Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Яськов, Об асимптотическом постоянстве элементов диагонали ортогонального случайного проектора, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 4, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 04:36:01

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Об асимптотическом постоянстве элементов
диагонали ортогонального случайного проектора

П. А. Яськов

1. В данной заметке приводятся слабые ограничения, при которых подавляющее большинство элементов диагонали ортогонального случайного проектора в $\mathbb{R}^n$ близки к p/n , где p – ранг проектора. Данное условие играет важную роль в задаче линейной регрессии со многими инструментальными переменными в случае, когда их число p сравнимо с размером выборки n . Если это условие выполнено, то (см. [1], [2]) оценка максимального правдоподобия с ограниченной информацией является асимптотически эффективной в широком классе оценок регрессионных коэффициентов. В [1] и [3] ставится вопрос о том, когда оно имеет место на практике. Частичный ответ на этот вопрос дан в настоящей заметке.

2. Пусть X_{np} – невырожденная случайная $(n \times p)$ -матрица, строки $\{x_{ip}^\top\}_{i=1}^n$ которой суть независимые копии некоторой случайной вектор-строки $x_p^\top \in \mathbb{E} x_p x_p^\top = I_p$, где $n > p \geq 1$, I_p – единичная $(p \times p)$ -матрица. Пусть также $P_{np} = X_{np} (X_{np}^\top X_{np})^{-1} X_{np}^\top$ – ортогональный проектор, отвечающий X_{np} . Введем следующие условия:

(A1) $p, n \rightarrow \infty$ и $p/n \rightarrow \alpha \in (0, 1)$;

(A2) для любой последовательности симметричных неотрицательно определенных $(p \times p)$ -матриц A_p , $p = 1, 2, \dots$, с равномерно ограниченными собственными числами имеет место сходимость

$$p^{-1}(x_p^\top A_p x_p - \text{tr } A_p) \rightarrow 0 \quad \text{по вероятности при } p \rightarrow \infty;$$

(A3) $P(\lambda_{\min}(X_{np}^\top X_{np}) > Cp) \rightarrow 1$ для некоторой константы $C > 0$, где $\lambda_{\min}(A)$ – минимальное собственное число (симметричной) матрицы A .

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия (A1)–(A3). Тогда среднее число диагональных элементов проектора P_{np} , отличающихся от α больше чем на ε , стремится по вероятности к нулю для любого $\varepsilon > 0$.

Поскольку $\mathbb{E} x_p^\top A_p x_p = \text{tr } A_p$, то условие (A2) есть вариант слабого закона больших чисел для квадратичных форм $x_p^\top A_p x_p$. Заключение теоремы, вообще говоря, неверно, если (A2) не выполнено. В этом можно убедиться, положив $x_p = \xi_p z_p$, где z_p – стандартный гауссовский вектор в $\mathbb{R}^p$, $P(\xi_p = 0) = P(\xi_p = \sqrt{2}) = 1/2$ и ξ_p не зависит от z_p .

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 14-21-00162).

DOI: 10.4213/rm9612

Условие (A3) является техническим. Оно позволяет контролировать матрицу $(X_{np}^\top X_{np})^{-1}$ при анализе диагональных элементов $x_{ip}^\top (X_{np}^\top X_{np})^{-1} x_{ip}$ проектора P_{np} , $i = 1, \dots, n$. Согласно [4] условие (A3) будет выполнено, если наряду с (A2) будет иметь место равномерная интегрируемость семейства величин $\mathcal{S} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \{x_p^\top a_p, a_p \in \mathbb{R}^p, a_p^\top a_p = 1\}$.

Приведем теперь конкретный широкий класс случайных векторов $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (A2) и (A3).

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система центрированных случайных величин, для которой найдется такая убывающая последовательность положительных чисел $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sum_{k=1}^{\infty} k\varphi_k < \infty$ и

$$|\text{cov}(\varepsilon_i^2, \varepsilon_j^2)| \leq \varphi_{j-i}, \quad |\mathbb{E}\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_l| \leq \min\{\varphi_{j-i}, \varphi_{k-j}, \varphi_{l-k}\} \quad \text{при всех } i < j < k < l.$$

Обозначим через $\mathcal{X}$ замыкание линейной оболочки величин $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ в L_2 .

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть ξ – случайный вектор произвольной размерности d с компонентами из $\mathcal{X}$ и $\mathbb{E}\xi\xi^\top = I_d$. Тогда найдутся такие $K, C > 0$ (зависящие только от $\mathcal{X}$), что $\mathbb{E}|\xi^\top a|^4 \leq K|a^\top a|^2$ и $\mathbb{E}|\xi^\top A\xi - \text{tr } A|^2 \leq C \text{tr } A^2$ для всех $a \in \mathbb{R}^d$ и всех неотрицательно определенных симметричных $(d \times d)$ -матриц A .

Последнее утверждение устанавливается с помощью теоремы 3а из [5].

С помощью данного утверждения легко доказать, что любая система векторов $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ с компонентами из $\mathcal{X}$ удовлетворяет (A2), (A3). Действительно, чтобы получить (A2), достаточно применить неравенство Чебышёва. При этом для вывода (A3) надо лишь установить равномерную интегрируемость семейства $\mathcal{S}$ (см. замечание выше), которая легко получается с помощью классических критериев.

Список литературы

- [1] N. Kunitomo, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **64**:5 (2012), 881–910. [2] T.W. Anderson, N. Kunitomo, Y. Matsushita, *J. Econometrics*, **157**:2 (2010), 191–204. [3] S.A. Anatolyev, *J. Econometrics*, **170**:2 (2012), 368–382. [4] П. А. Яськов, *УМН*, **68**:3(411) (2013), 187–188; англ. пер.: P. A. Yaskov, *Russian Math. Surveys*, **68**:3 (2013), 569–570. [5] В. Ф. Гапошкин, *Матем. сб.*, **89**(131):3(11) (1972), 355–365; англ. пер.: V. F. Gaposhkin, *Math. USSR-Sb.*, **18**:3 (1972), 361–372.

Павел Андреевич Яськов
(Pavel A. Yaskov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: yaskov@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Трещёвым
Принято редколлегией
20.07.2014