метрика g имеет тип Петрова D на множестве

$$\left\{ (0, x, y, u) \mid \ln \left(\cot \frac{x}{2} \right) \cos x - 1 = 0 \right\}$$

и тип II на дополнении к этому множеству. Метрика неразложима.

9. Римановы и лоренцевы многообразия с рекуррентными спинорными полями

Пусть (M, g) – спинорное псевдориманово многообразие сигнатуры (r, s) , а S – соответствующее комплексное спинорное расслоение с индуцированной связностью ∇^S . Спинорное поле $s \in \Gamma(S)$ называется *рекуррентным*, если

$$\nabla_X^S s = \theta(X)s \tag{9.1}$$

для всех векторных полей $X \in \Gamma(TM)$ (здесь θ – комплекснозначная 1-форма). Если $\theta = 0$, то s – параллельное спинорное поле. Для рекуррентного спинорного поля s существует локально определенная, не обращающаяся в нуль функция f такая, что поле fs параллельно тогда и только тогда, когда $d\theta = 0$. Если многообразие M односвязно, то такая функция определена глобально.

Изучение спинорных многообразий, допускающих параллельные спинорные поля, было начато Хитчиным [83], а позднее продолжено Фридрихом [54]. Ванг охарактеризовал односвязные спинорные римановы многообразия, допускающие параллельные спинорные поля, в терминах групп голономии этих многообразий [121]. Аналогичный результат получили Лайстнер для лоренцевых многообразий [98], [99], Баум и Кас для псевдоримановых многообразий с неприводимыми группами голономии [15] и Икемакхен в случае псевдоримановых многообразий нейтральной сигнатуры (n, n) , допускающих два взаимно дополнительных параллельных изотропных распределения [86].

Фридрих [54] рассмотрел уравнение (9.1) на римановом многообразии в предположении, что θ – вещественнозначная 1-форма. Он доказал, что это уравнение влечет равенство тензора Риччи нулю и равенство $d\theta = 0$. Ниже мы увидим, что это утверждение не имеет места в случае лоренцевых многообразий. Пример 1 из [54] дает решение s уравнения (9.1) с $\theta = i\omega$, $d\omega \neq 0$ для некоторой вещественнозначной 1-формы ω на компактном римановом многообразии (M, g) , представляющем собой произведение неплоского тора T^2 и окружности S^1 . В действительности, рекуррентное спинорное поле s возникает из локально определенного рекуррентного спинорного поля на кэлеровом, не являющемся Риччи-плоским многообразии T^2 ; существование последнего спинорного поля показывает приводимая ниже теорема 27.

Спинорное расслоение S псевдориманова многообразия (M, g) допускает параллельное комплексное подрасслоение размерности 1 тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки многообразия (M, g) существует не обращающееся в нуль рекуррентное спинорное поле; эти поля должны быть пропорциональны в пересечениях областей их определения. В этом разделе мы изучаем некоторые классы спинорных псевдоримановых многообразий (M, g) , чьи спинорные расслоения допускают одномерные комплексные подрасслоения.

9.1. Римановы многообразия. Ванг [121] показал, что локально неразложимое односвязное риманово многообразие (M, g) допускает параллельное спинорное поле тогда и только тогда, когда его алгебра голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – одна из $\mathfrak{su}(n/2)$, $\mathfrak{sp}(n/4)$, G_2 , $\mathfrak{spin}(7)$.

В [67] получены следующие результаты о римановых многообразиях с рекуррентными спинорными полями.

ТЕОРЕМА 27. Пусть (M, g) – локально неразложимое n -мерное односвязное спинорное риманово многообразие. Тогда спинорное расслоение S этого многообразия допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда алгебра голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ многообразия (M, g) – одна из $\mathfrak{u}(n/2)$, $\mathfrak{su}(n/2)$, $\mathfrak{sp}(n/4)$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$ или (M, g) – локально симметрическое кэлерово многообразие.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть (M, g) – односвязное спинорное риманово многообразие с неприводимой алгеброй голономии и без ненулевых параллельных спинорных полей. В этом случае спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M, g) – кэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть (M, g) – односвязное полное спинорное риманово многообразие без ненулевых параллельных спинорных полей, алгебра голономии которого не является неприводимой. В этом случае его спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда многообразие (M, g) – прямое произведение спинорного кэлерова, не являющегося Риччи-плоским многообразия и спинорного риманова многообразия с ненулевым параллельным спинорным полем.

ТЕОРЕМА 28. Пусть (M, g) – локально неразложимое n -мерное односвязное спинорное кэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским. Тогда его спинорное расслоение S допускает в точности два параллельных одномерных комплексных подрасслоения.

9.2. Лоренцевы многообразия. Алгебры голономии лоренцевых спинорных многообразий, допускающих параллельные спинорные поля, классифицированы в [98], [99]. Предположим, что спинорное расслоение многообразия (M, g) допускает одномерное параллельное комплексное подрасслоение и на (M, g) нет ненулевых параллельных спинорных полей.

ТЕОРЕМА 29. Пусть (M, g) – односвязное полное спинорное лоренцево многообразие. Предположим, что на (M, g) нет ненулевых параллельных спинорных полей. В этом случае спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих утверждений:

1) (M, g) представляет собой прямое произведение многообразия $(\mathbb{R}, -(dt)^2)$ и спинорного риманова многообразия (N, h) такого, что спинорное расслоение многообразия (N, h) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение и на (N, h) нет параллельных спинорных полей;

2) (M, g) – прямое произведение неразложимого спинорного лоренцева многообразия и спинорного риманова многообразия (N, h) таких, что спинорные расслоения обоих многообразий допускают параллельные одномерные комплексные подрасслоения и по крайней мере на одном из этих многообразий нет параллельных спинорных полей.

Рассмотрим неразложимое лоренцево многообразие (M, g) . Предположим, что спинорное расслоение многообразия (M, g) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение l . Пусть $s \in \Gamma(l)$ – произвольное локальное сечение расслоения l , не обращающееся в нуль. Пусть $p \in \Gamma(TM)$ – соответствующий поток Дирака. Векторное поле p определяется равенством

$$g(p, X) = -\langle X \cdot s, s \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – эрмитово произведение на S . Оказывается, что p – рекуррентное векторное поле. В случае лоренцевых многообразий поток Дирака удовлетворяет $g(p, p) \leq 0$, а нулевые точки поля p совпадают с нулевыми точками поля s . Так как s не обращается в нуль, а p – рекуррентное поле, то либо $g(p, p) < 0$, либо $g(p, p) = 0$. В первом случае многообразие разложимо. Таким образом, p – изотропное рекуррентное векторное поле, а многообразие (M, g) допускает параллельное распределение изотропных прямых, т.е. его алгебра голономии содержится в $\mathfrak{sim}(n)$.

В [98], [99] показано, что (M, g) допускает параллельное спинорное поле тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{2, \mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$ и в разложении (4.5) для подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждая из подалгебр $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из алгебр Ли $\mathfrak{su}(n_i/2)$, $\mathfrak{sp}(n_i/4)$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$.

В [67] мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 30. Пусть (M, g) – односвязное локально неразложимое $(n+2)$ -мерное спинорное лоренцево многообразие. В этом случае спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M, g) допускает параллельное распределение изотропных прямых (т.е. его алгебра голономии $\mathfrak{g}$ содержится в $\mathfrak{sim}(n)$), а в разложении (4.5) для подалгебры $\mathfrak{h} = \text{pr}_{\mathfrak{so}(n)} \mathfrak{g}$ каждая из подалгебр $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из алгебр Ли $\mathfrak{u}(n_i/2)$, $\mathfrak{su}(n_i/2)$, $\mathfrak{sp}(n_i/4)$, G_2 , $\mathfrak{spin}(7)$ или с алгеброй голономии неразложимого симметрического элерова пространства. Число параллельных одномерных комплексных подрасслоений расслоения S равно числу одномерных комплексных подпространств спинорного модуля Δ_n , сохраняемых алгеброй $\mathfrak{h}$.

10. Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии

В этом разделе будет дана локальная классификация конформно плоских лоренцевых многообразий со специальными группами голономии. Соответствующие локальные метрики представляют собой некоторые расширения римановых метрик постоянной секционной кривизны до метрик Волкера. Этот результат опубликован в [64], [66].

Курита [96] показал, что для конформно плоского риманова многообразия имеет место следующая альтернатива: либо оно является произведением двух пространств постоянной секционной кривизны, либо оно является произведением пространства постоянной секционной кривизны и интервала, либо ограниченная группа голономии этого многообразия совпадает с компонентой связности единицы ортогональной группы. Последнее условие представляет собой наиболее общую ситуацию; среди разнообразных многообразий, удовлетворяющих этому условию, можно выделить только пространства постоянной секционной кривизны. Ясно, что не существует конформно плоских римановых многообразий со специальными группами голономии.

В [66] мы обобщаем теорему Курита на случай псевдоримановых многообразий. Оказывается, что в дополнение к перечисленным выше возможностям

конформно плоское псевдориманово многообразие может иметь слабо неприводимую, не являющуюся неприводимой группой голономии. Мы даем полное локальное описание конформно плоских лоренцевых многообразий (M, g) со слабо неприводимыми, не являющимися неприводимыми группами голономии.

На многообразии Волкера (M, g) определим каноническую функцию λ , исходя из равенства

$$\text{Ric}(p) = \lambda p,$$

где Ric – оператор Риччи. Если метрика g записана в виде (4.11), то $\lambda = (1/2)\partial_v^2 H$ и скалярная кривизна метрики g удовлетворяет

$$s = 2\lambda + s_0,$$

где s_0 – скалярная кривизна метрики h . Вид конформно плоской метрики Волкера будет зависеть от обращения в нуль функции λ . В общем случае получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 31. *Пусть (M, g) – конформно плоское многообразие Волкера (т. е. тензор кривизны Вейля равен нулю) размерности $n+2 \geq 4$. Тогда в некоторой окрестности каждой точки M существуют координаты $v, x^1, \dots, x^n, u$ такие, что*

$$g = 2 dv du + \Psi \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + 2A du + (\lambda(u)v^2 + vH_1 + H_0) (du)^2,$$

где

$$\Psi = 4 \left(1 - \lambda(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 \right)^{-2},$$

$$A = A_i dx^i, \quad A_i = \Psi \left(-4C_k(u)x^k x^i + 2C_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 \right),$$

$$H_1 = -4C_k(u)x^k \sqrt{\Psi} - \partial_u \ln \Psi + K(u),$$

$$H_0(x^1, \dots, x^n, u) =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\lambda^2(u)} \Psi \sum_{k=1}^n C_k^2(u) + \sqrt{\Psi} \left(a(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + D_k(u)x^k + D(u) \right), & \text{если } \lambda(u) \neq 0, \\ 16 \left(\sum_{k=1}^n (x^k)^2 \right)^2 \sum_{k=1}^n C_k^2(u) + \tilde{a}(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + \tilde{D}_k(u)x^k + \tilde{D}(u), & \text{если } \lambda(u) = 0, \end{cases}$$

для некоторых функций $\lambda(u), a(u), \tilde{a}(u), C_i(u), D_i(u), D(u), \tilde{D}_i(u), \tilde{D}(u)$.

Скалярная кривизна метрики g равна $-(n-2)(n+1)\lambda(u)$.

Если функция λ равна нулю на некотором открытом множестве или не обращается в нуль, то метрика, полученная выше, может быть упрощена.

ТЕОРЕМА 32. Пусть (M, g) – конформно плоское многообразие Волкера размерности $n + 2 \geq 4$.

1) Если функция λ не равна нулю в некоторой точке многообразия, то в некоторой окрестности этой точки существуют координаты $v, x^1, \dots, x^n, u$ такие, что

$$g = 2 dv du + \Psi \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + (\lambda(u)v^2 + vH_1 + H_0) (du)^2,$$

где

$$\Psi = 4 \left(1 - \lambda(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 \right)^{-2},$$

$$H_1 = -\partial_u \ln \Psi, \quad H_0 = \sqrt{\Psi} \left(a(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + D_k(u)x^k + D(u) \right).$$

2) Если $\lambda \equiv 0$ в некоторой окрестности некоторой точки многообразия, то в окрестности этой точки существуют координаты $v, x^1, \dots, x^n, u$ такие, что

$$g = 2 dv du + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + 2A du + (vH_1 + H_0) (du)^2,$$

где

$$\begin{aligned} A &= A_i dx^i, \quad A_i = C_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2, \quad H_1 = -2C_k(u)x^k, \\ H_0 &= \sum_{k=1}^n (x^k)^2 \left(\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (x^k)^2 \sum_{k=1}^n C_k^2(u) - (C_k(u)x^k)^2 + \dot{C}_k(u)x^k + a(u) \right) \\ &\quad + D_k(u)x^k + D(u). \end{aligned}$$

В частности, если все C_i равны 0, то метрика может быть записана в виде

$$g = 2 dv du + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + a(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 (du)^2. \quad (10.1)$$

Таким образом, теорема 32 дает локальный вид конформно плоской метрики Волкера в окрестностях точек, где λ не обращается в нуль или тождественно равна нулю. Такие точки представляют собой всюду плотное подмножество многообразия. Теорема 31 описывает также метрику в окрестностях тех точек, где функция λ обращается в нуль, но не является локально нулевой, например, в окрестностях изолированных нулевых точек функции λ .

Далее, можно найти алгебры голономии полученных метрик и проверить, какие из метрик разложимы.

ТЕОРЕМА 33. Пусть (M, g) – как в теореме 31.

1) Многообразие (M, g) локально неразложимо тогда и только тогда, когда существует система координат, удовлетворяющая одному из следующих условий:

- $\dot{\lambda} \neq 0$;
- $\dot{\lambda} \equiv 0$, $\lambda \neq 0$, т. е. g может быть записана как в первой части теоремы 32, и

$$\sum_{k=1}^n D_k^2 + (a + \lambda D)^2 \neq 0;$$

- $\lambda \equiv 0$, т. е. g может быть записана как во второй части теоремы 32, и

$$\sum_{k=1}^n C_k^2 + a^2 \neq 0.$$

В противном случае метрика может быть записана в виде

$$g = \Psi \sum_{k=1}^n (dx^k)^2 + 2 dv du + \lambda v^2 (du)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Алгебра голономии этой метрики тривиальна тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. Если $\lambda \neq 0$, то алгебра голономии изоморфна $\mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(1, 1)$.

2) Предположим, что многообразие (M, g) локально неразложимо. Тогда его алгебра изоморфна $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda^2 + \sum_{k=1}^n C_k^2 \equiv 0$$

для каждой системы координат; в этом случае (M, g) – плоская гравитационная волна, а g дана формулой (10.1). Если для каждой системы координат имеем

$$\lambda^2 + \sum_{k=1}^n C_k^2 \neq 0,$$

то алгебра голономии изоморфна $\mathfrak{sim}(n)$.

Возможные алгебры голономии конформно плоских лоренцевых многообразий размерности 4 найдены в [81], в этой статье была обозначена проблема построения примера конформно плоской метрики с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(2)$ (эта алгебра в [81] обозначена через R_{14}). Попытка построить такую метрику была сделана в [75]. Мы показываем, что метрика, построенная там, в действительности является разложимой, а ее алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{so}(1, 1) \oplus \mathfrak{so}(2)$. Таким образом, в настоящей работе мы впервые получаем конформно плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(n)$, и, более того, мы находим все такие метрики.

Полевое уравнение теории гравитации Нордстрёма, которая была создана до теории Эйнштейна, имеет вид

$$W = 0, \quad s = 0$$

(см. [106], [119]). Все метрики из теоремы 31 в размерности 4 и метрики из второй части теоремы 32 для больших размерностей дают примеры решения этих уравнений. Таким образом, мы нашли все решения теории гравитации Нордстрёма с алгебрами голономии, содержащимися в $\mathfrak{sim}(n)$. Выше мы видели, что полное решение уравнения Эйнштейна на лоренцевых многообразиях с такими алгебрами голономии отсутствует.

Важно отметить, что односвязные конформно плоские лоренцевы спинорные многообразия допускают пространства конформных спиноров Киллинга максимально возможной размерности [12].

Было бы интересно получить примеры конформно плоских лоренцевых многообразий, имеющих какие-либо глобальные геометрические свойства, например, важными являются конструкции глобально гиперболических лоренцевых многообразий со специальными группами голономии [17], [19].

Проективная эквивалентность 4-мерных конформно плоских лоренцевых метрик со специальными алгебрами голономии изучалась недавно в [80]. Имеется много интересных работ о конформно плоских (псевдо)римановых, в частности лоренцевых, многообразиях. Отметим лишь некоторые из них: [6], [84], [93], [115].

11. 2-симметрические лоренцевы многообразия

В этом разделе мы обсудим классификацию 2-симметрических лоренцевых многообразий, полученную в [5].

Симметрические псевдоримановы многообразия представляют собой важный класс пространств. Прямым обобщением этих многообразий являются k -симметрические псевдоримановы пространства (M, g) , удовлетворяющие условиям

$$\nabla^k R = 0, \quad \nabla^{k-1} R \neq 0,$$

где $k \geq 1$. В случае римановых многообразий, условие $\nabla^k R = 0$ влечет $\nabla R = 0$ [117]. С другой стороны, существуют псевдоримановы k -симметрические пространства для $k \geq 2$ [28], [90], [112].

Неразложимые односвязные лоренцевы симметрические пространства исчерпываются пространствами де Ситтера, анти-де Ситтера и Каэна–Валлаха, последние пространства представляют собой специальные плоские гравитационные волны [41]. Кайгородов [90] рассматривал различные обобщенные симметрические лоренцевы пространства.

Работа Сеновилла [112] начинается систематические исследования 2-симметрических лоренцевых пространств, в ней доказано, что каждое такое пространство допускает изотропное параллельное векторное поле. В работе [28] получена локальная классификация таких пространств в размерности 4, для этого была использована классификация Петрова тензоров Вейля [108].

В работе [5] мы обобщаем результат [28] на случай произвольной размерности.

ТЕОРЕМА 34. Пусть (M, g) – локально неразложимое лоренцево многообразие размерности $n + 2$. В этом случае многообразие (M, g) является 2-симметрическим тогда и только тогда, когда локально существуют координаты $v, x^1, \dots, x^n$, и такие, что

$$g = 2 dv du + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + (H_{ij}u + F_{ij})x^i x^j (du)^2,$$

где H_{ij} – ненулевая диагональная вещественная матрица с диагональными элементами $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, а F_{ij} – симметрическая вещественная матрица.

Из теоремы Ву следует, что произвольное 2-симметрическое лоренцево многообразие локально является произведением неразложимого 2-симметрического лоренцева многообразия и локально симметрического риманова многообразия. В [29] показано, что односвязное геодезически полное 2-симметрическое лоренцево многообразие является произведением $\mathbb{R}^{n+2}$ с метрикой из теоремы 34 и (возможно, тривиального) риманова симметрического пространства.

Доказательство теоремы 34, приведенное в [5], наилучшим образом демонстрирует методы теории групп голономии. Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)$ – алгебра голономии многообразия (M, g) . Рассмотрим пространство $\mathcal{R}^\nabla(\mathfrak{g})$ ковариантных производных алгебраических тензоров кривизны типа $\mathfrak{g}$, состоящее из линейных отображений из $\mathbb{R}^{1, n+1}$ в $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, которые удовлетворяют второму тождеству Бьянки. Пусть $\mathcal{R}^\nabla(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{R}^\nabla(\mathfrak{g})$ – подпространство, аннулируемое алгеброй $\mathfrak{g}$.

Тензор ∇R не равен нулю и является параллельным, а потому его значение в каждой точке многообразия принадлежит пространству $\mathcal{R}^\nabla(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$. Пространство $\mathcal{R}^\nabla(\mathfrak{so}(1, n + 1))_{\mathfrak{g}}$ тривиально [116], поэтому $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Краеугольным камнем доказательства является равенство $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$, т. е. $\mathfrak{g}$ – алгебра типа 2 с тривиальной ортогональной частью $\mathfrak{h}$. Такое многообразие является плоской гравитационной волной (см. п. 4.2), т. е. локально

$$g = 2 dv du + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + H (du)^2, \quad \partial_v H = 0,$$

и решить уравнение $\nabla^2 R = 0$ не составляет никакого труда.

Предположим, что ортогональная часть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ алгебры голономии $\mathfrak{g}$ нетривиальна. Подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ можно разложить на неприводимые части, как в п. 4.1. Использование координат (4.12) позволяет предположить, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ неприводима. Если $\mathfrak{g}$ имеет тип 1 или 3, то простые алгебраические вычисления показывают, что $\mathcal{R}^\nabla(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} = 0$.

Остается рассмотреть случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$, где подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ неприводима. В этом случае пространство $\mathcal{R}^\nabla(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ одномерно, это позволяет найти явный вид тензора ∇R , а именно, если метрика g имеет вид (4.11), то

$$\nabla R = f du \otimes h^{ij} (p \wedge \partial_i) \otimes (p \wedge \partial_j)$$

для некоторой функции f .

Далее, с использованием этого равенства было доказано, что $\nabla W = 0$, т. е. конформный тензор Вейля является параллельным. Результаты работы [49] показывают, что либо $\nabla R = 0$, либо $W = 0$, либо рассматриваемое многообразие – плоская гравитационная волна. Первое условие противоречит предположению $\nabla R \neq 0$, последнее условие противоречит предположению $\mathfrak{h} \neq 0$. Из результатов раздела 10 следует, что условие $W = 0$ влечет равенство $\mathfrak{h} = 0$, т. е. снова получаем противоречие.

Оказывается, что последний шаг доказательства из [5] можно существенно упростить и не рассматривать условие $\nabla W = 0$. Действительно, вернемся к равенству для ∇R . Легко проверить, что $\nabla du = 0$. Поэтому равенство $\nabla^2 R = 0$ влечет $\nabla(fh^{ij}(p \wedge \partial_i) \otimes (p \wedge \partial_j)) = 0$. Следовательно,

$$\nabla(R - ufh^{ij}(p \wedge \partial_i) \otimes (p \wedge \partial_j)) = 0.$$

Значения тензорного поля $R - ufh^{ij}(p \wedge \partial_i) \otimes (p \wedge \partial_j)$ в каждой точке многообразия принадлежат пространству $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ и аннулируются алгеброй голономии $\mathfrak{g}$. Отсюда немедленно следует, что

$$R - ufh^{ij}(p \wedge \partial_i) \otimes (p \wedge \partial_j) = f_0 h^{ij}(p \wedge \partial_i) \otimes (p \wedge \partial_j)$$

для некоторой функции f_0 , т. е. R – тензор кривизны плоской гравитационной волны, что противоречит условию $\mathfrak{h} \neq 0$. Таким образом, $\mathfrak{h} = 0$ и $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Теорема 34 была передоказана в [29] с помощью рассмотрения уравнения $\nabla^2 R = 0$ в локальных координатах и громоздких вычислений. Это показывает значительное преимущество методов теории групп голономии.

Список литературы

- [1] В. П. Акулов, Д. В. Волков, В. А. Сорока, “О калибровочных полях на суперпространствах с различными группами голономии”, *Письма в ЖЭТФ*, **22:7** (1975), 396–399; англ. пер.: V. P. Akulov, D. V. Volkov, V. A. Soroka, “Gauge fields on superspaces with different holonomy groups”, *JETP Lett.*, **22:7** (1975), 187–188.
- [2] Д. В. Алексеевский, “Римановы пространства с необычными группами голономии”, *Функц. анализ и его прил.*, **2:2** (1968), 1–10; англ. пер.: D. V. Alekseevskii, “Riemannian spaces with exceptional holonomy groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **2:2** (1968), 97–105.
- [3] Д. В. Алексеевский, “Однородные римановы пространства отрицательной кривизны”, *Матем. сб.*, **96(138):1** (1975), 93–117; англ. пер.: D. V. Alekseevskii, “Homogeneous Riemannian spaces of negative curvature”, *Math. USSR-Sb.*, **25:1** (1975), 87–109.
- [4] D. V. Alekseevsky, V. Cortés, A. S. Galaev, T. Leistner, “Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy”, *J. Reine Angew. Math.*, **635** (2009), 23–69.
- [5] D. V. Alekseevsky, A. S. Galaev, “Two-symmetric Lorentzian manifolds”, *J. Geom. Phys.*, **61:12** (2011), 2331–2340.
- [6] Д. В. Алексеевский, Б. Н. Кимельфельд, “Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий”, *Матем. заметки*, **24:1** (1978), 103–110; англ. пер.: D. V. Alekseevskii, B. N. Kimel’fel’d, “Classification of homogeneous conformally flat Riemannian manifolds”, *Math. Notes*, **24:1** (1978), 559–562.

- [7] Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников, “Геометрия пространств постоянной кривизны”, *Геометрия* – 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **29**, ВИНТИ, М., 1988, 5–146; англ. пер.: D. V. Alekseevskij, E. B. Vinberg, A. S. Solodovnikov, “Geometry of spaces of constant curvature”, *Geometry*, II, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, Springer, Berlin, 1993, 1–138.
- [8] W. Ambrose, I. M. Singer, “A theorem on holonomy”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 428–443.
- [9] S. Armstrong, “Ricci-flat holonomy: a classification”, *J. Geom. Phys.*, **57**:6 (2007), 1457–1475.
- [10] В. В. Астраханцев, “О группах голономии четырехмерных псевдоримановых пространств”, *Матем. заметки*, **9**:1 (1971), 59–66; англ. пер.: V. V. Ast-rakhansev, “Holonomy groups of four-dimensional pseudo-Riemann spaces”, *Math. Notes*, **9**:1 (1971), 33–37.
- [11] A. Batrachenko, M. J. Duff, J. T. Liu, W. Y. Wen, “Generalized holonomy of M-theory vacua”, *Nuclear Phys. B*, **726**:1-2 (2005), 275–293.
- [12] H. Baum, “Conformal Killing spinors and the holonomy problem in Lorentzian geometry – a survey of new results”, *Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations*, IMA Vol. Math. Appl., **144**, Springer, New York, 2008, 251–264.
- [13] H. Baum, “Holonomy groups of Lorentzian manifolds: a status report”, *Global differential geometry*, Springer Proc. Math., **17**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2012, 163–200.
- [14] H. Baum, A. Juhl, *Conformal differential geometry. Q-curvature and conformal holonomy*, Oberwolfach Semin., **40**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010, x+152 pp.
- [15] H. Baum, I. Kath, “Parallel spinors and holonomy groups on pseudo-Riemannian spin manifolds”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **17**:1 (1999), 1–17.
- [16] H. Baum, K. Lärz, T. Leistner, “On the full holonomy group of special Lorentzian manifolds”, *Math. Z.*, **277**:3-4 (2014), 797–828.
- [17] H. Baum, O. Müller, “Codazzi spinors and globally hyperbolic manifolds with special holonomy”, *Math. Z.*, **258**:1 (2008), 185–211.
- [18] Я. В. Базайкин, “О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $\text{Spin}(7)$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:1 (2007), 11–32; англ. пер.: Ya. V. Bazaikin, “On the new examples of complete noncompact $\text{Spin}(7)$ -holonomy metrics”, *Sib. Math. J.*, **48**:1 (2007), 8–25.
- [19] Я. В. Базайкин, “Глобально гиперболические лоренцевы пространства со специальными группами голономии”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:4 (2009), 721–736; англ. пер.: Ya. V. Bazaikin, “Globally hyperbolic Lorentzian spaces with special holonomy groups”, *Sib. Math. J.*, **50**:4 (2009), 567–579.
- [20] Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович, “Метрики с группой голономии G_2 , связанные с 3-сасакиевым многообразием”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:1 (2008), 3–7; англ. пер.: Ya. V. Bazaikin, E. G. Malkovich, “ G_2 -holonomy metrics connected with a 3-Sasakian manifold”, *Sib. Math. J.*, **49**:1 (2008), 1–4.
- [21] L. Bérard-Bergery, A. Ikemakhen, “On the holonomy of Lorentzian manifolds”, *Differential geometry: geometry in mathematical physics and related topics* (Los Angeles, CA, 1990), Proc. Sympos. Pure Math., **54**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 27–40.
- [22] L. Bérard-Bergery, A. Ikemakhen, “Sur l’holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature (n, n) ”, *Bull. Soc. Math. France*, **125**:1 (1997), 93–114.

- [23] M. Berger, “Sur les groupes d’holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes”, *Bull. Soc. Math. France*, **83** (1955), 279–330.
- [24] M. Berger, “Les espaces symétriques noncompacts”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **74** (1957), 85–177.
- [25] A. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, т. 2, Мир, М., 1990, 383 с.; пер. с англ.: A. L. Besse, *Einstein manifolds*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, xii+510 pp.
- [26] N. I. Bezvitnaya, “Holonomy groups of pseudo-quaternionic-Kählerian manifolds of non-zero scalar curvature”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **39**:1 (2011), 99–105.
- [27] N. I. Bezvitnaya, “Holonomy algebras of pseudo-hyper-Kählerian manifolds of index 4”, *Differential Geom. Appl.*, **31**:2 (2013), 284–299.
- [28] O. F. Blanco, M. Sánchez, J. M. M. Senovilla, “Complete classification of second-order symmetric spacetimes”, *J. Phys. Conf. Ser.*, **229**:1 (2010), 012021, 5 pp.
- [29] O. F. Blanco, M. Sánchez, J. M. M. Senovilla, “Structure of second-order symmetric Lorentzian manifolds”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **15**:2 (2013), 595–634.
- [30] A. Bolsinov, D. Tsonev, “On a new class of holonomy groups in pseudo-Riemannian geometry”, *J. Differential Geom.*, **97**:3 (2014), 377–394.
- [31] A. Borel, A. Lichnerowicz, “Groupes d’holonomie des variétés riemanniennes”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234** (1952), 1835–1837.
- [32] Ch. Boubel, “On the holonomy of Lorentzian metrics”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **16**:3 (2007), 427–475.
- [33] Ch. Boubel, A. Zeghib, *Dynamics of some Lie subgroups of $O(n, 1)$, applications*, Prépublication de l’ENS Lyon № 315, 2003, <http://www.umpa.ens-lyon.fr/UMPA/Prepublications/>.
- [34] C. P. Boyer, K. Galicki, “Sasakian geometry, holonomy, and supersymmetry”, *Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **16**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2010, 39–83.
- [35] J. Brannlund, A. Coley, S. Hervik, “Supersymmetry, holonomy and Kundt spacetimes”, *Classical Quantum Gravity*, **25**:19 (2008), 195007, 10 pp.
- [36] J. Brannlund, A. Coley, S. Hervik, “Holonomy, decomposability, and relativity”, *Canad. J. Phys.*, **87**:3 (2009), 241–243.
- [37] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, R. Vázquez-Lorenzo, *The geometry of Walker manifolds*, *Synth. Lect. Math. Stat.*, **5**, Morgan & Claypool Publishers, Williston, VT, 2009, xviii+159 pp.
- [38] R. L. Bryant, “Metrics with exceptional holonomy”, *Ann. of Math.* (2), **126**:3 (1987), 525–576.
- [39] R. L. Bryant, “Classical, exceptional and exotic holonomies: a status report”, *Actes de la table ronde de géométrie différentielle* (Luminy, 1992), Sémin. Congr., **1**, Soc. Math. France, Paris, 1996, 93–165.
- [40] R. Bryant, “Pseudo-Riemannian metrics with parallel spinor fields and vanishing Ricci tensor”, *Global analysis and harmonic analysis* (Marseille–Luminy, 1999), Sémin. Congr., **4**, Soc. Math. France, Paris, 2000, 53–94.
- [41] M. Cahen, N. Wallach, “Lorentzian symmetric spaces”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**:3 (1970), 585–591.
- [42] É. Cartan, “Les groupes réels simples finis et continus”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **31** (1914), 263–355.
- [43] É. Cartan, “Sur une classe remarquable d’espaces de Riemann”, *Bull. Soc. Math. France*, **54** (1926), 214–264.

- [44] É. Cartan, “Les groupes d’holonomie des espaces généralisés”, *Acta. Math.*, **48**:1-2 (1926), 1–42.
- [45] S. Cecotti, *A geometric introduction to F-theory*, Lectures Notes SISSA, 2010, 130 pp., <http://people.sissa.it/~cecotti/FNOTES10.pdf>.
- [46] A. Coley, A. Fuster, S. Hervik, “Supergravity solutions with constant scalar invariants”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:6 (2009), 1119–1133.
- [47] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, “New complete noncompact Spin(7) manifolds”, *Nuclear Phys. B*, **620**:1-2 (2002), 29–54.
- [48] G. de Rham, “Sur la réductibilité d’un espace de Riemann”, *Comment. Math. Helv.*, **26** (1952), 328–344.
- [49] A. Derdzinski, W. Roter, “The local structure of conformally symmetric manifolds”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **16**:1 (2009), 117–128.
- [50] A. J. Di Scala, C. Olmos, “The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space”, *Math. Z.*, **237**:1 (2001), 199–209.
- [51] Д. В. Егоров, “QR-подмногообразия и римановы метрики с группой голономии G_2 ”, *Матем. заметки*, **90**:5 (2011), 781–784; англ. пер.: D. V. Egorov, “QR-submanifolds and Riemannian metrics with holonomy G_2 ”, *Math. Notes*, **90**:5 (2011), 763–766.
- [52] J. M. Figueroa-O’Farrill, “Breaking the M-waves”, *Classical Quantum Gravity*, **17**:15 (2000), 2925–2947.
- [53] J. Figueroa-O’Farrill, P. Meessen, S. Philip, “Supersymmetry and homogeneity of M-theory backgrounds”, *Classical Quantum Gravity*, **22**:1 (2005), 207–226.
- [54] Th. Friedrich, “Zur Existenz paralleler Spinorfelder über Riemannschen Mannigfaltigkeiten”, *Colloq. Math.*, **44**:2 (1981), 277–290.
- [55] A. S. Galaev, “The spaces of curvature tensors for holonomy algebras of Lorentzian manifolds”, *Differential Geom. Appl.*, **22**:1 (2005), 1–18.
- [56] A. S. Galaev, “Metrics that realize all Lorentzian holonomy algebras”, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **3**:5-6 (2006), 1025–1045.
- [57] A. S. Galaev, “Isometry groups of Lobachevskian spaces, similarity transformation groups of Euclidean spaces and Lorentzian holonomy groups”, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, 2006, № 79, 87–97.
- [58] A. S. Galaev, *Holonomy groups and special geometric structures of pseudo-Kählerian manifolds of index 2*, PhD thesis, Humboldt Univ., Berlin, 2006, 135 pp.; 2006, 135 pp., arXiv:math/0612392.
- [59] A. S. Galaev, “One component of the curvature tensor of a Lorentzian manifold”, *J. Geom. Phys.*, **60**:6-8 (2010), 962–971.
- [60] A. S. Galaev, “Holonomy of Einstein Lorentzian manifolds”, *Classical Quantum Gravity*, **27**:7 (2010), 075008, 13 pp.
- [61] A. S. Galaev, “On the Einstein equation on Lorentzian manifolds with parallel distributions of isotropic lines”, *Физико-математические науки*, Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, **153**, Изд-во Казан. ун-та, Казань, 2011, 165–174.
- [62] A. S. Galaev, “Examples of Einstein spacetimes with recurrent null vector fields”, *Classical Quantum Gravity*, **28**:17 (2011), 175022, 6 pp.
- [63] A. S. Galaev, “Irreducible holonomy algebras of Riemannian supermanifolds”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **42**:1 (2012), 1–27.
- [64] A. Galaev, “Some applications of the Lorentzian holonomy algebras”, *J. Geom. Symmetry Phys.*, **26** (2012), 13–31.

- [65] A. S. Galaev, “Holonomy algebras of Einstein pseudo-Riemannian manifolds”, 2012, 16 pp., [arXiv:1206.6623](#).
- [66] А. С. Галаев, “Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии”, *Матем. сб.*, **204**:9 (2013), 29–50; англ. пер.: A. S. Galaev, “Conformally flat Lorentzian manifolds with special holonomy groups”, *Sb. Math.*, **204**:9 (2013), 1264–1284.
- [67] А. С. Галаев, “Псевдоримановы многообразия с рекуррентными спинорными полями”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:4 (2013), 762–774; англ. пер.: A. S. Galaev, “Pseudo-Riemannian manifolds with recurrent spinor fields”, *Sib. Math. J.*, **54**:4 (2013), 604–613.
- [68] А. С. Галаев, “О классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:5 (2013), 1000–1008; англ. пер.: A. S. Galaev, “About the classification of the holonomy algebras of Lorentzian manifolds”, *Sib. Math. J.*, **54**:5 (2013), 798–804.
- [69] А. С. Галаев, “Заметка о группах голономии псевдоримановых многообразий”, *Матем. заметки*, **9**:6 (2013), 821–827; англ. пер.: A. S. Galaev, “Note on the holonomy groups of pseudo-Riemannian manifolds”, *Math. Notes*, **93**:6 (2013), 810–815.
- [70] A. S. Galaev, “On the de Rham–Wu decomposition for Riemannian and Lorentzian manifolds”, *Classical Quantum Gravity*, **31**:13 (2014), 135007, 13 pp.
- [71] A. S. Galaev, “How to find the holonomy algebra of a Lorentzian manifold”, *Lett. Math. Phys.*, **105**:2 (2015), 199–219.
- [72] A. Galaev, T. Leistner, “Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications”, *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry*, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, 53–96.
- [73] A. S. Galaev, T. Leistner, “Recent developments in pseudo-Riemannian holonomy theory”, *Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **16**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2010, 581–627.
- [74] A. S. Galaev, T. Leistner, “On the local structure of Lorentzian Einstein manifolds with parallel distribution of null lines”, *Classical Quantum Gravity*, **27**:22 (2010), 225003, 16 pp.
- [75] R. Ghanam, G. Thompson, “Two special metrics with R_{14} -type holonomy”, *Classical Quantum Gravity*, **18**:11 (2001), 2007–2014.
- [76] G. W. Gibbons, C. N. Pope, “Time-dependent multi-centre solutions from new metrics with holonomy $\text{Sim}(n-2)$ ”, *Classical Quantum Gravity*, **25**:12 (2008), 125015, 21 pp.
- [77] G. W. Gibbons, “Holonomy old and new”, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, **177** (2009), 33–41.
- [78] J. Grover, J. B. Gutowski, C. A. R. Herdeiro, P. Meessen, A. Palomo-Lozano, W. A. Sabra, “Gauduchon–Tod structures, Sim holonomy and De Sitter supergravity”, *J. High Energy Phys.*, **7** (2009), 069, 20 pp.
- [79] S. S. Gubser, “Special holonomy in string theory and M-theory”, *Strings, branes and extra dimensions*, TASI 2001, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004, 197–233.
- [80] G. Hall, “Projective relatedness and conformal flatness”, *Cent. Eur. J. Math.*, **10**:5 (2012), 1763–1770.
- [81] G. S. Hall, D. P. Lonie, “Holonomy groups and spacetimes”, *Classical Quantum Gravity*, **17**:6 (2000), 1369–1382.

- [82] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964, 533 с.; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **XII**, Academic Press, New York–London, 1962, xiv+486 pp.
- [83] N. Hitchin, “Harmonic spinors”, *Adv. in Math.*, **14**:1 (1974), 1–55.
- [84] K. Honda, K. Tsukada, “Conformally flat semi-Riemannian manifolds with nilpotent Ricci operators and affine differential geometry”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **25**:3 (2004), 253–275.
- [85] A. Ikemakhen, “Sur l’holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature $(2, 2 + n)$ ”, *Publ. Mat.*, **43**:1 (1999), 55–84.
- [86] A. Ikemakhen, “Groupes d’holonomie et spineurs parallèles sur les variétés pseudo-riemanniennes complètement réductibles”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **339**:3 (2004), 203–208.
- [87] T. Jacobson, J. D. Romano, “The spin holonomy group in general relativity”, *Comm. Math. Phys.*, **155**:2 (1993), 261–276.
- [88] D. D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, 2000, xii+436 pp.
- [89] D. Joyce, *Riemannian holonomy groups and calibrated geometry*, Oxf. Grad. Texts Math., **12**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007, x+303 pp.
- [90] В. Р. Кайгородов, “Структура кривизны пространства-времени”, Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., **14**, ВИНТИ, М., 1983, 177–204; англ. пер.: V. R. Kaigorodov, “Structure of space-time curvature”, *J. Soviet Math.*, **28**:2 (1985), 256–273.
- [91] R. P. Kerr, J. N. Goldberg, “Some applications of the infinitesimal-holonomy group to the Petrov classification of Einstein spaces”, *J. Math. Phys.*, **2**:3 (1961), 327–332.
- [92] R. P. Kerr, J. N. Goldberg, “Einstein spaces with four-parameter holonomy groups”, *J. Math. Phys.*, **2**:3 (1961), 332–336.
- [93] В. Ф. Кириченко, “Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия”, *Матем. заметки*, **51**:5 (1992), 57–66; англ. пер.: V. F. Kirichenko, “Conformally flat and locally conformal Kähler manifolds”, *Math. Notes*, **51**:5 (1992), 462–468.
- [94] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, 2, Наука, М., 1981, 344 с., 415 с.; пер. с англ.: S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, v. I, II, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1963, 1969, xi+329 pp., xv+470 pp.
- [95] T. Krantz, “Kaluza–Klein-type metrics with special Lorentzian holonomy”, *J. Geom. Phys.*, **60**:1 (2010), 74–80.
- [96] M. Kurita, “On the holonomy group of the conformally flat Riemannian manifold”, *Nagoya Math. J.*, **9** (1955), 161–171.
- [97] K. Lärz, *Riemannian foliations and the topology of Lorentzian manifolds*, 2010, 16 pp., arXiv: 1010.2194.
- [98] T. Leistner, “Lorentzian manifolds with special holonomy and parallel spinors”, Proceedings of the 21st winter school “Geometry and physics” (Srń, 2001), *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, 2002, № 69, 131–159.
- [99] T. Leistner, *Holonomy and parallel spinors in Lorentzian geometry*, PhD thesis, Humboldt-Univ., Berlin, 2003, xii+178 pp.

- [100] T. Leistner, “On the classification of Lorentzian holonomy groups”, *J. Differential Geom.*, **76**:3 (2007), 423–484.
- [101] T. Leistner, D. Schliebner, *Completeness of compact Lorentzian manifolds with special holonomy*, 2013, 30 pp., arXiv: 1306.0120.
- [102] J. Lewandowski, “Reduced holonomy group and Einstein equations with a cosmological constant”, *Classical Quantum Gravity*, **9**:10 (1992), L147–L151.
- [103] B. McInnes, “Methods of holonomy theory for Ricci-flat Riemannian manifolds”, *J. Math. Phys.*, **32**:4 (1991), 888–896.
- [104] S. Merkulov, L. Schwachhöfer, “Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections”, *Ann. of Math. (2)*, **150**:1 (1999), 77–149.
- [105] O. Müller, M. Sánchez, “An invitation to Lorentzian geometry”, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, **115**:3-4 (2014), 153–183.
- [106] J. D. Norton, “Einstein, Nordström and the early demise of scalar, Lorentz-covariant theories of gravitation”, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **45**:1 (1992), 17–94.
- [107] C. Olmos, “A geometric proof of the Berger holonomy theorem”, *Ann. of Math. (2)*, **161**:1 (2005), 579–588.
- [108] А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна*, Физматгиз, М., 1961, 463 с.; англ. пер.: A. Z. Petrov, *Einstein spaces*, Pergamon Press, Oxford–Edinburgh–New York, 1969, xiii+411 pp.
- [109] J. F. Schell, “Classification of four-dimensional Riemannian spaces”, *J. Math. Phys.*, **2**:2 (1961), 202–206.
- [110] R. Schimming, “Riemannsche Räume mit ebenfrontiger und mit ebener Symmetrie”, *Math. Nachr.*, **59**:1-6 (1974), 129–162.
- [111] L. J. Schwachhöfer, “Connections with irreducible holonomy representations”, *Adv. Math.*, **160**:1 (2001), 1–80.
- [112] J. M. M. Senovilla, “Second-order symmetric Lorentzian manifolds. I. Characterization and general results”, *Classical Quantum Gravity*, **25**:24 (2008), 245011, 25 pp.
- [113] R. Hernández, K. Sfetsos, D. Zoakos, “Supersymmetry and Lorentzian holonomy in various dimensions”, *J. High Energy Phys.*, **9** (2004), 010, 17 pp.
- [114] J. Simons, “On the transitivity of holonomy systems”, *Ann. of Math. (2)*, **76**:2 (1962), 213–234.
- [115] В. В. Славский, “Конформно плоские метрики и псевдоевклидова геометрия”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:3 (1994), 674–682; англ. пер.: V. V. Slavskii, “Conformally-flat metrics and pseudo-Euclidean geometry”, *Sib. Math. J.*, **35**:3 (1994), 605–613.
- [116] R. S. Strichartz, “Linear algebra of curvature tensors and their covariant derivatives”, *Canad. J. Math.*, **40**:5 (1988), 1105–1143.
- [117] S. Tanno, “Curvature tensors and covariant derivatives”, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **96**:1 (1973), 233–241.
- [118] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, 2-е изд., УРСС, М., 1995, 344 с.; англ. пер. 1-го изд.: A. L. Onishchik, È. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990, xx+328 pp.
- [119] В. П. Визгин, *Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование, 1900–1915)*, Наука, М., 1981, 352 с.
- [120] A. G. Walker, “On parallel fields of partially null vector spaces”, *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, **20** (1949), 135–145.

- [121] M. Y. Wang, “Parallel spinors and parallel forms”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **7**:1 (1989), 59–68.
- [122] H. Wu, “On the de Rham decomposition theorem”, *Illinois J. Math.*, **8**:2 (1964), 291–311.
- [123] S.-T. Yau, “On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation. I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:3 (1978), 339–411.

Антон Сергеевич Галаев
(Anton S. Galaev)

University of Hradec Králové, Hradec Králové,
Czech Republic

E-mail: anton.galaev@uhk.cz

Поступила в редакцию
16.07.2014