Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Е. Ю. Нетай, $CP(2)$ -
мультипликативные роды Хирцебруха и эллиптические
когомологии, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 4, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9611>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:59:04

CP(2)-мультипликативные роды Хирцебруха и эллиптические когомологии

В. М. Бухштабер, Е. Ю. Нетай

Стандартное действие тора T^3 на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P(2)$

$$((t_1, t_2, t_3), (z_1 : z_2 : z_3)) \mapsto (t_1 z_1 : t_2 z_2 : t_3 z_3)$$

имеет 3 неподвижные точки с весами $e_i - e_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, где e_i – базисные векторы в $\mathbb{R}^3$. Теорема локализации универсального торического рода [1] дает в этом случае формулу

$$\frac{1}{(u_1 \ominus u_2)(u_1 \ominus u_3)} + \frac{1}{(u_2 \ominus u_1)(u_2 \ominus u_3)} + \frac{1}{(u_3 \ominus u_1)(u_3 \ominus u_2)} = [\mathbb{C}P(2)] + \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3),$$

где $\ominus$ – закон сложения в формальной группе комплексных кобордизмов [2] с кольцом скаляров Ω_U и $\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3) \in \Omega_U[[u_1, u_2, u_3]]$, $\mathcal{L}(0, 0, 0) = 0$.

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, без кручения и делителей нуля, а $L_f: \Omega_U \rightarrow R$ – род Хирцебруха, задаваемый рядом $f(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, $f_k \in R$.

ТЕОРЕМА 1. *Род L_f является жестким на $\mathbb{C}P(2)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ является решением функционального уравнения*

$$\frac{1}{f(t_1 - t_2)f(t_1 - t_3)} + \frac{1}{f(t_2 - t_1)f(t_2 - t_3)} + \frac{1}{f(t_3 - t_1)f(t_3 - t_2)} = C, \quad C \in R. \quad (1)$$

Род Хирцебруха $L_f: \Omega_U \rightarrow R$ называют $\mathbb{C}P(2)$ -мультипликативным, если $L_f[M] = L_f[\mathbb{C}P(2)]L_f[B]$ для любого расслоения стабильно комплексных многообразий $M \rightarrow B$ со слоем $\mathbb{C}P(2)$ и структурной группой G такой, что $U^*(BG)$ не имеет кручения. Согласно [1], род является $\mathbb{C}P(2)$ -мультипликативным тогда и только тогда, когда он является жестким на $\mathbb{C}P(2)$.

В [3] с помощью уравнения (1) было показано, что для расслоений *ориентированных* многообразий универсальный $\mathbb{C}P(2)$ -мультипликативный род задается сигнатурой многообразия. В [4] род Хирцебруха L_f , задаваемый эллиптическим синусом sn , был введен как род, удовлетворяющий условию $\mathbb{C}P(2n+1)$ -мультипликативности для расслоений *ориентированных* многообразий. Имеем $C = L_f[\mathbb{C}P(2)] = (3f_1^2 - f_2)/2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Специальным $\mathbb{C}P(2)$ -мультипликативным родом будем называть $\mathbb{C}P(2)$ -мультипликативный род L_f такой, что $L_f[\mathbb{C}P(2)] = 0$.*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть L_f – $\mathbb{C}P(2)$ -мультипликативный род.*

Если $L_f[\mathbb{C}P(2)] \neq 0$, то L_f – двухпараметрический род Тодда и

$$f(x) = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x}}, \quad f_1 = -(\alpha + \beta), \quad f_2 = 2\alpha\beta + f_1^2, \quad f_3 = 4f_1f_2 - 3f_1^3.$$

Если $L_f[\mathbb{C}P(2)] = 0$, т.е. L_f – специальный $\mathbb{C}P(2)$ -мультипликативный род, то он является общим эллиптическим родом в терминологии [5] и

$$f(x) = -\frac{2\wp(x) + a^2/2}{\wp'(x) - a\wp(x) + b - a^3/4}. \quad (2)$$

Здесь $\wp$ и $\wp'$ – функции Вейерштрасса эллиптической кривой с параметрами $g_2 = -(8b - 3a^3)a/4$, $g_3 = (8b^2 - 12a^3b + 3a^6)/24$ и дискриминантом $\Delta = -b^3(3b - a^3)$. Параметры a и b связаны с коэффициентами ряда $f(x)$ соотношениями $f_1 = -a$, $f_2 = 3a^2$, $f_3 = 12b - 9a^3$.

Род, задаваемый рядом (2), был описан в работе [6], согласно которой имеем:

ТЕОРЕМА 4. Специальный $\mathbb{CP}(2)$ -мультипликативный род является родом Кричевера [7], и (2) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{\sigma(x)\sigma(\tau)}{\sigma(x+\tau)} \exp\left(-\frac{a}{2}x + \zeta(\tau)x\right).$$

Здесь σ и ζ – функции Вейерштрасса эллиптической кривой с параметрами $\hat{g}_2 = 3(24b + a^3)a/4$, $\hat{g}_3 = -(72b^2 + 60a^3b - a^6)/8$ и дискриминантом $\hat{\Delta} = -81b(3b - a^3)^3$. Параметр τ задается соотношениями $\wp(\tau, \hat{g}_2, \hat{g}_3) = 3a^2/4$, $\wp'(\tau, \hat{g}_2, \hat{g}_3) = 3b - a^3$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Каждый $\mathbb{CP}(2)$ -мультипликативный род является жестким на многообразиях с S^1 -эquivариантной SU -структурой.

ЛЕММА 6. Из (1) при $C = 0$ следует, что ряд (2) удовлетворяет уравнению $f(x)^3 + f(-x)^3 = -3af(x)^2f(-x)^2 - (3b - a^3)f(x)^3f(-x)^3$. Положив $mf(x) = Z/X$, $mf(-x) = Z/Y$, где $dm = -a$, $m^3 = 3b - a^3$, получим кривую Хессе (Hessian curve) $X^3 + Y^3 + Z^3 = 3dXYZ$, $(X : Y : Z) \in \mathbb{CP}(2)$.

ТЕОРЕМА 7. Специальный $\mathbb{CP}(2)$ -мультипликативный род задается экспонентой формальной группы

$$F(u, v) = \frac{1}{h(u)h(v)} \left(\frac{u^2h(u) - v^2h(v)}{uh(v) - vh(u)} - (3b - a^3)u^2v^2 \right), \quad (3)$$

где $h(u)$ – решение уравнения $(h(u) - 3au)h(u)^2 = (1 + (3b - a^3)u^3)^2$ с $h(0) = 1$.

Отметим, что $h(u) = 2au + 1/g'(u)$, где $g(u)$ – логарифм формальной группы (3).

Из [6] получаем, что закон (3) определен над кольцом $\mathbb{Z}[a, b, c]/\{b^2 = 3c\}$.

В [8] дано общее аналитическое решение функционального уравнения, частным случаем которого является (3). Пусть $\mathbb{Z}_{(p)}$ – кольцо целых p -адических чисел.

СЛЕДСТВИЕ 8. Если $b = 0$, то $h(u) = 1 + au + a^2u^2$ и, следовательно, $g(u) \in \mathbb{Z}_{(3)}[a][[u]]$. В этом случае $U^*(X) \otimes_{L_f} \mathbb{Z}_{(3)}[a] = H^*(X; \mathbb{Z}_{(3)}[a])$.

СЛЕДСТВИЕ 9. Имеем $F(u, u) = 2u - au^2 + 2a^2u^3 + (7b - a^3)u^4 + \dots$.

Используя теорему Ландвебера о точности функтора [9] и теорему Рудяка о реализации [10], из следствия 9 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 10. Специальный $\mathbb{CP}(2)$ -мультипликативный род L_f порождает теорию эллиптических когомологий $U^*(X) \otimes_{L_f} \mathbb{Z}_{(2)}[a, b]$, где $|a| = -2$, $|b| = -6$.

Список литературы

- [1] V. M. Buchstaber, T. Panov, N. Ray, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **16** (2010), 3207–3262.
 [2] С. П. Новиков, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:4 (1967), 855–951. [3] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, *Manifolds and modular forms*, Aspects Math., **E20**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992, xii+211 pp. [4] S. Ochanine, *Topology*, **26**:2 (1987), 143–151. [5] В. М. Бухштабер, *УМН*, **65**:5(395) (2010), 187–188. [6] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, *Функц. анализ и его прил.*, **45**:2 (2011), 23–44. [7] И. М. Кричевер, *Матем. заметки*, **47**:2 (1990), 34–45. [8] H. W. Braden, V. M. Buchstaber, *SIAM J. Math. Anal.*, **28**:4 (1997), 903–923. [9] P. S. Landweber, *Amer. J. Math.*, **98**:3 (1976), 591–610. [10] Ю. Б. Рудяк, *Матем. заметки*, **40**:1 (1986), 115–126.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
 Институт проблем передачи информации
 им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Представлено С. П. Новиковым
 Принято редколлегией
 24.07.2014

Е. Ю. Нетай (E. Yu. Netay)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bunkova@mi.ras.ru