Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Коробков, К. Пилецкас, В. В. Пухначёв, Р. Руссо,
Задача протекания для уравнений Навье–Стокса, *УМН*,
2014, том 69, выпуск 6, 115–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:30:31

УДК 517.59

Задача протекания для уравнений Навье–Стокса**М. В. Коробков, К. Пилецкас, В. В. Пухначёв, Р. Руссо**

Статья представляет обзор результатов по проблеме Ж. Лерэ (1933) для уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости в области с многосвязной границей. На границе области задаются неоднородные краевые условия, удовлетворяющие необходимому требованию нулевого суммарного расхода. Авторами доказано, что эта задача имеет решение для произвольных ограниченных плоских или осесимметричных областей. Доказательство использует закон Бернулли для слабых решений уравнений Эйлера и обобщение теоремы Морса–Сарда для функций из пространств Соболева. В статье также приводятся новые априорные оценки интеграла Дирихле вектора скорости для симметричных течений и оценки регулярной составляющей скорости для течений с особенностями типа источников или стоков.

Библиография: 60 названий.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса и Эйлера, многосвязная граница, интеграл Дирихле, виртуальная дрена, закон Бернулли, принцип максимума.

DOI: 10.4213/gm9616

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	116
2. Исторический обзор.....	120
2.1. Лемма Хопфа.....	120
2.2. Метод доказательства априорной оценки от противного.....	124
2.3. Плоские симметричные решения задачи протекания.....	126
2.4. Локальные результаты.....	133
2.5. Течения, близкие к потенциальным.....	135
2.6. Задача протекания для кругового кольца.....	137
2.7. Осесимметричные задачи.....	138

Исследование М. В. Коробкова выполнено при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00768-а) и гранта Президента РФ для поддержки молодых докторов наук (грант № МД-5146.2013.1). Исследование К. Пилецкаса выполнено при поддержке программы “Lithuanian-Swiss cooperation programme” (грант № CH-ŠMM-01/01). Исследование В. В. Пухначёва выполнено при поддержке Сибирского отделения РАН (грант № 38 Программы совместных интеграционных проектов СО РАН, УрО РАН, ДВО РАН).

3. Теорема существования для общего плоского случая	144
3.1. Вспомогательные результаты	144
3.2. Аргумент Ж. Лерэ “от противного”	146
3.3. Получение противоречия	149
4. Осесимметричный случай	155
4.1. Некоторые результаты об уравнениях Эйлера	158
4.2. Получение противоречия	159
5. Дополнение к разделам 3 и 4	160
6. Решения с особенностями в области течения	162
6.1. Плоские течения	162
6.2. Осесимметричные течения	167
7. Заключение	170
Список литературы	172

1. Введение

В статье рассматриваются краевые задачи в областях с многосвязной границей для уравнений Навье–Стокса. Уравнения Навье–Стокса – это основная математическая модель гидродинамики. В случае стационарного течения несжимаемой жидкости эти уравнения имеют вид

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{u}(x)$ – вектор скорости, $p(x)$ – отношение давления к постоянной плотности жидкости, $\mathbf{f}$ – ускорение внешних массовых сил, $\nu = \operatorname{const} > 0$ – кинематический коэффициент вязкости, Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$). На ее границе $\partial\Omega$ задается краевое условие

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.3)$$

Предположим, что граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из $N + 1$ связной компоненты Γ_i :

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_N$$

и $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$. При этом поверхность (кривая) Γ_0 ограничивает область Ω извне, а остальные связные компоненты ее границы, Γ_i , $i = 1, \dots, N$, заключены внутри этой поверхности, т. е.

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \overline{\Omega}_i \right), \quad \overline{\Omega}_i \subset \Omega_0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

где $\Gamma_i = \partial\Omega_i$ (см. рис. 1). Вследствие уравнения неразрывности (1.2), функция $\mathbf{a}$ должна удовлетворять условию

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.5)$$

Рис. 1. Область Ω

(здесь $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$), выражающему равенство нулю потока несжимаемой жидкости через границу области течения. Если граница области Ω связная (т. е. $N = 0$) и выполнены некоторые условия гладкости, разрешимость задачи (1.1)–(1.3) была доказана в 1933 г. в знаменитой работе Ж. Лерэ [1]. Этот результат верен и в случае, когда равны нулю потоки вектора скорости F_i через все связные компоненты границы Γ_i :

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \equiv F_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (1.6)$$

(Данное условие означает отсутствие источников и стоков в области течения.)

Вопрос о том, является ли необходимое условие $\sum_{i=1}^N F_i = 0$ (см. (1.5)) достаточным для разрешимости задачи (1.1)–(1.3), оставался открытым. Нас интересует случай, когда условие (1.6) не выполнено. В этом случае будем называть задачу (1.1)–(1.3) стационарной задачей протекания для уравнений Навье–Стокса. Ее также называют **проблемой Лерэ**, поскольку фактически она появилась в упомянутой его работе [1].

Уравнения Навье–Стокса издавна привлекали внимание математиков. Достаточно вспомнить, что результат Лерэ о разрешимости задачи (1.1)–(1.3), (1.6) явился первым приложением топологического принципа неподвижной точки Лерэ–Шаудера к конкретной задаче механики. Метод согласования асимптотических разложений возник в процессе анализа Л. Прандтлем задачи обтекания для системы (1.1) при $\nu \rightarrow 0$. Расширение понятия эллиптичности системы дифференциальных уравнений произошло при исследовании А. Дуглисом и Л. Ниренбергом линеаризованной версии системы (1.1).

Рассмотрим теперь нестационарный аналог задачи (1.1)–(1.3). Здесь требуется найти решение $\mathbf{u}(x, t)$, $p(x, t)$ системы

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (1.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (1.8)$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (1.9)$$

и начальному условию

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0. \quad (1.10)$$

Обобщенное решение задачи (1.7)–(1.10) удовлетворяет энергетическому тождеству, из которого следует ограниченность $L^2(\Omega)$ -нормы функции $\mathbf{u}(x, t)$ при почти всех $t \in (0, T)$. При этом не накладывается никаких ограничений на величину частичных расходов через связанные компоненты Γ_i границы области Ω . С помощью методики, изложенной в монографии О. А. Ладыженской [2], эта оценка усиливается. В конечном счете, это приводит к доказательству однозначной разрешимости двумерной задачи при любом $T > 0$. Что касается трехмерной задачи, то здесь однозначная разрешимость задачи (1.7)–(1.10) в подходящем классе обобщенных решений установлена лишь на конечном интервале времени, длина которого стремится к нулю при возрастании нормы функции $\mathbf{u}_0$. Э. Хопф [3] доказал существование слабого обобщенного решения трехмерной задачи на любом конечном интервале времени. Доказательство гладкости (а следовательно, и единственности) решения Хопфа составляет одну из семи проблем Миллениума. Безусловно, данная проблема является центральной проблемой математической гидродинамики. Однако включение ее в упомянутый список привело к тому, что остальные задачи, связанные с уравнениями Навье–Стокса, отошли на второй план. Между тем, в этой тематике имеется много других интересных и актуальных проблем; ряд таких проблем сформулирован в статье В. И. Юдовича [4]. В их число вошла и стационарная задача протекания (1.1)–(1.3).

Предположим, что граница $\partial\Omega$ области Ω является липшицевой и что функция $\mathbf{a}$, входящая в условие (1.3), принадлежит классу $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$. Если граничное векторное поле $\mathbf{a}$ удовлетворяет условию (1.5), то существует его соленоидальное продолжение $\mathbf{A}$ в область Ω такое, что $\mathbf{A} \in W^{1,2}(\Omega)$ и

$$\|\mathbf{A}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \|\mathbf{a}\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \quad (1.11)$$

(см. [5]; здесь и далее через c обозначаются положительные постоянные). Обозначим через $H(\Omega)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания множества соленоидальных вектор-функций $\boldsymbol{\eta} \in C_0^\infty(\Omega)$ в метрике скалярного произведения

$$[\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}] = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx, \quad \text{где} \quad \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}.$$

Векторное поле $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ назовем обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3), если выполнены следующие условия:

(а) существует соленоидальная вектор-функция $\mathbf{A} \in W^{1,2}(\Omega)$ такая, что $\mathbf{A}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{u} - \mathbf{A} = \mathbf{w} \in H(\Omega)$;

(б) $\mathbf{w}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx - \int_{\Omega} ((\mathbf{w} + \mathbf{A}) \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{w} \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A} \, dx \\ & = -\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{A} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Интегральное тождество (1.12) эквивалентно операторному уравнению в гильбертовом пространстве $H(\Omega)$:

$$\mathbf{w} = T\mathbf{w}, \quad (1.13)$$

где оператор T определяется равенством

$$\begin{aligned} [T\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}] = & \nu^{-1} \int_{\Omega} ((\mathbf{w} + \mathbf{A}) \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{w} \, dx + \nu^{-1} \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A} \, dx \\ & - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{A} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx + \nu^{-1} \int_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A} \, dx + \nu^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \quad \forall \mathbf{w}, \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega). \end{aligned}$$

Оператор T является вполне непрерывным, и поэтому для доказательства разрешимости уравнения (1.13) можно применить теорему Лерэ–Шаудера о неподвижной точке [2]. Для этого достаточно установить, что все решения уравнения

$$\mathbf{w}^{(\lambda)} = \lambda T\mathbf{w}^{(\lambda)}, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (1.14)$$

ограничены по норме пространства $H(\Omega)$ или, иными словами, имеют ограниченный интеграл Дирихле

$$I = [\mathbf{w}, \mathbf{w}] \equiv \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dx. \quad (1.15)$$

В пионерской работе [1] Ж. Лерэ доказал ограниченность интеграла Дирихле для всех возможных решений задачи (1.1)–(1.3) с дополнительным условием (1.6). Доказательство Лерэ основано на рассуждении от противного и не содержит априорной оценки интеграла Дирихле (1.15) в терминах данных задачи. При выполнении дополнительного условия (1.6) такая оценка была получена впервые в 1941 г. в работе Э. Хопфа [6]. Обе указанные работы стимулировали дальнейшие исследования задачи протекания.

Конструкция Хопфа использовалась также для замены жесткого условия (1.6) на условие малости потоков F_i [7]–[13]. Элементы этой конструкции в сочетании с понятием виртуальной дрены, введенным в [10], [14], легли в основу доказательства разрешимости двумерных задач протекания при дополнительных условиях симметрии области течения и граничного векторного поля $\mathbf{a}$ (см. [14]–[16]). Этим работам предшествовала работа Ч. Дж. Эмика [17], в которой существование решения плоской симметричной задачи протекания доказано рассуждением от противного. В работах [14]–[16] доказательство основано на априорных оценках интеграла Дирихле вектора скорости. Будучи важными сами по себе, эти оценки необходимы для обоснования численных методов решения задачи протекания, таких как конечно-разностные методы и метод Галёркина.

Схема рассуждений Лерэ, обогащенная новыми методами теории функций и теории эллиптических уравнений, привела к решению проблемы Лерэ в плоском и осесимметричном случае, т. е. к доказательству разрешимости плоской и осесимметричной задачи протекания при любых значениях потоков вектора скорости через связанные компоненты границы области течения [18]–[24]. Важно

отметить, что при этом не накладывается никаких ограничений на топологию области течения. Результаты работ [18]–[24] занимают центральное место в данной статье. Основной результат, доказанный для плоского случая в статье трех соавторов [22], содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является ограниченной областью с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$. Если $\mathbf{f} \in W^{1,2}(\Omega)$ и граничные значения $\mathbf{a} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)$ удовлетворяют условию (1.5), то задача (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно обобщенное решение $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Хорошо известно (см., например, [2]), что в предположениях теоремы 1.1 каждое слабое решение $\mathbf{u}$ задачи (1.1)–(1.3) обладает повышенной регулярностью, т.е. $\mathbf{u} \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{3,2}(\Omega)$. Именно, решение регулярно в той мере, в какой позволяют данные задачи, в частности, $\mathbf{u}$ является C^∞ -гладким, если $\mathbf{f}$, $\mathbf{a}$ и $\partial\Omega$ принадлежат классу гладкости C^∞ .

Доказательство теоремы существования основано на априорных оценках, которые получаются применением аргумента *reductio ad absurdum*, предложенного еще в работе Ж. Лерэ [1]. Существенно новой частью в применении этого аргумента является использование закона Бернулли для соболевских решений уравнений Эйлера, полученного в работе [18] (подробное доказательство представлено в работе [19]). Результаты, касающиеся закона Бернулли, базируются на недавней версии теоремы Морса–Сарда, полученной в совместной работе Ж. Бургейна, М.В. Коробкова и Я. Кристенсена [25]. Из этой теоремы вытекает, в частности, что почти все множества уровня функции $\psi \in W^{2,1}(\Omega)$ суть объединение конечного семейства C^1 -гладких кривых. Это позволяет построить подходящую подобласть (ограниченную гладкими линиями тока) и получить оценку L^2 -нормы градиента полного давления. При этом используются некоторые идеи, близкие (на эвристическом уровне) к принципу максимума Хопфа для решений эллиптических систем дифференциальных уравнений с частными производными (более детальное объяснение см. в п. 3.3.1). В конце концов искомое противоречие получается применением формулы коплощади.

Помимо основной задачи (1.1)–(1.3) в данной работе изучаются ее сингулярные аналоги: осесимметричная задача с источниками или стоками, распределенными на оси симметрии, и плоская задача при наличии источника или стока в области течения. Кроме того, рассмотрена осесимметричная задача протекания в переменных “функция тока–завихренность” в области типа сферического слоя. Статья заканчивается перечислением возможных обобщений полученных результатов и формулировкой нерешенных вопросов.

2. Исторический обзор

2.1. Лемма Хопфа. Задаче протекания для уравнений Навье–Стокса посвящено более ста работ, выполненных учеными из одиннадцати стран. Мы начнем этот обзор с изложения результатов работы Э. Хопфа [6], в которой получена оценка интеграла Дирихле для обобщенных решений задачи (1.1)–(1.3), (1.6).

Полагая в тождестве (1.12) $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}$ и используя равенства

$$\int_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \, dx = 0, \quad \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in H(\Omega),$$

мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} \, dx - \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{w} \, dx. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При получении априорной оценки решения основную трудность составляет оценка первого интеграла в правой части тождества (2.1). Если выполнено условие (1.6), то эту оценку можно получить при помощи леммы Хопфа.

ЛЕММА 2.1 (Э. Хопф). *Предположим, что граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу Липшица и что заданное на границе векторное поле $\mathbf{a}$ принадлежит классу $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$. Если выполнено условие (1.6), то для любого $\varepsilon > 0$ существует соленоидальное продолжение $\mathbf{A}(\cdot, \varepsilon) \in W^{1,2}(\Omega)$ граничного поля $\mathbf{a}$ в область Ω такое, что*

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} \, dx \right| \leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{w} \in H(\Omega). \quad (2.2)$$

Доказательство этой леммы состоит из двух этапов. Сначала строится продолжение граничного поля $\mathbf{a}$ в виде $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{D}$, $\mathbf{D} \in W^{2,2}(\Omega)$, а затем это продолжение подправляется с помощью срезающей функции Хопфа $\zeta(x, \varepsilon)$, зависящей от параметра $\varepsilon > 0$, так, что $\mathbf{A} = \text{rot}(\zeta(x, \varepsilon)\mathbf{D}(x))$ [6]. Функция ζ имеет следующие свойства: $\zeta = 1$, $x \in \Gamma_i$, $i = 1, \dots, N$; ее носитель сосредоточен в малой окрестности поверхности $\partial\Omega$; она быстро убывает при удалении от этой поверхности; справедливо неравенство

$$|\nabla \zeta(x, \varepsilon)| \leq \frac{c\varepsilon}{d(x)},$$

где $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ и постоянная c не зависит от ε . Подробное доказательство леммы Хопфа при наличии представления $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{D}$, $\mathbf{B}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ удовлетворяет условию (1.6), изложено в монографии О. А. Ладыженской [2]. Эффективное построение векторного поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{D}$ в случае гладких поверхностей Γ_i предложено Х. Фуджита [7] и Р. Финном [8]. Продолжение граничного поля $\mathbf{a}$ внутрь области Ω в виде ротора возможно лишь в случае, когда все потоки поля $\mathbf{a}$ через связные компоненты границы Γ_i равны нулю, т. е. когда выполнено условие (1.6).

Для плоских и осесимметричных течений необходимое представление поля $\mathbf{B}$ легко получить в терминах функции тока. Для плоского течения функция тока $\psi(x_1, x_2)$ соленоидального векторного поля $\mathbf{B}$ определяется соотношениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = B_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -B_2.$$

Если условие (1.6) выполнено, то функцию ψ можно построить как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\psi &= 0, & x &\in \Omega; \\ \psi &= \int_0^s \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS, & \frac{\partial\psi}{\partial n} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{s}, & x &\in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь s и 0 – текущая и фиксированная точки на кривой Γ_i , $\mathbf{s}$ – единичный вектор касательной к этой кривой. Однозначность определения решения этой задачи обеспечена условием (1.6).

Возьмем гладкую функцию $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $0 \leq \gamma(t) \leq 1$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 1, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

и положим

$$\zeta(x, \delta) = \gamma\left(\delta \ln \frac{\rho}{\Delta(x)}\right), \quad (2.4)$$

где $\rho > 0$ – достаточно малое число, а $\Delta(x)$ – обобщенное расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы области $\partial\Omega$. Напомним, что $\Delta(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция для $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$, имеющая следующие свойства:

$$a_1 d(x) \leq \Delta(x) \leq a_2 d(x), \quad |D^\alpha \Delta(x)| \leq a_3(\alpha) d^{1-|\alpha|}(x) \quad (2.5)$$

(см. [26]). Легко видеть, что ζ бесконечно дифференцируема, $\zeta(x, \delta)|_{\partial\Omega} = 1$, ζ равна нулю вне малой окрестности границы:

$$\zeta(x, \delta) = \begin{cases} 1, & \Delta(x) \leq e^{-1/\delta} \rho, \\ 0, & \Delta(x) \geq \rho, \end{cases}$$

и имеет место оценка

$$|\nabla \zeta(x, \delta)| \leq \frac{c\delta}{d(x)} \quad (2.6)$$

с постоянной c , не зависящей от ε .

Положим $\mathbf{A}(x, \delta) = \text{rot}(\zeta(x, \delta)\mathbf{D}(x))$. Очевидно, что $\mathbf{A} \in W^{1,2}(\Omega)$,

$$\text{div } \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}, \quad \text{supp } \mathbf{A} \subset \{x \in \Omega: \Delta(x) \leq \rho\},$$

$$\mathbf{A}(x, \delta) = \nabla \zeta(x, \delta) \times \mathbf{D}(x) + \zeta(x, \delta) \text{rot } \mathbf{D}(x) =: \mathbf{A}_1(x, \delta) + \mathbf{A}_2(x, \delta)$$

и

$$|\mathbf{A}_1(x, \delta)| \leq \frac{c\delta}{d(x)}, \quad |\mathbf{A}_2(x, \delta)| \leq |\text{rot } \mathbf{D}(x)|. \quad (2.7)$$

Теперь интеграл $\int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} \cdot \mathbf{A} \, dx$ может быть оценен следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} \cdot \mathbf{A} \, dx &\leq \left(\int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 |\mathbf{A}|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \left(\int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 |\mathbf{A}_1|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\mathbf{w}|^2 |\mathbf{A}_2|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq c \left(\delta^2 \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{w}(x)|^2}{d^2(x)} \, dx + \int_{\{x \in \Omega: \Delta(x) \leq \rho\}} |\mathbf{w}|^2 |\operatorname{rot} \mathbf{D}|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если граница области липшицева, то, используя неравенство Харди, можно доказать оценку (см. [2])

$$\int_{\Omega} \frac{|\mathbf{w}(x)|^2}{d^2(x)} \, dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}(x)|^2 \, dx.$$

Кроме того, в силу теорем вложения и неравенства Фридрихса,

$$\begin{aligned} &\int_{\{x \in \Omega: \Delta(x) \leq \rho\}} |\mathbf{w}|^2 |\operatorname{rot} \mathbf{D}|^2 \, dx \\ &\leq \left(\int_{\{x \in \Omega: \Delta(x) \leq \rho\}} |\mathbf{w}|^4 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\{x \in \Omega: \Delta(x) \leq \rho\}} |\operatorname{rot} \mathbf{D}|^4 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 \, dx \right) \|\mathbf{D}\|_{W^{2,2}(\{x: \Delta(x) \leq \rho\})}^2. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство (2.8) можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \, dx \leq c (\delta^2 + \|\mathbf{D}\|_{W^{2,2}(\{x: \Delta(x) \leq \rho\})}^2)^{1/2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 \, dx. \quad (2.9)$$

Для любого $\varepsilon > 0$, выбирая $\delta = \varepsilon/(2c)$ и достаточно малое $\rho > 0$ такое, что

$$\|\mathbf{D}\|_{W_2^2(\{x: \Delta(x) \leq \rho\})} \leq \frac{\varepsilon}{2c},$$

из (2.9) выводим неравенство Хопфа (2.2).

Имея в своем распоряжении векторное поле $\mathbf{A}(\cdot, \varepsilon) \in W^{1,2}(\Omega)$ такое, что $\mathbf{A}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$ и выполнено неравенство (2.2) с $\varepsilon = \nu/2$, мы получаем из (2.1) априорную оценку

$$\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c (\|\nabla \mathbf{A}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{A}\|_{L^4(\Omega)}^2), \quad (2.10)$$

гарантирующую разрешимость задачи (1.1)–(1.3), (1.6).

Оказывается, что достаточное условие (1.6) для существования соленоидального продолжения $\mathbf{A}(x, \varepsilon)$ граничного поля $\mathbf{a}$, для которого неравенство (2.2) выполнено с любым $\varepsilon > 0$, является и необходимым. Первый контрпример, доказывающий этот факт, был построен в 1993 г. А. Такешита [27]. Приведем упрощенный вариант построения Такешита, изложенный в монографии

Дж.П. Галди [28]. Пусть область Ω является кольцом: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2: R_1 < |x| < R_2\}$. Предположим, что

$$F = \int_{S_{R_2}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_{R_1}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS < 0. \quad (2.11)$$

Представив вектор $\mathbf{A}$ в полярных координатах (r, θ) и используя соленоидальность $\mathbf{A}$:

$$\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = 0,$$

из (2.11) выводим равенство

$$r \int_0^{2\pi} A_r(r, \theta, \varepsilon) d\theta = F \quad \forall r \in (R_1, R_2).$$

Возьмем векторное поле $\mathbf{w} = u(r)\mathbf{e}_\theta$, где $u \in C_0^\infty[R_1, R_2]$. Очевидно, что $\mathbf{w} \in H(\Omega)$ и для таких $\mathbf{w}$ верно соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} dx &= - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} \right) u^2(r) dx = -F \int_{R_1}^{R_2} \frac{u^2(r)}{r} dr. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Если выполнено неравенство (2.2), то (2.12) дает

$$-F \int_{R_1}^R \frac{u^2(r)}{r} dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx$$

для любого $\varepsilon > 0$. Очевидно, что это неравенство невозможно, если $F < 0$.

Более общие контрпримеры были построены позже в работах Р. Фарвига, Х. Козоно, Т. Янагисава [29] и Дж. Г. Хейвуда [30]. В частности, Хейвуд нашел контрпример, верный и для $F > 0$.

2.2. Метод доказательства априорной оценки от противного. Если условие (1.6) не выполнено, т. е. потоки F_i отличны от нуля¹, предыдущий метод не работает. Однако в этом случае можно попробовать доказать нужную априорную оценку, рассуждая от противного. Эта идея впервые была предложена Ж. Лерэ [1] и впоследствии использовалась и модифицировалась многими авторами (см., например, [2], [31]–[33], [17], [19]).

Пусть $\mathbf{A} \in W^{1,2}(\Omega)$ – произвольное продолжение граничного поля $\mathbf{a}$. Нам нужно доказать, что нормы решений $\mathbf{w}^{(\lambda)}$ операторного уравнения (1.14) ограничены постоянной, не зависящей от $\lambda \in [0, 1]$. Предположим, что это не так.

¹В силу необходимого условия (1.5) суммарный поток равен нулю:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=0}^N F_i = 0.$$

Тогда существуют последовательности $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ и $\{\mathbf{w}_k = \mathbf{w}^{(\lambda_k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \in H(\Omega)$ такие, что

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}_k \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx - \lambda_k \int_{\Omega} ((\mathbf{w}_k + \mathbf{A}) \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{w}_k \, dx - \lambda_k \int_{\Omega} (\mathbf{w}_k \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A} \, dx \\ & = -\lambda_k \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{A} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx + \lambda_k \int_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A} \, dx + \lambda_k \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega) \end{aligned} \quad (2.13)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_0 \in [0, 1], \quad \lim_{k \rightarrow \infty} J_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}_k\|_{H(\Omega)} = \infty. \quad (2.14)$$

Положим $\widehat{\mathbf{w}}_k = J_k^{-1} \mathbf{w}_k$. Поскольку $\|\widehat{\mathbf{w}}_k\|_{H(\Omega)} = 1$, то существует подпоследовательность $\{\widehat{\mathbf{w}}_{k_l}\}$, слабо сходящаяся в пространстве $H(\Omega)$ к векторному полю $\widehat{\mathbf{w}} \in H(\Omega)$. В силу компактности вложения $H(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ для всех $r \in [1, \infty)$ при $n = 2$ и для всех $r \in [1, 6)$ при $n = 3$, подпоследовательность $\{\widehat{\mathbf{w}}_{k_l}\}$ сходится сильно в $L^r(\Omega)$. Возьмем в (2.13) $\boldsymbol{\eta} = J_{k_l}^{-1} \widehat{\mathbf{w}}_{k_l}$. Переходя в полученном равенстве к пределу при $k_l \rightarrow \infty$, получаем

$$\nu = \lambda_0 \int_{\Omega} (\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{A} \, dx. \quad (2.15)$$

Из (2.15) вытекает, в частности, что $\lambda_0 > 0$. Следовательно, λ_k отделены от нуля.

Возьмем теперь в (2.13) $\boldsymbol{\eta} = J_{k_l}^{-2} \boldsymbol{\xi}$, где $\boldsymbol{\xi}$ – произвольное векторное поле из $H(\Omega)$. Переходя опять к пределу при $k_l \rightarrow \infty$, выводим интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}} \cdot \boldsymbol{\xi} \, dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in H(\Omega). \quad (2.16)$$

Таким образом, $\widehat{\mathbf{w}} \in H(\Omega)$ является обобщенным решением краевой задачи для системы Эйлера

$$\begin{cases} (\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}} + \nabla \widehat{p} = 0, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \widehat{\mathbf{w}} = 0, & x \in \Omega, \\ \widehat{\mathbf{w}} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

Функция $\widehat{p}$ в (2.17) принадлежит пространству $W^{1,s}(\Omega)$, где $s \in [1, 2)$ для $n = 2$ и $s \in [1, 3/2]$ для $n = 3$. Поскольку $\widehat{\mathbf{w}} = 0$ на $\partial\Omega$, то, используя уравнения (2.17), можно доказать, что давление $\widehat{p}$ равно постоянным $\widehat{p}_j$ на связных компонентах Γ_j границы $\partial\Omega$. Следующее утверждение было получено в [33; лемма 4] и в [17; теорема 2.2] (см. также [19; замечание 3.2]).

ЛЕММА 2.2. Для всякого решения $(\mathbf{w}, p) \in (H(\Omega), W^{1,s}(\Omega))$ системы (2.17) найдутся константы $\widehat{p}_i \in \mathbb{R}$ такие, что справедливы равенства

$$\widehat{p}(x)|_{\Gamma_i} = \widehat{p}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.18)$$

Умножим систему Эйлера (2.17) на $\mathbf{A}$ и проинтегрируем полученное равенство по частям. В силу (2.18), получим

$$\int_{\Omega} (\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{A} \, dx = - \int_{\partial\Omega} \widehat{p} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \sum_{i=0}^N \widehat{p}_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \sum_{i=0}^N \widehat{p}_i F_i. \quad (2.19)$$

Если $N = 1$ или $F_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, N$ (выполнено условие (1.5)), то равенство (2.19) дает

$$\int_{\Omega} (\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{A} \, dx = 0. \quad (2.20)$$

Последнее соотношение противоречит (2.15). Следовательно, наше предположение неверно, нормы решений $\mathbf{w}^{(\lambda)}$ операторного уравнения (1.14) при всех $\lambda \in [0, 1]$ ограничены в совокупности, и по теореме Лерэ–Шаудера уравнение (1.13) имеет хотя бы одно решение.

Аналогичный вывод можно было бы сделать и в случае, когда все постоянные $\widehat{p}_j$ равны:

$$\widehat{p}_0 = \widehat{p}_1 = \dots = \widehat{p}_N. \quad (2.21)$$

Действительно, тогда в силу (1.5) имеем

$$\sum_{i=0}^N \widehat{p}_i F_i = \widehat{p}_0 \sum_{i=0}^N F_i = 0,$$

и из (2.19) опять следует (2.20). Однако в общем случае мы не можем утверждать, что все постоянные $\widehat{p}_i$ равны; в работе Ч. Дж. Эмика [17] построено решение задачи (2.17), для которого равенство (2.21) неверно. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2: 1 < |x| < 2\}$ – кольцо на плоскости, $\psi \in C^1([1, 2])$, $\psi'(1) = \psi'(2) = 0$, $\psi'' \in L^2((1, 2))$. Решение задачи Эйлера (2.17) определяется формулами

$$\widehat{\mathbf{w}}(x) = \left(\frac{x_2}{|x|} \psi'(|x|), -\frac{x_1}{|x|} \psi'(|x|) \right) \in H(\Omega), \quad \widehat{p}(x) = \int_1^{|x|} \frac{|\psi'(s)|^2}{s} \, ds.$$

Легко видеть, что

$$\widehat{p}(x)|_{|x|=1} = 0, \quad \widehat{p}(x)|_{|x|=2} = \int_1^2 \frac{|\psi'(s)|^2}{s} \, ds > 0.$$

2.3. Плоские симметричные решения задачи протекания. Впервые нелокальная разрешимость задачи протекания без условия (1.6) была установлена в 1984 г. Ч. Дж. Эмиком [17]. Он рассмотрел плоские течения в предположении их симметрии. Следуя Эмику, введем два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется *допустимой*, если выполнены следующие условия:

- (а) $\partial\Omega$ состоит из $N + 1 \geq 2$ связной компоненты Γ_i ;
- (б) Ω симметрична относительно линии $\{x_2 = 0\}$ (см. рис. 2);
- (с) каждая компонента Γ_i пересекает линию $\{x_2 = 0\}$.

Рис. 2. Плоская симметричная область

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функция $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, отображающая Ω или $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^2$, называется *симметричной относительно линии $\{x_2 = 0\}$* , если h_1 есть четная функция переменной x_2 , в то время как h_2 – нечетная функция переменной x_2 .

Как известно, уравнения Навье–Стокса на плоскости инвариантны к отражениям относительно координатных осей. Это свойство позволяет искать симметричные решения $(\mathbf{u}, p)$ данной системы, в которых скорость $\mathbf{u}$ симметрична относительно линии $\{x_2 = 0\}$, а давление p является четной функцией переменной x_2 .

ТЕОРЕМА 2.1 (Ч. Дж. Эмик [17]). *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – допустимая область с липшицевой границей $\partial\Omega$, а $\mathbf{a} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ и $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ – симметричные относительно линии $\{x_2 = 0\}$ функции. Тогда для любого $\nu > 0$ существует обобщенное решение $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ задачи (1.1)–(1.3). Вектор скорости $\mathbf{u}$ симметричен относительно линии $\{x_2 = 0\}$, и соответствующее ему давление p есть четная функция переменной x_2 .*

Результат Эмика был получен с помощью рассуждения от противного. Приведем его рассуждения, доказывающие, что постоянные $\hat{p}_i = \hat{p}(x)|_{\Gamma_i}$, соответствующие давлению в задаче Эйлера (2.17), равны, т. е. что справедливо равенство (2.21). Как показано в п. 2.2, этого достаточно для доказательства существования обобщенного решения задачи Навье–Стокса (1.1)–(1.3).

Пусть Γ_0 – внешняя компонента границы $\partial\Omega$. Покажем, что $\hat{p}_0 = \hat{p}_i$, $i = 1, \dots, N$. Множество $\{x: x_2 = 0\} \cap \Gamma_i$ состоит из двух точек $(\alpha_i, 0)$ и $(\beta_i, 0)$, где $\alpha_i < \beta_i$. Вблизи точки $(\alpha_0, 0)$ компонента границы Γ_0 может быть представлена в виде $\Gamma_0 = \{(h_0(x_2), x_2): x_2 \in (-\delta, \delta)\}$ для достаточно малого $\delta > 0$. Аналогично, вблизи $(\alpha_1, 0)$ компонента Γ_1 имеет вид $\Gamma_1 = \{(h_1(x_2), x_2): x_2 \in (-\delta, \delta)\}$. Функции h_i , $i = 0, 1$, удовлетворяют условию Липшица. Положим

$$B(\delta) = \{x: x_1 \in (h_0(x_2), h_1(x_2)), x_2 \in (0, \delta)\} \subset \Omega$$

для достаточно малого δ .

Обозначим через $\widehat{\Phi}(x) = \widehat{p}(x) + |\widehat{\mathbf{w}}(x)|^2/2$ полное давление для задачи Эйлера (2.17). Непосредственно проверяется, что

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \widehat{\Phi} = -\widehat{w}_2 \widehat{\omega},$$

где $\widehat{\omega} = \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial x_1}$ – вихрь вектора скорости $\widehat{\mathbf{w}}$. Проинтегрируем это равенство по $B(\delta)$. Учитывая (2.18), имеем

$$\int_0^\delta (\widehat{p}(h_1(x_2), x_2) - \widehat{p}(h_0(x_2), x_2)) dx_2 = \delta(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_0) = - \int_{B(\delta)} \widehat{w}_2 \widehat{\omega} dx.$$

В силу симметрии, $\widehat{w}_2(x_1, 0) = 0$ (в смысле следа). Поэтому, применяя неравенство Харди, получим

$$\begin{aligned} \int_{B(\delta)} \frac{|\widehat{w}_2(x_1, x_2)|^2}{x_2^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\delta \frac{|\widehat{w}_2(x_1, x_2)|^2}{x_2^2} dx_2 dx_1 \\ &\leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\delta \left| \frac{\partial \widehat{w}_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|^2 dx_2 dx_1 \leq 4 \int_{B(\delta)} |\nabla \widehat{\mathbf{w}}(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Здесь мы предполагаем, что функция $\widehat{w}_2$ продолжена нулем в $\mathbb{R} \times (0, \delta) \setminus B(\delta)$. Из двух последних соотношений следует, что

$$\begin{aligned} |\widehat{p}_0 - \widehat{p}_1|^2 &\leq \frac{1}{\delta^2} \left(\int_{B(\delta)} x_2^2 \frac{|\widehat{w}_2(x)|^2}{x_2^2} dx \right) \left(\int_{B(\delta)} |\widehat{\omega}(x)|^2 dx \right) \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \left(4\delta^2 \int_{B(\delta)} |\nabla \widehat{\mathbf{w}}(x)|^2 dx \right) \left(4 \int_{B(\delta)} |\nabla \widehat{\mathbf{w}}(x)|^2 dx \right) \\ &\leq 16 \left(\int_{B(\delta)} |\nabla \widehat{\mathbf{w}}(x)|^2 dx \right)^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\delta \rightarrow 0$. Следовательно, $\widehat{p}_0 = \widehat{p}_1$. Аналогично доказывается, что

$$\widehat{p}_1 = \widehat{p}_2, \quad \dots, \quad \widehat{p}_{N-1} = \widehat{p}_N.$$

Тем самым доказано равенство (2.21).

В 1993 г. Л.И. Сазонов [10] и независимо от него в 1997 г. Х. Фуджита [14] дали конструктивное доказательство разрешимости плоской симметричной задачи протекания, построив симметричное продолжение граничного поля $\mathbf{a}$, удовлетворяющее неравенству Хопфа (2.2) для симметричных векторных полей. Аналогичный результат был получен В.В. Пухначёвым в пространственной задаче, имеющей ось симметрии и перпендикулярную ей плоскость симметрии [15].

Вероятно, Л.И. Сазонов не знал о работе Эмика [17], но он доказал теорему 2.1 более простым способом, используя конструкцию виртуальной дрены [10]. Сам этот термин был введен Фуджита [14], который получил также априорную оценку интеграла Дирихле (1.15) в плоской симметричной задаче

протекания (в доказательстве Сазонова использовалось рассуждение от противного). Ниже мы приведем построение такого продолжения, основанное на идеях Сазонова и Фуджита.

Положим

$$H_S(\Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\Omega), \mathbf{u} \text{ симметрична}\}.$$

ЛЕММА 2.3. *Предположим, что Ω – допустимая область с липшицевой границей и $\mathbf{a} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ – симметричная относительно линии $\{x_2 = 0\}$ функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует соленоидальное и симметричное продолжение $\mathbf{A} \in W^{1,2}(\Omega)$ векторного поля $\mathbf{a}$ в область Ω такое, что*

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \, dx \right| \leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in H_S(\Omega). \quad (2.22)$$

Более того, носитель $\mathbf{A}$ может быть сосредоточен в произвольно узкой полоске, содержащейся в $\bar{\Omega}$ и примыкающей к $\partial\Omega$ и оси симметрии x_1 . Именно, для любого $\delta > 0$ носитель $\mathbf{A}$ может быть сконструирован так, что

$$\text{supp } \mathbf{A} \subseteq \omega(\delta) := \{x \in \bar{\Omega} : \text{dist}(x, \partial\Omega \cup \{x_2 = 0\}) \leq \delta\}.$$

Чтобы не обременять читателя техническими деталями, приведем доказательство леммы 2.3 в случае, когда граница $\partial\Omega$ состоит из двух связных компонент Γ_0 и Γ_1 . Без ограничения общности можно считать, что центр координат не принадлежит Ω и лежит в области, ограниченной кривой Γ_1 . В силу условия (1.5), $F_0 = -F_1 = F$.

В области $\Omega_+^{(+)} = \{x \in \Omega : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ определим срезающую функцию

$$\zeta_+(\theta, \delta) = \psi\left(\delta \ln \frac{\delta}{\theta}\right), \quad (2.23)$$

где $\psi(t)$ – функция (2.3), $\delta \in (0, 1)$ – достаточно малое число, (r, θ) – полярные координаты на плоскости. Очевидно, что

$$\zeta_+(\theta, \delta) = \begin{cases} 1, & \theta \leq \delta e^{-1/\delta}, \\ 0, & \theta \geq \delta. \end{cases} \quad (2.24)$$

Легко видеть, что $\zeta_+(\theta, \delta) = 1$ в окрестности полупрямой $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1 : x_1 > 0, x_2 = 0\}$. Определим функцию $\hat{\zeta}_+(\theta, \delta)$ в области $\Omega_+ = \{x \in \Omega : x_2 > 0\}$, продолжая $\zeta_+(\theta, \delta)$ в $\Omega_+^{(-)} = \{x \in \Omega_+ : x_1 < 0\}$ нечетным образом по x_1 , т. е.

$$\hat{\zeta}_+(\theta, \delta) = \begin{cases} \zeta_+(\theta, \delta), & \theta \in (0, \pi/2], \\ -\zeta_+(\pi - \theta, \delta), & \theta \in [\pi/2, \pi). \end{cases} \quad (2.25)$$

Поскольку $\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta) = 0$ на линии $\{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1 : x_1 = 0, x_2 > 0\}$, функция $\widehat{\zeta}_+$ является гладкой для $x \in \Omega_+$. Прямыми вычислениями можно проверить что

$$\left| \frac{d\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{d\theta} \right| \leq \frac{c_1 \delta}{\theta}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left| \frac{d\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{d\theta} \right| \leq \frac{c_1 \delta}{\pi - \theta}, \quad \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad (2.26)$$

$$\left| \frac{\partial \widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{\partial x_k} \right| \leq \frac{c(\delta)}{r}, \quad \left| \frac{\partial^2 \widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{\partial x_k \partial x_r} \right| \leq \frac{c(\delta)}{r^2}. \quad (2.27)$$

Постоянная c_1 в (2.26) не зависит от δ , а $c(\delta)$ в (2.27) стремится к ∞ при $\delta \rightarrow 0$. Пусть

$$\mathbf{b}(x) = \nabla \ln |x| = \left(\frac{x_1}{|x|^2}, \frac{x_2}{|x|^2} \right).$$

Векторное поле $\mathbf{b}$ соленоидально и удовлетворяет условиям симметрии относительно прямой $\{x_2 = 0\}$. В полярных координатах векторное поле $\mathbf{b}$ имеет вид

$$\mathbf{b}(r, \theta) = (b_r(r, \theta), b_\theta(r, \theta)) = \left(\frac{1}{r}, 0 \right). \quad (2.28)$$

Определим в Ω_+ векторное поле

$$\mathbf{B}_+(x, \delta) = (B_{+,r}(r, \theta, \delta), B_{+,\theta}(r, \theta, \delta)) = -\frac{F}{4} \left(\frac{1}{r} \frac{d\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{d\theta}, 0 \right), \quad (2.29)$$

где

$$F = \int_{\Gamma_0} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Поле $\mathbf{B}_+$ соленоидально:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_+ = \frac{\partial B_{+,r}}{\partial r} + \frac{B_{+,r}}{r} = -\frac{F}{4} \frac{d\widehat{\zeta}_+}{d\theta} \operatorname{div} \mathbf{b}(x) = 0.$$

Кроме того, нетрудно проверить, что

$$\int_{\Gamma_0 \cap \mathbb{R}_+^2} \mathbf{B}_+ \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma_1 \cap \mathbb{R}_+^2} \mathbf{B}_+ \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{F}{2}. \quad (2.30)$$

Напомним, что $\mathbf{n}$ является единичным вектором внешней (по отношению к Ω) нормали.

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что поле $\mathbf{B}_+(x, \delta)$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \int_{\Omega_+} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}_+ dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_+} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \quad \forall \mathbf{u} \in H_S(\Omega). \quad (2.31)$$

Интеграл в левой части (2.31) можно представить в виде суммы:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_{\Omega_+} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}_+ dx = -\frac{F}{4} \int_{\Omega_+} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{d\widehat{\zeta}_+}{d\theta} dx \\ &\quad - \frac{F}{4} \int_{\Omega_+} u_\theta \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \frac{1}{r^2} \frac{d\widehat{\zeta}_+}{d\theta} dx =: -\frac{F}{4} (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Не теряя общности, можно считать функцию $\mathbf{u}$ продолженной нулем в $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_+$. Рассмотрим слагаемое $\mathcal{J}_1$. Пусть

$$B_R = \{x: |x| < R\} \supset \Omega, \quad B_{+,R} = \{x \in B_R: x_2 > 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \int_{\Omega_+} u_r(x) \frac{\partial u_r(x)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{d\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{d\theta} dx = \int_{B_{+,R}} u_r(x) \frac{\partial u_r(x)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{d\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{d\theta} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{d\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{d\theta} \left(\int_0^R u_r(r, \theta) \frac{\partial u_r(r, \theta)}{\partial r} dr \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{d\theta} |u_r(R, \theta)|^2 d\theta = 0. \end{aligned}$$

В силу симметрии, $u_\theta(x)|_{x_2=0} = 0$. Поэтому из (2.26) и неравенств Харди и Фридрихса следуют оценки

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_+} \frac{|u_\theta(x)|^2}{r^2} \left| \frac{d\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{d\theta} \right|^2 dx &= \int_{B_{+,R}} \frac{|u_\theta(x)|^2}{r^2} \left| \frac{d\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{d\theta} \right|^2 dx \\ &\leq c\delta^2 \left(\int_0^R \frac{dr}{r} \int_0^{\pi/2} \frac{|u_\theta(r, \theta)|^2}{\theta^2} d\theta + \int_0^R \frac{dr}{r} \int_{\pi/2}^\pi \frac{|u_\theta(r, \theta)|^2}{(\pi - \theta)^2} d\theta \right) \\ &\leq c\delta^2 \int_{B_{+,R}} \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial u_\theta(x)}{\partial \theta} \right|^2 dx \leq c\delta^2 \left(\int_{\Omega_+} |\nabla \mathbf{u}(x)|^2 dx + \int_{\Omega_+} \frac{|u_r(x)|^2}{r^2} dx \right) \\ &\leq c\delta^2 \left(\int_{\Omega_+} |\nabla \mathbf{u}(x)|^2 dx + \int_{\Omega_+} |u_r(x)|^2 dx \right) \leq c\delta^2 \int_{\Omega_+} |\nabla \mathbf{u}(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались также формулой градиента $\nabla \mathbf{u}$ векторной функции в полярных координатах

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \end{pmatrix}.$$

Аналогично, слагаемое $\mathcal{J}_2$ допускает оценку

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_2| &\leq \left(\int_{\Omega_+} \frac{|u_\theta(x)|^2}{r^2} \left| \frac{d\widehat{\zeta}_+(\theta, \delta)}{d\theta} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_+} \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial u_r(x)}{\partial \theta} - u_\theta(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq c\delta \int_{\Omega_+} |\nabla \mathbf{u}(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Выбирая δ достаточно малым, из оценок интегралов $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ выводим неравенство (2.31).

Продолжим симметричным образом поле $\mathbf{B}_+(x, \delta)$ в область $\Omega_- = \{x \in \Omega : x_2 < 0\}$:

$$\mathbf{B}(x, \delta) = \begin{cases} (B_{+,1}(x_1, x_2, \delta), B_{+,2}(x_1, x_2, \delta)), & x \in \Omega_+, \\ (B_{+,1}(x_1, -x_2, \delta), -B_{+,2}(x_1, -x_2, \delta)), & x \in \Omega_-. \end{cases} \quad (2.33)$$

Очевидно, что $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$,

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = F \quad (2.34)$$

и $\mathbf{B}$ удовлетворяет неравенству (2.31).

Теперь мы можем завершить доказательство леммы 2.3. Определим на границе области Ω векторное поле $\hat{\mathbf{a}}$:

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \mathbf{B}|_{\partial\Omega}.$$

В силу равенств (2.34), поток векторного поля $\hat{\mathbf{a}}$ через каждую связную компоненту границы области Ω равен нулю. Это позволяет осуществить соленоидальное продолжение $\hat{\mathbf{B}} \in W^{1,2}(\Omega)$ векторного поля $\hat{\mathbf{a}}$ в область Ω так, чтобы выполнялось неравенство Хопфа, т. е.

$$\left| \int_{\Omega} \hat{\mathbf{B}} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} dx \right| \leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in H(\Omega). \quad (2.35)$$

Более того, по построению компоненты носителя векторного поля $\hat{\mathbf{B}}$ сосредоточены в произвольно узких полосках, примыкающих к поверхностям Γ_i , $i = 0, 1$ (см. п. 2.1). Однако поле $\hat{\mathbf{B}}$ не обязано быть симметричным. Мы симметризуем его, вводя новое векторное поле $\tilde{\mathbf{B}}$ с компонентами

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1(x, \delta) &= \frac{1}{2} (\hat{B}_1(x_1, x_2, \delta) + \hat{B}_1(x_1, -x_2, \delta)), \\ \tilde{B}_2(x, \delta) &= \frac{1}{2} (\hat{B}_2(x_1, x_2, \delta) - \hat{B}_2(x_1, -x_2, \delta)). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\tilde{\mathbf{B}}$ наследует все свойства поля $\hat{\mathbf{B}}$.

Определим вектор $\mathbf{A}$ равенством

$$\mathbf{A}(x, \delta) = \mathbf{B}(x, \delta) + \tilde{\mathbf{B}}(x, \delta).$$

По построению $\mathbf{A}(x, \delta)|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{A}$ обладает всеми свойствами, сформулированными в лемме 2.3.

Используя неравенство Хопфа (2.22) для симметричных функций, мы приходим к априорной оценке $\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \leq C$, где положительная постоянная C зависит от ν и $\|\mathbf{a}\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}$. Отсюда вытекает разрешимость задачи протекания (1.1)–(1.3) в классе обобщенных симметричных решений. В работе [14] Фуджита также доказывает возможность восстановления давления p по найденному $\mathbf{w}$. При этом функция p , определяемая с точностью до аддитивной постоянной, будет четной функцией x_2 .

Другой способ доказательства разрешимости плоской симметричной задачи протекания предложен в работе Х. Моримото [16]. Он основан на использовании функции тока $\psi(x_1, x_2)$ плоского течения, определяемой соотношениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = u_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -u_2. \quad (2.36)$$

Заметим, что при нарушении условия (1.6) функция тока, определяемая по заданному соленоидальному вектору скорости $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, является многозначной функцией. Однако в области $\Omega_+ = \{x \in \Omega: x_2 > 0\}$, имеющей связную границу, функция тока из соотношений (2.36) восстанавливается однозначно, с точностью до постоянного слагаемого.

Что касается классических решений, то методы, развитые в монографии [2], позволяют доказать их существование при условиях принадлежности данных задачи классам Гёльдера: $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\mathbf{a} \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$. При этом $\mathbf{u} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\nabla p \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$.

2.4. Локальные результаты. Перечисленные выше результаты о существовании решения задачи протекания были доказаны либо при условии, что все потоки F_i через связные компоненты Γ_i границы $\partial\Omega$ равны нулю (условие (1.6)), либо при условии симметричности области. Первые шаги в исследовании задачи (1.1)–(1.3) без условия (1.6) были сделаны в 1961 г. Х. Фуджита [7] и Р. Финном [8]. Фуджита доказал разрешимость задачи (1.1)–(1.3) при условии малости потоков $|F_i|$. Финн [8] рассмотрел обобщение задачи обтекания. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ – ограниченная область со связной границей $\partial\Omega$. Классическая постановка задачи обтекания для уравнений Навье–Стокса [34] состоит в нахождении решения $\mathbf{u}, p$ системы (1.1), (1.2) в области $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, удовлетворяющего условиям

$$\mathbf{u} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_\infty, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.38)$$

Здесь $\mathbf{u}_\infty$ – заданный постоянный ненулевой вектор. Разрешимость задачи обтекания без ограничений малости на ее данные была впервые доказана Ж. Лерэ [1]. Впоследствии эта задача изучалась многими авторами (см. [28]). Обобщение, сделанное Р. Финном, состоит в замене однородного условия (2.37) общим условием (1.3). Пусть F обозначает величину потока вектора скорости через поверхность $\partial\Omega$. В работе [8] доказано существование решения задачи (1.1)–(1.3), (2.38) при условии $|F| < c_* \nu$, где $c_* > 0$ достаточно мало.

Вернемся к случаю ограниченной области Ω , заданной соотношениями (1.4). Задача (1.1)–(1.3) для малых потоков изучалась многими авторами (см., например, [9], [11]–[13]). В частности, В. Борхерс и К. Пилецкас [11] рассмотрели задачу протекания в области Ω , заключенной между концентрическими сферами (или окружностями при $n = 2$) с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$. Ими найдены эффективные оценки диапазона значений потока F вектора скорости, при которых указанная задача имеет решение. Другие варианты эффективных оценок значений потоков вектора скорости через компоненты связности границы были предложены в работах [12], [13].

Приведем простое доказательство разрешимости, в случае малых потоков, задачи (1.1)–(1.3), основанное на получении априорной оценки рассуждением от противного (см. [13]). Пусть χ_i – решение задачи Дирихле для оператора Лапласа во внешней области:

$$\begin{aligned}\Delta \chi_i &= 0, & x &\in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_i, \\ \chi_i &= 1, & x &\in \Gamma_i, \\ \chi_i(x) &\rightarrow 0, & |x| &\rightarrow \infty.\end{aligned}$$

В силу принципа максимума верны неравенства $0 \leq \chi_i(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_i$. Гармонической емкостью компактного множества Ω_i называется величина

$$\text{cap}(\Omega_i) = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_i} |\nabla \chi_i(x)|^2 dx.$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, имеющая вид (1.4). Если $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$, а граничные значения $\mathbf{a} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ удовлетворяют условию (1.5) и

$$\sum_{i=0}^N \frac{|F_i|}{\text{cap}(\Omega_i)} < \nu, \quad (2.39)$$

то задача (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно обобщенное решение $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, для доказательства существования решения задачи (1.1)–(1.3) достаточно получить априорную оценку решения. В п. 2.2 показано, что если эта оценка не верна, то существует пара $(\hat{\mathbf{w}}, \hat{p}) \in H(\Omega) \times W^{1,s}(\Omega)$, где $s \in [1, 3/2]$, удовлетворяющая системе Эйлера

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{w}} + \nabla \hat{p} = 0, & x \in \Omega, \\ \text{div } \hat{\mathbf{w}} = 0, & x \in \Omega, \\ \hat{\mathbf{w}} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.40)$$

Кроме того, $\|\nabla \hat{\mathbf{w}}\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ и справедливы равенства

$$\nu = \lambda_0 \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{A} dx, \quad \lambda_0 \in (0, 1], \quad (2.41)$$

и

$$\int_{\Omega} (\hat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{A} dx = - \sum_{i=0}^N \hat{p}_i F_i, \quad (2.42)$$

где

$$\hat{p}(x)|_{\Gamma_i} = \hat{p}_i, \quad \hat{p}_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Умножим уравнения (2.40) на $\nabla \chi_i$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_i$. Будем считать функцию $\hat{\mathbf{w}}$ продолженной нулем в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ и положим $\hat{p}(x)|_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_0} = \hat{p}_0$,

$\widehat{p}(x)|_{\Omega_i} = \widehat{p}_i$, $i = 1, \dots, N$. Используя положительность $\text{cap}(\Omega_i)$ и интегрируя по частям, выводим

$$\begin{aligned} |\widehat{p}_i| \text{cap}(\Omega_i) &= |\widehat{p}_i \text{cap}(\Omega_i)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_i} (\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla \chi_i dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_i} \nabla \widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla \widehat{\mathbf{w}} \chi_i dx \right| \leq \|\nabla \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1. \end{aligned}$$

Используя (2.42) и (2.39), получаем неравенство

$$\left| \int_{\Omega} (\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{A} dx \right| = \left| \sum_{i=0}^N \widehat{p}_i F_i \right| \leq \sum_{i=0}^N \frac{|F_i|}{\text{cap}(\Omega_i)} < \nu,$$

которое противоречит соотношению (2.41). Полученное противоречие доказывает существование хотя бы одного решения задачи (1.1)–(1.3).

2.5. Течения, близкие к потенциальным. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область вида (1.4). Хорошо известно, что система (1.1), (1.2) с потенциальным полем внешних сил $\mathbf{f}$ имеет семейство решений, в котором поле скорости потенциально: $\mathbf{u} = \nabla \varphi$, где φ является гармонической функцией, а давление определяется из интеграла Бернулли: $p + |\nabla \varphi|^2/2 = \text{const}$. Выбирая в качестве функции φ линейную комбинацию фундаментальных решений уравнения Лапласа с особенностями в областях Ω_i , мы получаем класс точных решений задачи протекания для уравнений Навье–Стокса, но со специальными краевыми условиями.

Х. Фуджита и Х. Моримото [35] изучили задачу (1.1)–(1.3) в трехмерной или двумерной области Ω с двумя гладкими компонентами границы Γ_0 и Γ_1 . Краевое условие выбиралось в виде

$$\mathbf{u} = \mu \nabla \varphi + \widetilde{\mathbf{a}}_i, \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 0, 1, \quad (2.43)$$

где $\mu \in \mathbb{R}$, φ – фундаментальное решение уравнения Лапласа и функции $\widetilde{\mathbf{a}}_i$ подчиняются условию (1.6). Авторы доказали, что существует счетное множество $M \in \mathbb{R}$ такое, что если $\mu \notin M$ и функции $\widetilde{\mathbf{a}}_i$ в соответствующей норме малы, то задача (1.1)–(1.3) имеет решение. Более того, если $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ есть круговое кольцо, то множество M пусто. В статье А. Руссо и Дж. Старита [36] требования гладкости, накладываемые на поверхности (или кривые) Γ_i и на функции $\widetilde{\mathbf{a}}_i$, были ослаблены.

В частности, в работе [35] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathbf{f} = 0$, граничное значение $\mathbf{a}$ допускает представление (2.43), где φ является фундаментальным решением уравнения Лапласа, и $\widetilde{\mathbf{a}}_i \in W^{1/2,2}(\Gamma_i)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{\Gamma_i} \widetilde{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad i = 0, 1.$$

Тогда существуют дискретное счетное множество $M \subset \mathbb{R}$ и постоянная $\varepsilon_* > 0$ такие, что для любого $\mu \in \mathbb{R} \setminus M$ задача (1.1)–(1.3) допускает хотя бы одно обобщенное решение $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega)$, если

$$\|\widetilde{\mathbf{a}}_0\|_{W^{1/2,2}(\Gamma_0)} + \|\widetilde{\mathbf{a}}_1\|_{W^{1/2,2}(\Gamma_1)} \leq \varepsilon_*. \quad (2.44)$$

Поскольку доказательство теоремы 2.3 достаточно простое и при этом красивое, приведем основные его моменты, не углубляясь в подробности. Будем искать решение $\mathbf{u}$ в виде суммы $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mu \nabla \varphi + \mathbf{A}$, где $\mathbf{w} \in H(\Omega)$, а $\mathbf{A}$ удовлетворяет граничному условию $\mathbf{A}|_{\Gamma_i} = \tilde{\mathbf{a}}_i$, $i = 0, 1$, и является обобщенным решением линейной однородной задачи Стокса, т. е. $\mathbf{A} \in W^{1,2}(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{A} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega)$$

и неравенству

$$\|\nabla \mathbf{A}\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\|\tilde{\mathbf{a}}_0\|_{W^{1/2,2}(\Gamma_0)} + \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|_{W^{1/2,2}(\Gamma_1)})$$

(см., например, [2]).

Векторное поле $\mathbf{w} \in H(\Omega)$ находится из интегрального тождества

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx + \mu \int_{\Omega} ((\nabla \varphi \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \nabla \varphi) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \\ & + \int_{\Omega} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \\ & = -\mu \int_{\Omega} ((\nabla \varphi \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \nabla \varphi) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx, \end{aligned} \quad (2.45)$$

справедливого для произвольного $\boldsymbol{\eta} \in H(\Omega)$. Здесь мы воспользовались тем, что градиент гармонической функции φ вместе с подходящим давлением, определяемым из интеграла Бернулли, удовлетворяет системе уравнений Навье–Стокса.

Покажем, что интегральное тождество (2.45) эквивалентно операторному уравнению. Для любой функции $\mathbf{b} \in W^{1,2}(\Omega)$ такой, что $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$, определим линейный оператор $L(\mathbf{b})$, действующий из $H(\Omega)$ в $H(\Omega)^*$ по формуле

$$\langle L(\mathbf{b}) \mathbf{w}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \quad \forall \mathbf{w}, \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает отношение двойственности между $H(\Omega)$ и $H(\Omega)^*$. Используя стандартные теоремы вложения, можно показать, что $L(\mathbf{b})$ является компактным оператором.

Введем еще оператор G , ставящий в соответствие любому $\mathbf{F} \in H(\Omega)^*$ обобщенное решение $\mathbf{v} \in H(\Omega)$ системы Стокса:

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx = \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\eta} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega).$$

Хорошо известно, что G – ограниченный линейный оператор (см., например, [2]).

Используя операторы G , $L(\nabla\varphi)$ и $L(\mathbf{A})$, интегральное тождество (2.45) можно записать в виде операторного уравнения в пространстве $H(\Omega)$:

$$\mathbf{w} + \frac{\mu}{\nu} GL(\nabla\varphi)\mathbf{w} = -\frac{1}{\nu} GL(\mathbf{A})\mathbf{w} - \frac{1}{\nu} G(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w} + G\Phi, \quad (2.46)$$

где

$$\Phi = -\frac{\mu}{\nu} L(\nabla\varphi)\mathbf{A} - \frac{1}{\nu} (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

Поскольку оператор $K = -(1/\nu)GL(\nabla\varphi)$ компактен на $H(\Omega)$, его спектр $\sigma(K) := M$ является дискретным счетным множеством с возможной предельной точкой $\lambda = 0$. Если $1/\mu \notin M$, то существует ограниченный обратный оператор $(I - \mu K)^{-1}$ и уравнение (2.46) можно переписать в виде

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{\nu} (I - \mu K)^{-1} \left(-\frac{1}{\nu} GL(\mathbf{A})\mathbf{w} - \frac{1}{\nu} G(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w} + G\Phi \right) =: \mathfrak{A}\mathbf{w}. \quad (2.47)$$

При достаточно малом ε_* условие (2.44) означает, что оператор $\mathfrak{A}$ переводит некоторый шар пространства в себя и является на нем оператором сжатия. Следовательно, существует решение уравнения (2.47), что и заканчивает доказательство теоремы.

2.6. Задача протекания для кругового кольца. Цикл статей [37]–[40] посвящен анализу течений в круговом кольце $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2: R_1 < |x| < R_0\}$. Х. Моримото [37], [38] рассмотрела эту задачу в случае, когда значения $\mathbf{a}_i$ вектора скорости на границах кольца имеют вид

$$\mathbf{a}_i = \mu R_i^{-1} \mathbf{e}_r + b_i \mathbf{e}_\theta, \quad x \in \Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^2: |x| = R_i\}, \quad i = 0, 1. \quad (2.48)$$

Здесь $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ – единичные векторы полярной системы координат (r, θ) , а μ , b_0 , b_1 – постоянные. Задача (1.1)–(1.3), (2.48) имеет точное решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r)$, $p = p(r)$, которое описывается явными формулами. Если $\mu = 0$, это решение превращается в известное решение Куэтта [34]. В работе [38] доказано, что если $|\mu|$ и $|b_1 - b_0|$ достаточно малы и $\mu \neq -2\nu$, то упомянутое точное решение задачи (1.1)–(1.3), (2.48) единственно. Теорема единственности имеет место и в случае $\mu = -2\nu$, если величины $|\mu|$, $|b_0|$, $|b_1|$ достаточно малы. Более того, если коэффициент вязкости ν достаточно велик, то решение задачи (1.1)–(1.3), (2.48) экспоненциально устойчиво.

Рассмотрим теперь течение в кольце с краевыми условиями более общего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= [\mu R_i^{-1} + \varphi_i(\theta)] \mathbf{e}_r + [\omega_i R_i + \psi_i(\theta)] \mathbf{e}_\theta, \\ x \in \Gamma_i &= \{x \in \mathbb{R}^2: |x| = R_i\}, \quad i = 0, 1, \end{aligned} \quad (2.49)$$

φ_i , ψ_i суть 2π -периодические функции класса $W^{1/2,2}(\mathbb{R})$. Задача (1.1)–(1.3), (2.49) изучена в работе Х. Моримото и С. Укая [39]. Основным результатом этой работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.4. *Предположим, что выполнено неравенство*

$$|\omega_1 - \omega_0| \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \left(\ln \frac{R_1}{R_0} \right)^2 < 2\nu. \quad (2.50)$$

Тогда существует не более чем счетное множество M такое, что для любого $\mu \in \mathbb{R} \setminus M$ задача (1.1)–(1.3), (2.49) имеет решение для достаточно малых φ_i, ψ_i ($i = 0, 1$).

Отметим, что в условиях теоремы 2.4 величина $|\mu|$ может быть сколь угодно большой по сравнению с ν . Интересно выделить класс условий (2.49), для которых множество M пусто. Х. Фуджита, Х. Моримото и Х. Окамото [40] установили, что это имеет место, когда $\omega_1 = \omega_0$. В этом случае неравенство (2.50) автоматически выполняется. Специальный случай $b_1 = b_0 = 0$ в (2.48) соответствует чисто радиальному течению с полем скоростей $u_r = \mu r^{-1}$, $u_\theta = 0$. Как показано в [40], радиальное течение в круговом кольце изолировано в классе стационарных решений уравнений Навье–Стокса, каковы бы ни были число Рейнольдса μ/ν и отношение радиусов R_0/R_1 . (Заметим, что единственность радиального решения задачи о течении в кольце доказана лишь для малых значений параметра μ/ν .) Если выполнено условие $b_1 R_1 = b_0 R_0$, задача (1.1)–(1.3), (2.48) имеет автомодельное решение $u_r = \mu r^{-1}$, $u_\theta = \lambda r^{-1}$, где $\lambda = b_0 R_0$. Численный анализ задачи о нестационарных возмущениях автомодельного решения, выполненный в работе [40], показал, что при достижении числом Рейнольдса критического значения, зависящего от отношений λ/ν и R_0/R_1 , от него отщепляется периодическое по времени решение, т. е. имеет место бифуркация Хопфа.

2.7. Осесимметричные задачи. Рассмотренная в работах [10], [14], [16], [17] плоская симметричная задача имеет осесимметричный аналог [15]. Далее

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad z = x_3$$

обозначают цилиндрические координаты, а u_r, u_θ, u_z – проекции вектора скорости $\mathbf{u}$ на оси r, θ, z . Уравнения стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах имеют вид (см. [34])

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right), \\ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right), \\ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Движение называется осесимметричным без вращения, если $u_\theta = 0$, а функции u_r , u_z , p не зависят от θ . В этих предположениях система (2.51) превращается в следующую:

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right), \\ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называется *допустимой*, если выполнены следующие условия:

- (a) $\partial\Omega \in C^\infty$;
- (b) $\partial\Omega$ состоит из $N + 1 \geq 2$ связной компоненты Γ_i ;
- (c) Ω имеет ось симметрии $r = 0$ и плоскость симметрии $z = 0$;
- (d) каждая компонента Γ_i пересекает плоскость $z = 0$.

Функция $\mathbf{h} = (h_r, h_\theta, h_z)$, отображающая Ω или $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^3$, называется *осесимметричной без вращения*, если $h_\theta = 0$, в то время как h_r и h_z не зависят от θ . Функция $\mathbf{h} = (h_r, h_\theta, h_z)$, отображающая Ω или $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^3$, называется *симметричной относительно плоскости $z = 0$* , если h_r , h_θ – четные функции z , в то время как h_z – нечетная функция z .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Вектор $\mathbf{a}$ называется *допустимым*, если выполнены следующие условия:

- (a) $\mathbf{a} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$;
- (b) $\mathbf{a}$ осесимметричен без вращения, а также симметричен относительно плоскости $z = 0$.

ТЕОРЕМА 2.5. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – допустимая область и $\mathbf{a}$ – допустимый вектор в смысле определений 2.3 и 2.4. Тогда для любого $\nu > 0$ существует обобщенное решение $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ задачи (1.1)–(1.3). Вектор скорости $\mathbf{u}$ осесимметричен без вращения и симметричен относительно плоскости $z = 0$. Справедлива оценка $\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C$, где положительная постоянная C зависит от ν и $\|\mathbf{a}\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}$.*

Доказательство теоремы 2.4 приведено в работе [15]. Оно основано на построении осесимметричного аналога виртуальной дрены.

Наряду с краевой задачей (1.1)–(1.3), в осесимметричном случае широко используется формулировка краевой задачи в переменных “завихренность – функция тока” (см., например, [41] и цитированную там литературу). Функция тока ψ осесимметричного течения и его завихренность ω вводятся с помощью соотношений

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -ru_z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = ru_r, \quad \omega = \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial z}. \quad (2.53)$$

Часто бывает удобнее иметь дело с приведенной завихренностью $\lambda = r^{-1}\omega$. В этих терминах уравнения стационарного осесимметричного движения вязкой

несжимаемой жидкости имеют вид

$$E\psi = -r^2\lambda, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda = \nu L\lambda. \quad (2.54)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_r, u_z)$, $\nabla = (\partial_r, \partial_z)$, а E и L – линейные эллиптические операторы, определяемые равенствами

$$E = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Структура эллиптической системы (2.54) существенно проще, чем у исходной системы (2.52); кроме того, эта система содержит меньше искоемых функций. Поэтому переменные ψ , ω оказались очень удобными для численного решения осесимметричных задач. До недавних пор задача протекания для системы (2.54) не исследовалась. В работе [42] рассмотрена такая задача в осесимметричной области Q типа сферического слоя.

Обозначим через S_1 и S_0 внутреннюю и внешнюю границы области Q . Предположим для простоты, что $S_1, S_0 \in C^\infty$. Меридиональное сечение области Q обозначим через Ω . Область Ω имеет форму подковы. Ее граница состоит из двух дуг Σ_1 и Σ_0 , являющихся меридиональными сечениями поверхностей S_1 и S_0 соответственно, и двух отрезков оси z : Λ_1 и Λ_0 (см. рис. 3).

Рис. 3. Меридиональное сечение области течения Q

Для системы (2.54) ставятся краевые условия

$$\psi = a_i(s), \quad \lambda = b_i(s), \quad (r, z) \in \Sigma_i, \quad i = 0, 1, \quad (2.55)$$

отвечающие заданию на границе области течения нормальной компоненты скорости и завихренности. В качестве переменной s , параметризующей кривую Σ_i , удобно выбрать длину ее дуги, отсчитываемую от левой концевой точки интервала Λ_i оси z ($i = 0, 1$).

Если значения функции a_i в концевых точках кривой Σ_i (обозначим эти точки через z_{il} и z_{ir} соответственно) совпадают, то выполнено условие (1.6): расходы жидкости через каждую из поверхностей S_i ($i = 0, 1$) равны нулю. В этом случае разрешимость задачи (2.54), (2.55) при надлежащей гладкости входных данных доказывается стандартными рассуждениями. Нас интересует случай, когда указанное условие нарушается:

$$a_1(l_1) - a_1(0) = a_0(l_0) - a_0(0) \neq 0.$$

Здесь l_i обозначает длину кривой Σ_i . Совпадающие величины в последнем соотношении суть $(2\pi)^{-1}F$, где F – расход жидкости через поверхность S_1 . В работе [42] установлена разрешимость задачи (2.54), (2.55) без ограничений на величину $|F|$.

Заметим, что при заданном поле скоростей функция тока определяется с точностью до аддитивной постоянной. Принимая естественное допущение $u_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, мы заключаем, что отрезки Λ_1 и Λ_0 оси z являются линиями тока. Не теряя общности, можно положить $\psi = 0$ на отрезке Λ_1 (т.е. $a_1(0) = a_0(0) = 0$). Тогда значение ψ на отрезке Λ_0 есть $a_1(l_1) = a_0(l_0) = (2\pi)^{-1}F$.

Преобразуем задачу (2.54), (2.55) к задаче с однородными краевыми условиями. Для этого построим функцию χ как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} E\chi &= 0, & (r, z) &\in \Omega; \\ \chi &= a_i(s), & (r, z) &\in \Sigma_i, \quad i = 0, 1; \\ \chi &= 0, & (r, z) &\in \Lambda_1; \\ \chi &= (2\pi)^{-1}q, & (r, z) &\in \Lambda_0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Предположим для простоты, что функции a_i , b_i ($i = 0, 1$) принадлежат классам Гёльдера $C^{2+\alpha}([0, l_i])$, $0 < \alpha < 1$. Кроме того, предположим, что при $s \rightarrow 0$ справедливы представления

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{21}s^2 + O(s^{2+\alpha}), & a_0 &= (2\pi)^{-1}q + a_{20}s^2 + O(s^{2+\alpha}), \\ b_i &= b_{1i} + b_{2i}s^2 + O(s^{2+\alpha}), & i &= 0, 1. \end{aligned} \quad (2.57)$$

В этих предположениях задача (2.56) имеет, и притом единственное, классическое решение, для которого справедливы оценки

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} = O(r), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial z} = O(r), \quad (r, z) \in \bar{\Omega}, \quad r \rightarrow 0. \quad (2.58)$$

Функция χ осуществляет продолжение граничных значений для функции тока в область Ω . Чтобы продолжить граничные значения приведенной завихренности внутрь области, введем локальные криволинейные ортогональные координаты s и n , связанные с кривыми Σ_1 и Σ_0 . Координата s уже введена выше, а в качестве n выбирается расстояние от точки $(r, z) \in \Delta_i \subset \bar{\Omega}$ до кривой Σ_i ($i = 0, 1$). Здесь Δ_i – криволинейная полоска ширины δ , прилегающая к кривой Σ_i . Величина δ выбирается столь малой, чтобы ближайшая к (r, z) точка на кривой Σ_i была единственной. Такие криволинейные координаты (переменные Мизеса) хорошо известны в теории пограничного слоя [34]. Теперь мы определим функцию $\vartheta(x)$ с помощью равенств

$$\begin{aligned} \vartheta &= b_i(s)\xi(n, \varepsilon), & (r, z) &\in \bar{\Delta}_i, \quad i = 0, 1; \\ \vartheta &= 0, & (r, z) &\in \bar{\Omega} \setminus \bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где $\xi(n, \varepsilon)$ – срезающая функция Хопфа. Вследствие (2.56) и свойств функции Хопфа, мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \vartheta &\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}); \quad \vartheta = b_i(s), \quad (r, z) \in \Sigma_i; \\ \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right| &\leq \frac{c\varepsilon}{n}; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0, \quad (r, z) \in \Lambda_i; \end{aligned} \quad (2.60)$$

причем $\varepsilon > 0$ может быть взято сколь угодно малым.

Перейдем в задаче (2.54), (2.55) к новым искомым функциям

$$\phi = \psi - \chi, \quad \mu = \lambda - \vartheta.$$

Функции ϕ , μ образуют решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} E\phi = -r^2(\mu + \vartheta), & (r, z) \in \Omega, \\ \mathbf{U} \cdot \nabla \mu + \mathbf{W} \cdot \nabla \mu + \mathbf{U} \cdot \nabla \vartheta + \mathbf{W} \cdot \nabla \vartheta = \nu L\mu + \nu L\vartheta, & (r, z) \in \Omega, \end{cases} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \phi = 0; \quad (r, z) \in \partial\Omega; \quad \mu = 0, \quad (r, z) \in \Sigma_i; \quad \frac{\partial \mu}{\partial r} = 0, \quad (r, z) \in \Lambda_i; \quad i = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Здесь введены обозначения

$$\mathbf{U} = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right), \quad \mathbf{W} = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right).$$

Вследствие (2.55), (2.56), (2.62), вектор-функции $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_i = 0, \quad \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_i = 0, \quad (r, z) \in \Sigma_i \quad (i = 0, 1); \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \quad \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \quad (r, z) \in \Lambda_i \quad (i = 0, 1), \end{aligned} \quad (2.63)$$

где $\mathbf{n}_i$ обозначают единичные векторы внешних по отношению к области Ω нормалей к кривым Σ_i ($i = 0, 1$), а $\mathbf{n}_0 = (-1, 0)$ – вектор нормали к прямолинейным участкам Λ_1 и Λ_0 границы области Ω .

Уравнения системы (2.61) вырождаются на линии $r = 0$, и для исследования ее решений нам потребуются весовые классы функций. Обозначим через Ω_- область плоскости r, z , полученную отражением области $\Omega \equiv \Omega_+$ относительно оси z , и пусть

$$\Omega_* = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_0.$$

Далее, обозначим через $H^l(\Omega; r)$ замыкание множества функций $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_*)$ в норме соболевского пространства функций, имеющих в области Ω^* производные до порядка n , квадратично суммируемые с весом r по этой области. Подпространства четных и нечетных функций $\varphi \in H^l(\Omega; r)$ обозначим через $H_e^l(\Omega; r)$ и $H_o^l(\Omega; r)$ соответственно. Пространство $L^2(\Omega; r)$ совпадает с пространством $H^0(\Omega; r)$. Аналогично определяются пространства $L_e^2(\Omega; r)$ и $L_o^2(\Omega; r)$.

Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\rho \in L^2_e(\Omega; r)$, $\partial\rho/\partial r \in L^2_o(\Omega; r)$, $\partial\rho/\partial z \in L^2_e(\Omega; r)$. Тогда существует единственное решение $\phi \in H^3_e(\Omega; r)$, $r^{-1}\partial\phi/\partial r \in H^2_e(\Omega; r)$ задачи

$$E\phi = -r^2\rho, \quad (r, z) \in \Omega; \quad \phi = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega, \quad (2.64)$$

и справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega; r)} &\leq c\|\rho\|_{L^2(\Omega; r)}, & \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega; r)} &\leq c\|\rho\|_{L^2(\Omega; r)}, \\ \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} \right\|_{H^2(\Omega; r)} &\leq c\|\rho\|_{H^1(\Omega; r)}, & \|\phi\|_{H^3(\Omega; r)} &\leq c\|\rho\|_{H^1(\Omega; r)}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

ЛЕММА 2.5. Пусть $a_i, b_i \in C^{2+\alpha}([0, l_i])$, $0 < \alpha < 1$, $i = 0, 1$, и выполнены условия (2.57). Тогда для обобщенного решения ϕ, μ задачи (2.61), (2.62) имеет место оценка

$$\|\phi\|_{H^3(\Omega; r)} + \|\mu\|_{H^1(\Omega; r)} \leq C \quad (2.66)$$

с постоянной $C = C(\nu, F, \Omega, a_i, b_i) > 0$.

С использованием априорных оценок, полученных в леммах 2.4 и 2.5, в работе [42] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.6. Если выполнены условия леммы 2.4, то существует решение $\phi \in H^3_e(\Omega; r)$, $\mu \in H^1_e(\Omega; r)$ задачи (2.61), (2.62).

Доказательство этой теоремы здесь не приводится; оно следует классической схеме, изложенной в [2].

В заключение отметим, что условие гладкости границы области течения, $\partial\Omega \in C^\infty$, можно заменить условием $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Теорема 2.6 гарантирует существование по крайней мере одного обобщенного решения задачи (2.61), (2.62). Однако условия гладкости и согласования, наложенные выше на функции a_i, b_i ($i = 0, 1$), позволяют доказать, что это решение в действительности является классическим.

Выше мы для простоты изложения ограничились случаем, когда граница осесимметричной области течения имеет две компоненты связности. Однако ход рассуждений сохраняется и для случая любого числа связных компонент границы. Важно лишь, чтобы каждая из этих поверхностей вращения пересекалась осью вращения в двух точках. При этом никаких ограничений на величину расхода через каждую компоненту границы не накладывается.

Рассмотрим галёркинские приближения к решению задачи (2.61), (2.62). Для них также верна априорная оценка, подобная (2.66). Это позволяет обосновать сходимость метода Галёркина к решению осесимметричной задачи протекания в переменных “завихренность – функция тока”.

3. Теорема существования для общего плоского случая

В этом разделе рассматривается краевая задача для системы уравнений Навье–Стокса (1.1)–(1.3) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega = \bigcup_{j=0}^N \Gamma_j$, состоящей из $N+1$ непересекающихся связных компонент Γ_j , т. е.

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N \overline{\Omega}_j \right), \quad \overline{\Omega}_j \subset \Omega_0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

где $\Gamma_j = \partial\Omega_j$. Мы предполагаем, что $\mathbf{a} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)$ и $\mathbf{f} \in W^{1,2}(\Omega)$. Не умаляя общности, можем считать, что $\mathbf{f} = \nabla^\perp b$ с $b \in W^{2,2}(\Omega)$,² где $(x, y)^\perp = (-y, x)$.

3.1. Вспомогательные результаты.

3.1.1. *Аналоги теоремы Морса–Сарда и N -свойства Лузина для соболевских функций класса $W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$.* Прежде всего напомним некоторые классические дифференциальные свойства соболевских функций. При работе с соболевскими функциями всегда предполагается, что выбраны их “наилучшие представители”. Для $w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ наилучший представитель w^* определяется следующим образом:

$$w^*(x) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{B_r(x)} w(z) dz, & \text{если этот предел существует и конечен;} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\oint_{B_r(x)} w(z) dz = \frac{1}{\text{meas}(B_r(x))} \int_{B_r(x)} w(z) dz$$

и $B_r(x) = \{y: |y-x| < r\}$ есть шар радиуса r с центром в x . Хорошо известно, что если $w \in W^{1,q}_{\text{loc}}(\Omega)$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то $\mathfrak{H}^1$ -почти все точки $x \in \Omega$ суть точки Лебега для функции w , т. е. указанные выше пределы существуют $\mathfrak{H}^1$ -почти всюду. Здесь и далее мы обозначаем символом $\mathfrak{H}^1$ одномерную меру Хаусдорфа, т. е. $\mathfrak{H}^1(F) = \lim_{t \rightarrow 0+} \mathfrak{H}^1_t(F)$, где

$$\mathfrak{H}^1_t(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam } F_i : \text{diam } F_i \leq t, F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\}.$$

ЛЕММА 3.1 (см. [43; предложение 1]. *Если $\psi \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$, то функция ψ непрерывна и существует множество $A_\psi \subset \mathbb{R}^2$ такое, что $\mathfrak{H}^1(A_\psi) = 0$ и функция ψ дифференцируема (в классическом смысле) в каждой точке $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A_\psi$. Более того, классическая производная совпадает со значением $\nabla\psi(x)$, причем*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{B_r(x)} |\nabla\psi(z) - \nabla\psi(x)|^2 dz = 0$$

(т. е. x является точкой Лебега для $\nabla\psi(\cdot)$).

²Согласно разложению Гельмгольца–Вейля, для C^2 -гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, каждая вектор-функция $\mathbf{f} \in W^{1,2}(\Omega)$ может быть представлена в виде суммы $\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{b} + \nabla\varphi$ при $n = 3$ и $\mathbf{f} = \nabla^\perp b + \nabla\varphi$ при $n = 2$, где $\mathbf{b}, b, \varphi \in W^{2,2}(\Omega)$, и градиентная часть может быть включена в член с давлением (см., например, [2]).

Следующая теорема получена в совместной работе Ж. Бургейна, М. В. Коробкова и Я. Кристенсена [25] (см. также [44], [45] для многомерного случая).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является ограниченной областью с липшицевой границей. Если $\psi \in W^{2,1}(\Omega)$, то

- (i) $\mathfrak{H}^1(\{\psi(x) : x \in \bar{\Omega} \setminus A_\psi \text{ \& } \nabla \psi(x) = 0\}) = 0$;
- (ii) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\mathfrak{H}^1(\psi(U)) < \varepsilon$ для любого множества $U \subset \bar{\Omega}$ со свойством $\mathfrak{H}_\infty^1(U) < \delta$;
- (iii) для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся открытое множество $V \subset \mathbb{R}$ со свойством $\mathfrak{H}^1(V) < \varepsilon$ и функция $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ такие, что если $x \in \bar{\Omega}$ и $\psi(x) \notin V$, то $x \notin A_\psi$ и $\psi(x) = g(x)$, $\nabla \psi(x) = \nabla g(x) \neq 0$;
- (iv) для $\mathfrak{H}^1$ -почти всех $y \in \psi(\bar{\Omega}) \subset \mathbb{R}$ прообраз $\psi^{-1}(y)$ является объединением конечного семейства C^1 -гладких кривых S_j , $j = 1, \dots, N(y)$. Каждая кривая S_j является либо циклом в Ω (т.е. множество $S_j \subset \Omega$ гомеоморфно единичной окружности $\mathbb{S}^1$), либо простой дугой с концами на $\partial\Omega$ (в этом случае дуга S_j трансверсальна $\partial\Omega$).

3.1.2. Некоторые сведения из топологии. Нам понадобятся некоторые определения и результаты из общей топологии. *Континуумом* мы называем связное компактное множество. Связность при этом понимается в смысле понятий общей топологии. Подмножество топологического пространства называется *дугой*, если оно гомеоморфно единичному отрезку $[0, 1]$.

Напомним вкратце некоторые результаты из классической статьи А. С. Кроппа [46], касающиеся множеств уровня непрерывных функций. Пусть $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ – квадрат в $\mathbb{R}^2$, и пусть f – непрерывная функция на Q . Обозначим через E_t множество уровня функции f , т.е. $E_t = \{x \in Q : f(x) = t\}$. Компонентой связности K множества уровня E_t , содержащей точку x_0 , называется максимальное связное подмножество множества E_t , содержащее x_0 . Это множество наделяется естественной топологией. Система окрестностей в этой топологии определяется следующим образом. Для компоненты $C \in T_f$ и для открытого множества $U \supset C$ множество $\{B \in T_f : B \subset U\}$ называется окрестностью C . Соответственно, сходимость в T_f определяется по следующему правилу: $T_f \ni C_i \rightarrow C$, если и только если $\sup_{x \in C_i} \text{dist}(x, C) \rightarrow 0$. Через T_f обозначим совокупность всех компонент связности множеств уровня f . В статье [46] было установлено, что множество T_f является одномерным топологическим деревом. Локально связный континуум T называется *топологическим деревом*, если он не содержит кривой, гомеоморфной окружности, или, равносильно, если любые две точки T могут быть соединены единственной дугой. Из этого определения следует, что T имеет топологическую размерность 1. Концевые точки этого дерева³ суть точки $C \in T_f$, которые не разделяют Q , т.е. разность $Q \setminus C$ представляет собой связное множество. Точками ветвления этого дерева являются компоненты $C \in T_f$ такие, что множество $Q \setminus C$ имеет более двух компонент связности (см. [46; теорема 5]). Согласно [46; лемма 1] (см. также [47]

³Точка континуума K называется *концевой точкой* K (соответственно *точкой ветвления* K), если ее топологический индекс равен 1 (соответственно больше либо равен 3). Для топологического дерева T это определение эквивалентно следующему: точка $C \in T$ называется *концевой точкой* T (соответственно *точкой ветвления* T), если $T \setminus \{C\}$ является связным множеством (соответственно если $T \setminus \{C\}$ имеет более чем две компоненты связности).

и [48]), множество всех точек ветвления дерева T_f не более чем счетно. Основное свойство дерева состоит в том, что любые две его точки можно соединить единственной дугой. Таким образом, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3.2 (см. лемму 13 в [46]). *Если $f \in C(Q)$, то для любой пары различных элементов $A \in T_f$ и $B \in T_f$ существует единственная дуга $J = J(A, B) \subset T_f$, соединяющая A с B . Более того, для каждой внутренней точки C этой дуги точки A, B лежат в различных компонентах связности множества $T_f \setminus \{C\}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Утверждение леммы 3.2 остается справедливым также для множеств уровня непрерывной функции $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, где Ω есть многосвязная ограниченная область типа (3.1), при условии $f \equiv \xi_j = \text{const}$ на каждой внутренней граничной компоненте G_j , $j = 1, \dots, N$. В самом деле, мы можем продолжить функцию f на всю область $\bar{\Omega}_0$, полагая $f(x) = \xi_j$ для $x \in \bar{\Omega}_j$, $j = 1, \dots, N$. Продолженная функция f будет непрерывной на множестве $\bar{\Omega}_0$, которое гомеоморфно единичному квадрату $Q = [0, 1]^2$.

3.2. Аргумент Ж. Лерэ “от противного”. Если граничные значения $\mathbf{a} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)$ удовлетворяют условию (1.5), то существует соленоидальное продолжение $\mathbf{A} \in W^{2,2}(\Omega)$ граничной функции $\mathbf{a}$ (см., например, [2], [28]). Используя этот факт и стандартные результаты [2], можно найти обобщенное решение $\mathbf{U} \in W^{2,2}(\Omega)$ линейной задачи Стокса такое, что

$$\mathbf{U} - \mathbf{A} \in H(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$$

и

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega). \quad (3.2)$$

Более того,

$$\|\mathbf{U}\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c(\|\mathbf{a}\|_{W^{3/2,2}(\partial\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}). \quad (3.3)$$

Очевидно, что $\mathbf{U}$ является продолжением граничного значения $\mathbf{a}$ внутрь области Ω . Поэтому из определения (1.12) следует, что обобщенное решение $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{U}$, $\mathbf{w} \in H(\Omega)$, краевой задачи (1.1)–(1.3) для системы уравнений Навье–Стокса удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx - \int_{\Omega} ((\mathbf{w} + \mathbf{U}) \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{w} \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{U} \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{U} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В п. 2.2 был описан метод Лерэ доказательства априорной оценки, основанный на рассуждении от противного. Важным элементом доказательства является следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой ограниченную область вида (3.1) с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$, $\mathbf{f} = \nabla^\perp b$, $b \in W^{2,2}(\Omega)$, и $\mathbf{a} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)$ удовлетворяет условию (1.5). Тогда, если не существует*

обобщенных решений системы (1.1)–(1.3), то найдется пара функций $\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p}$ со следующими свойствами:

(E) $\widehat{\mathbf{w}} \in W^{1,2}(\Omega)$, $\widehat{p} \in W^{1,q}(\Omega)$, $q \in (1, 2)$, и пара $(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p})$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера

$$(\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{w}} + \nabla \widehat{p} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.5a)$$

$$\operatorname{div} \widehat{\mathbf{w}} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.5b)$$

$$\widehat{\mathbf{w}} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.5c)$$

(E-NS) Выполнены условия (E) и существуют последовательности функций $\mathbf{u}_k \in W^{1,2}(\Omega)$, $p_k \in W^{1,q}(\Omega)$ и чисел $\nu_k \rightarrow 0+$, $\lambda_k \rightarrow \lambda_0 > 0$ такие, что нормы $\|\mathbf{u}_k\|_{W^{1,2}(\Omega)}$, $\|p_k\|_{W^{1,q}(\Omega)}$ равномерно ограничены для каждого числа $q \in [1, 2)$, пары $(\mathbf{u}_k, p_k)$ удовлетворяют системе уравнений

$$-\nu_k \Delta \mathbf{u}_k + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k + \nabla p_k = \mathbf{f}_k, \quad x \in \Omega, \quad (3.6a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.6b)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{a}_k, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.6c)$$

$$c \mathbf{f}_k = \frac{\lambda_k \nu_k^2}{\nu^2} \mathbf{f}, \quad \mathbf{a}_k = \frac{\lambda_k \nu_k}{\nu} \mathbf{a} \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}_k\|_{L^2(\Omega)} &\rightarrow 1, \quad \mathbf{u}_k \rightharpoonup \widehat{\mathbf{w}} \quad \text{в } W^{1,2}(\Omega), \\ p_k &\rightharpoonup \widehat{p} \quad \text{в } W^{1,q}(\Omega) \quad \forall q \in [1, 2). \end{aligned}$$

Более того, $\mathbf{u}_k \in W_{\text{loc}}^{3,2}(\Omega)$, $p_k \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega)$.

С этого момента будем предполагать, что условия (E-NS) выполнены. Как показано в п. 2.2, в случае, когда все потоки F_i равны нулю (см. (1.6)), условия (E-NS) приводят к противоречию и тем самым доказывают разрешимость задачи (1.1)–(1.3). Цель настоящего раздела состоит в том, чтобы показать, что условия (E-NS) ведут к противоречию и в общем случае, когда краевое значение $\mathbf{a}$ удовлетворяет только необходимому условию (1.5). Это означает справедливость теоремы существования 1.1.

Некоторые результаты об уравнениях Эйлера. В данном пункте собрана информация о свойствах предельного решения $(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p})$ системы (3.5), полученная в статьях, предшествовавших работе [22].

Как уже отмечалось в лемме 2.2, из условий (E) вытекает существование постоянных $\widehat{p}_0, \dots, \widehat{p}_N$ таких, что

$$\widehat{p}(x) \equiv \widehat{p}_j \quad \text{для } \mathfrak{H}^1\text{-почти всех } x \in \Gamma_j. \quad (3.7)$$

Кроме того, из (2.15) и (2.19) следует равенство

$$-\frac{\nu}{\lambda_0} = \sum_{j=0}^N \widehat{p}_j \int_{\Gamma_j} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{j=0}^N \widehat{p}_j \mathcal{F}_j. \quad (3.8)$$

Теперь если мы предположим, что выполнено условие (1.6) равенства нулю всех потоков $\mathcal{F}_i$, $i = 0, 1, \dots, N$, то соотношение (3.8) дает искомое противоречие. По тем же причинам противоречие достигается, если каждый поток $\mathcal{F}_j$ “достаточно мал”. Таким образом, доказательство теоремы существования для этих случаев окончено. Однако ситуация в случае $\mathcal{F}_j \neq 0$ более деликатная и нуждается в более тонких аргументах.

Из условий (3.5b) и (3.5c) вытекает, что существует функция тока $\psi \in W^{2,2}(\Omega)$ такая, что

$$\nabla \psi \equiv \widehat{\mathbf{w}}^\perp \quad \text{в } \overline{\Omega}. \quad (3.9)$$

(Напомним, что согласно нашим определениям $(a, b)^\perp = (-b, a)$.)

Обозначим через $\widehat{\Phi}$ полное давление, соответствующее решению $(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{p})$: $\widehat{\Phi} = \widehat{p} + |\widehat{\mathbf{w}}|^2/2$. Следующая формула является прямым следствием системы уравнений (3.5):

$$\nabla \widehat{\Phi} \equiv \widehat{\omega} \widehat{\mathbf{w}}^\perp = \widehat{\omega} \nabla \psi \quad \text{в } \Omega, \quad (3.10)$$

где $\widehat{\omega}$ означает соответствующую завихренность:

$$\widehat{\omega} = \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial x_1} = \Delta \psi.$$

Поскольку линии тока в нашем случае совпадают с множествами уровня функции ψ , из уравнений (3.10) в случае гладких функций ψ , $\widehat{\Phi}$ немедленно вытекает классический закон Бернулли:

Полное давление постоянно вдоль каждой линии тока.

Но соболевский случай более тонкий: теперь функция тока $\psi \in W^{2,1}(\Omega)$ не является C^1 -гладкой и полное давление $\widehat{\Phi}$ принадлежит пространству $W^{1,q}(\Omega)$ с $q < 2$, однако функции этого пространства не обязательно непрерывны и они “хорошо” определены всюду за исключением некоторого “плохого” множества, чья длина (т.е. одномерная мера Хаусдорфа) равна нулю (см., например, [49; теорема 1 из § 4.8 или теорема 2 из § 4.9.2]). Таким образом, формулировка закона Бернулли для решений в соболевских пространствах должна быть “по модулю” пренебрежимого “плохого” множества $A_{\widehat{\mathbf{w}}}$ с нулевой $\mathfrak{H}^1$ -мерой Хаусдорфа. Такая версия закона Бернулли была получена в [18; теорема 1] (см. также [19; теорема 3.2], где приведено более подробное доказательство).

ТЕОРЕМА 3.2 (закон Бернулли). *Пусть выполнены условия (E). Тогда существует множество $A_{\widehat{\mathbf{w}}}$ с $\mathfrak{H}^1(A_{\widehat{\mathbf{w}}}) = 0$ такое, что каждая точка $x \in \overline{\Omega} \setminus A_{\widehat{\mathbf{w}}}$ является точкой Лебега⁴ для функций $\widehat{\mathbf{w}}$, $\widehat{\Phi}$ и для каждого компактного связного множества $K \subset \overline{\Omega}$ имеет место следующее свойство: если*

$$\psi|_K = \text{const}, \quad (3.11)$$

то

$$\widehat{\Phi}(x_1) = \widehat{\Phi}(x_2) \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in K \setminus A_{\widehat{\mathbf{w}}}. \quad (3.12)$$

⁴Чтобы определить точку Лебега в $x \in \partial\Omega$, мы рассматриваем естественное продолжение функций $\widehat{\mathbf{w}}$, $\widehat{\Phi}$ на всю плоскость $\mathbb{R}^2$ константами $\mathbf{0}$, $\widehat{p}_j$ соответственно.

ЛЕММА 3.4. Если условия (E) выполнены, то существуют константы $\xi_0, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$ такие, что $\psi(x) \equiv \xi_j$ для каждой компоненты Γ_j , $j = 0, 1, \dots, N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение легко вывести из того факта, что функция $\widehat{w}$, продолженная нулевым значением за пределы Ω , принадлежит пространству $H(\mathbb{R}^2) \subset W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ и, следовательно, функция тока $\psi \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\mathbb{R}^2)$ является “хорошо определенной” на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ с $\nabla\psi = 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Для $x \in \overline{\Omega}$ обозначим через K_x компоненту связности множества уровня $\{z \in \overline{\Omega} : \psi(z) = \psi(x)\}$, содержащую точку x . По лемме 3.4, $K_x \cap \partial\Omega = \emptyset$ для каждого значения $y \in \psi(\overline{\Omega}) \setminus \{\xi_0, \dots, \xi_N\}$ и для произвольного $x \in \psi^{-1}(y)$. Таким образом, теорема 3.1, (ii), (iv) означает, что для почти всех $y \in \psi(\overline{\Omega})$ и для каждого $x \in \psi^{-1}(y)$ справедливо равенство $K_x \cap A_{\widehat{w}} = \emptyset$ и компонента $K_x \subset \Omega$ представляет собой C^1 -гладкую кривую, гомеоморфную окружности. Мы называем такие кривые K_x допустимыми циклами.

Следующая лемма получена в [19; лемма 3.3].

ЛЕММА 3.5. Если условия (E-NS) выполнены, то существует подпоследовательность Φ_{k_l} такая, что $\Phi_{k_l}|_S$ сходится к $\widehat{\Phi}|_S$ равномерно, $\Phi_{k_l}|_S \rightrightarrows \widehat{\Phi}|_S$, на почти всех⁵ допустимых циклах S .

В связи с леммой 3.5 отметим, что в работе [17] Ч. Дж. Эмик доказал равномерную сходимость $\Phi_k \rightrightarrows \widehat{\Phi}$ на почти всех окружностях. Однако его метод может быть с легкостью модифицирован для доказательства равномерной сходимости на почти всех линиях уровня каждой C^1 -гладкой функции с ненулевым градиентом. Такая модификация была сделана в доказательстве леммы 3.3 из [19].

Ниже мы предположим (не умаляя общности), что последовательность Φ_{k_l} из леммы 3.5 совпадает с Φ_k . Допустимые циклы S из леммы 3.5 будут называться регулярными циклами.

3.3. Получение противоречия. Рассмотрим два случая.

(а) Максимум функции $\widehat{\Phi}$ достигается на границе $\partial\Omega$:

$$\max_{j=0,\dots,N} \widehat{p}_j = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \widehat{\Phi}(x). \quad (3.13)$$

(б) Максимум функции $\widehat{\Phi}$ не достигается на $\partial\Omega$ (при этом не исключается случай $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \widehat{\Phi}(x) = +\infty$):

$$\max_{j=0,\dots,N} \widehat{p}_j < \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \widehat{\Phi}(x). \quad (3.14)$$

3.3.1. Максимум $\widehat{\Phi}$ достигается на границе $\partial\Omega$. Пусть справедлива формула (3.13). Добавляя константу к давлению, мы можем предположить, не умаляя общности, что

$$\max_{j=0,\dots,N} \widehat{p}_j = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \widehat{\Phi}(x) = 0. \quad (3.15)$$

⁵“Почти все циклы” означает “циклы в прообразах $\psi^{-1}(y)$ для почти всех значений $y \in \psi(\overline{\Omega})$ ”.

В частности,

$$\widehat{\Phi}(x) \leq 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (3.16)$$

Если $\widehat{p}_0 = \widehat{p}_1 = \dots = \widehat{p}_N$, то, согласно (3.8) и в силу равенства нулю суммарного потока (1.5), мы немедленно получим требуемое противоречие. Таким образом, далее мы предположим, что

$$\min_{j=0, \dots, N} \widehat{p}_j < 0. \quad (3.17)$$

Изменим (если необходимо) нумерацию граничных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ так, что

$$\widehat{p}_j < 0, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (3.18)$$

$$\widehat{p}_{M+1} = \dots = \widehat{p}_N = 0. \quad (3.19)$$

Прежде всего представим главную идею доказательства на эвристическом уровне. Хорошо известно, что каждая функция Φ_k удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению

$$\Delta \Phi_k = \omega_k^2 + \frac{1}{\nu_k} \operatorname{div}(\Phi_k \mathbf{u}_k) - \frac{1}{\nu_k} \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}_k. \quad (3.20)$$

Если $\mathbf{f}_k = 0$, то, согласно принципу максимума Хопфа, в подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega'$ максимум Φ_k достигается на границе $\partial\Omega'$, и если $x_* \in \partial\Omega'$ есть точка максимума, то производная по нормали функции Φ_k в x_* строго положительна. Однако недостаточно применять это свойство напрямую. Вместо этого используются некоторые его “интегральные аналоги”, которые ведут к противоречию с использованием формулы коплощади (см. формулы (3.36), (3.37)). Для $i \in \mathbb{N}$ и достаточно большого $k \geq k(i)$ построим множество $E_i \subset \Omega$, состоящее из линий уровня функции Φ_k , такое, что $\Phi_k|_{E_i} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, причем E_i отделяет граничную компоненту Γ_N (где $\widehat{\Phi} = 0$) от граничных компонент Γ_j с $j = 0, 1, \dots, M$ (где $\widehat{\Phi} < 0$). С одной стороны, длина каждой из этих линий уровня ограничена снизу некоторой положительной константой (так как они разделяют граничные компоненты), и по формуле коплощади это влечет оценку снизу для интеграла $\int_{E_i} |\nabla \Phi_k|$. С другой стороны, эллиптическое уравнение (3.20) для функции Φ_k , сходимости $\mathbf{f}_k \rightarrow 0$ и граничное условие (3.6с) позволяют оценить $\int_{E_i} |\nabla \Phi_k|^2$ сверху (см. лемму 3.6 ниже), и эта последняя оценка асимптотически противоречит предыдущей.

Доказательство для многосвязной области общего вида по сути то же, что и для случая кольцеобразной области (когда $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$). Доказательство имеет аналитическую природу, и несущественные отличия касаются только хорошо известных геометрических свойств множеств уровня непрерывных функций двух переменных.

Используя результаты Кронрода (см. п. 3.1.2), мы можем построить убывающую последовательность областей $V_{i+1} \Subset V_i \subset \Omega$ со следующими свойствами:

$$\partial V_i = A_i^0 \cup \dots \cup A_i^M \cup \Gamma_K \cup \dots \cup \Gamma_N, \quad (3.21)$$

где K есть фиксированное число, $K \in \{M+1, \dots, N\}$, и каждое из множеств A_i^j , $j = 0, 1, \dots, M$, $i \in \mathbb{N}$, представляет собой регулярный цикл, отделяющий Γ_j от Γ_N , с

$$\widehat{\Phi}(A_i^j) = -t_i = 2^{-i}t_0 \quad (3.22)$$

(см. рис. 4; некоторые детали этой конструкции см., например, в разделе 5).

По определению регулярных циклов (см. комментарии к лемме 3.5) имеет место равномерная сходимость $\Phi_k|_{A_i^j} \rightrightarrows \widehat{\Phi}(A_i^j) = -t_i$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется число k_i такое, что для всех $k \geq k_i$ выполнены неравенства

$$\Phi_k|_{A_i^j} < -\frac{7}{8}t_i, \quad \Phi_k|_{A_{i+1}^j} > -\frac{5}{8}t_i \quad \forall j = 0, 1, \dots, M. \quad (3.23)$$

Тогда

$$\forall t \in \left[\frac{5}{8}t_i, \frac{7}{8}t_i \right] \quad \forall k \geq k_i \quad \Phi_k|_{A_i^j} < -t, \quad \Phi_k|_{A_{i+1}^j} > -t \quad \forall j = 0, 1, \dots, M. \quad (3.24)$$

Для $k \geq k_i$, $j = 0, 1, \dots, M$ и $t \in [5t_i/8, 7t_i/8]$ обозначим через $W_{ik}^j(t)$ компоненту связности открытого множества $\{x \in V_i \setminus \bar{V}_{i+1} : \Phi_k(x) > -t\}$ такую, что $\partial W_{ik}^j(t) \supset A_{i+1}^j$, и положим

$$W_{ik}(t) = \bigcup_{j=0}^M W_{ik}^j(t), \quad S_{ik}(t) = (\partial W_{ik}(t)) \cap V_i \setminus \bar{V}_{i+1}.$$

Ясно, что $\Phi_k \equiv -t$ на $S_{ik}(t)$. По построению,

$$\partial W_{ik}(t) = S_{ik}(t) \cup A_{i+1}^0 \cup \dots \cup A_{i+1}^M \quad (3.25)$$

(см. рис. 4). Так как по свойствам (E-NS) каждая функция Φ_k принадлежит соболевскому классу $W_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega)$, по теореме Морса–Сарда для соболевских функций (см. теорему 3.1) имеем, что для почти всех $t \in [5t_i/8, 7t_i/8]$ множество уровня $S_{ik}(t)$ состоит из конечного числа C^1 -гладких циклов и функция Φ_k дифференцируема (в классическом смысле) в каждой точке $x \in S_{ik}(t)$ такой, что $\nabla \Phi_k(x) \neq 0$. Значения $t \in [5t_i/8, 7t_i/8]$, имеющие указанное выше свойство, будут называться (k, i) -регулярными. По построению

$$\int_{S_{ik}(t)} \nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n} \, ds = - \int_{S_{ik}(t)} |\nabla \Phi_k| \, ds < 0, \quad (3.26)$$

где $\mathbf{n}$ есть единичный вектор внешней (относительно множества $W_{ik}(t)$) нормали к $\partial W_{ik}(t)$.

Ключевым шагом является следующая оценка.

ЛЕММА 3.6. *Для каждого индекса $i \in \mathbb{N}$ найдется номер $k(i) \in \mathbb{N}$ такой, что неравенство*

$$\int_{S_{ik}(t)} |\nabla \Phi_k| \, ds < \mathcal{F}t \quad (3.27)$$

Рис. 4. Случай кольцеобразной области ($N = 1$)

выполняется для всех $k \geq k(i)$ и для почти всех $t \in [5t_i/8, 7t_i/8]$, причем константа $\mathcal{F}$ не зависит от t , k и от i .

Мы обсудим только основные этапы доказательства этой леммы. Для $h > 0$ обозначим

$$\begin{aligned}\Gamma_h &= \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \Gamma_K \cup \dots \cup \Gamma_N) = h\}, \\ \Omega_h &= \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \Gamma_K \cup \dots \cup \Gamma_N) < h\}.\end{aligned}$$

На первом шаге доказательства для достаточно большого k находим малое число $\bar{h}_k$ такое, что $\Omega_{\bar{h}_k} \subset V_{i+2}$ и выполнены оценки

$$\int_{\Gamma_{\bar{h}_k}} \Phi_k^2 ds < \sigma^2, \quad (3.28)$$

$$\left| \int_{\Gamma_{\bar{h}_k}} \nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n} ds \right| = \left| \int_{\Gamma_{\bar{h}_k}} \omega_k \mathbf{u}_k^\perp \cdot \mathbf{n} ds \right| < \varepsilon, \quad (3.29)$$

$$\int_{\Gamma_{\bar{h}_k}} |\mathbf{u}_k|^2 ds < C_\varepsilon \nu_k^2, \quad (3.30)$$

где σ и ε суть произвольные (но фиксированные) малые числа и константа C_ε не зависит от k и σ . Такое значение параметра $\bar{h}_k$ можно найти из предположения (E-NS), используя слабые сходимости $\Phi_k \rightharpoonup \hat{\Phi}$, $\mathbf{u}_k \rightharpoonup \hat{\mathbf{w}}$, а также из граничных условий $\|\mathbf{u}_k\|_{L^2(\partial\Omega)} = O(\nu_k)$, $\nu_k \rightarrow 0$, $\hat{\mathbf{w}} \equiv 0$, $\hat{\Phi} \equiv 0$ на $\Gamma_K \cup \dots \cup \Gamma_N$ (см. (3.6c) и (3.5c)).

Теперь для (k, i) -регулярного значения $t \in [5t_i/8, 7t_i/8]$ рассмотрим область

$$\Omega_{i\bar{h}_k}^-(t) = W_{ik}(t) \cup \bar{V}_{i+1} \setminus \bar{\Omega}_{\bar{h}_k}^-.$$

По построению, $\partial\Omega_{i\bar{h}_k}^-(t) = \Gamma_{\bar{h}_k}^- \cup S_{ik}(t)$ (см. рис. 4). Интегрируя тождество

$$\Delta \Phi_k = \omega_k^2 + \frac{1}{\nu_k} \text{div}(\Phi_k \mathbf{u}_k) - \frac{1}{\nu_k} \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}_k \quad (3.31)$$

по области $\Omega_{i\bar{h}_k}(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{S_{ik}(t)} \nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{\Gamma_{\bar{h}_k}} \nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_{\Omega_{i\bar{h}_k}(t)} \omega_k^2 \, dx - \frac{1}{\nu_k} \int_{\Omega_{i\bar{h}_k}(t)} \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}_k \, dx \\ &+ \frac{1}{\nu_k} \int_{S_{ik}(t)} \Phi_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} \, ds + \frac{1}{\nu_k} \int_{\Gamma_{\bar{h}_k}} \Phi_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \int_{\Omega_{i\bar{h}_k}(t)} \omega_k^2 \, dx - \frac{1}{\nu_k} \int_{\Omega_{i\bar{h}_k}(t)} \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}_k \, dx - t\lambda_k \overline{\mathcal{F}} + \frac{1}{\nu_k} \int_{\Gamma_{\bar{h}_k}} \Phi_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} \, ds, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_1 + \dots + \mathcal{F}_M)/\nu$. Ввиду (3.26), (3.29), имеют место оценки

$$\begin{aligned} \int_{S_{ik}(t)} |\nabla \Phi_k| \, ds &\leq t\mathcal{F} + \varepsilon + \frac{1}{\nu_k} \int_{\Omega_{i\bar{h}_k}(t)} \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}_k \, dx - \int_{\Omega_{i\bar{h}_k}(t)} \omega_k^2 \, dx \\ &+ \frac{1}{\nu_k} \left(\int_{\Gamma_{\bar{h}_k}} \Phi_k^2 \, ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_{\bar{h}_k}} |\mathbf{u}_k|^2 \, ds \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $\mathcal{F} = |\overline{\mathcal{F}}|$. По определению,

$$\frac{1}{\nu_k} \|\mathbf{f}_k\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\lambda_k \nu_k}{\nu^2} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{\nu_k} \int_{\Omega_{i\bar{h}_k}(t)} \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}_k \, dx \right| \leq \varepsilon$$

для достаточно больших k . Используя неравенства (3.28), (3.30), получаем

$$\int_{S_{ik}(t)} |\nabla \Phi_k| \, ds \leq t\mathcal{F} + 2\varepsilon + \sigma\sqrt{C_\varepsilon} - \int_{\Omega_{i\bar{h}_k}(t)} \omega_k^2 \, dx, \quad (3.34)$$

где C_ε не зависит от k и σ . Можно доказать, что для достаточно больших k последнее слагаемое удовлетворяет неравенству

$$\int_{\Omega_{i\bar{h}_k}(t)} \omega_k^2 \, dx \geq \varepsilon_i, \quad (3.35)$$

где параметр $\varepsilon_i > 0$ не зависит от k (иначе $\omega(x) \equiv 0$, и, соответственно, $\Phi(x) \equiv \text{const}$ на множестве $V_{i+1} \setminus V_{i+2} \subset \Omega_{i\bar{h}_k}(t)$, что невозможно по построению). Выбирая $\varepsilon = \varepsilon_i/6$, $\sigma = \varepsilon_i/(3\sqrt{C_\varepsilon})$ и достаточно большое значение k , из (3.35) получаем

$$2\varepsilon + \sigma\sqrt{C_\varepsilon} - \int_{\Omega_{i\bar{h}_k}(t)} \omega_k^2 \, dx \leq 0.$$

Последнее неравенство и (3.34) влекут требуемую оценку (3.27).

Теперь можно получить искомое противоречие, применяя формулу коплотцади.

ЛЕММА 3.7. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является ограниченной областью типа (3.1) с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$, $\mathbf{f} \in W^{1,2}(\Omega)$ и граничные данные $\mathbf{a} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)$ удовлетворяют условию нулевого суммарного потока (1.5). Тогда предположения (E-NS) и (3.13) приводят к противоречию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i \in \mathbb{N}$ и $k \geq k(i)$ (см. лемму 3.6) положим

$$E_i = \bigcup_{t \in [5t_i/8, 7t_i/8]} S_{ik}(t).$$

По формуле коплощади (см., например, [50]) для каждой интегрируемой функции $g: E_i \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$\int_{E_i} g |\nabla \Phi_k| dx = \int_{5t_i/8}^{7t_i/8} \int_{S_{ik}(t)} g(x) d\mathfrak{H}^1(x) dt. \quad (3.36)$$

В частности, беря $g = |\nabla \Phi_k|$ и используя (3.27), мы получим

$$\int_{E_i} |\nabla \Phi_k|^2 dx = \int_{5t_i/8}^{7t_i/8} \int_{S_{ik}(t)} |\nabla \Phi_k|(x) d\mathfrak{H}^1(x) dt \leq \int_{5t_i/8}^{7t_i/8} \mathcal{F}' t dt = \mathcal{F}' t_i^2, \quad (3.37)$$

где параметр $\mathcal{F}' = 3\mathcal{F}/16$ не зависит от i . Теперь, беря $g = 1$ в (3.36) и используя неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} \int_{5t_i/8}^{7t_i/8} \mathfrak{H}^1(S_{ik}(t)) dt &= \int_{E_i} |\nabla \Phi_k| dx \leq \left(\int_{E_i} |\nabla \Phi_k|^2 dx \right)^{1/2} (\text{meas}(E_i))^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\mathcal{F}'} t_i (\text{meas}(E_i))^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

По построению для почти всех $t \in [5t_i/8, 7t_i/8]$ множество $S_{ik}(t)$ является конечным объединением гладких циклов и $S_{ik}(t)$ отделяет A_i^j от A_{i+1}^j для $j = 0, 1, \dots, M$. Таким образом, каждое множество $S_{ik}(t)$ отделяет компоненту Γ_j от Γ_N . В частности,

$$\mathfrak{H}^1(S_{ik}(t)) \geq \min(\text{diam } \Gamma_j, \text{diam } \Gamma_N).$$

Следовательно, левый интеграл в (3.38) больше Ct_i , где постоянная $C > 0$ не зависит от i . С другой стороны, очевидно, что

$$\text{meas}(E_i) \leq \text{meas}(V_i \setminus V_{i+1}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3.7.

3.3.2. *Максимум $\widehat{\Phi}$ не достигается на $\partial\Omega$.* В этом пункте рассматривается случай (b), когда выполнено предположение (3.14). (Здесь мы не исключаем случай $\text{ess sup}_{x \in \Omega} \widehat{\Phi}(x) = +\infty$.) Обозначим $\sigma = \max_{j=0, \dots, N} \widehat{p}_j$.

Сначала в статье [22] доказывается следующий технический факт.

ЛЕММА 3.8. *Существует регулярный цикл $F \subset \Omega$ такой, что $\widehat{\Phi}(F) > \sigma$.*

Оставшаяся часть доказательства для рассматриваемого случая (3.14) аналогична рассуждениям для уже разобранного в п. 3.3.1 случая (3.13) со следующими изменениями: теперь $M = N$, множество F играет роль, которую выше играла компонента Γ_N , и выкладки становятся даже проще, так как F лежит строго внутри Ω . Именно, для некоторого $t < \Phi(F)$ и достаточно большого k можно построить подобласть $\Omega_k(t) \Subset \Omega$ такую, что

$$F \Subset \Omega_k(t), \quad \partial\Omega_k(t) = S_k(t), \quad \Phi_k|_{S_k(t)} \equiv t$$

и $S_k(t)$ представляет собой конечное объединение C^1 -гладких циклов таких, что градиент Φ_k в точках $S_k(t)$ направлен строго внутрь $\Omega_k(t)$, т. е.

$$\int_{S_k(t)} \nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n} \, ds = - \int_{S_k(t)} |\nabla \Phi_k| \, ds < 0, \quad (3.39)$$

где $\mathbf{n}$ есть единичный вектор внешней (по отношению к области $\Omega_k(t)$) нормали к $S_k(t)$. Интегрируя тождество (3.31) по области $\Omega_k(t)$, получаем

$$\begin{aligned} 0 &> \int_{S_k(t)} \nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Omega_k(t)} \omega_k^2 \, dx + \frac{1}{\nu_k} \int_{S_k(t)} \Phi_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} \, ds - \frac{1}{\nu_k} \int_{\Omega_k(t)} \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}_k \, dx \\ &= \int_{\Omega_k(t)} \omega_k^2 \, dx + \frac{t}{\nu_k} \int_{S_k(t)} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} \, ds - \frac{\nu_k}{\nu^2} \int_{\Omega_k(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_k \, dx \\ &= \int_{\Omega_k(t)} \omega_k^2 \, dx - \frac{\nu_k}{\nu^2} \int_{\Omega_k(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_k \, dx. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Как и прежде, можно показать, что первый член в правой части последней формулы удовлетворяет оценке $\int_{\Omega_k(t)} \omega_k^2 \, dx \geq \varepsilon_t$ с некоторой константой $\varepsilon_t > 0$,

не зависящей от k , в то время как второй член $\frac{\nu_k}{\nu^2} \int_{\Omega_k(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_k \, dx$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, – противоречие. (Детали можно найти в [22; §3.3.2].) Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 3.9. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой ограниченную область типа (3.1) с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$, $\mathbf{f} \in W^{1,2}(\Omega)$ и граничные данные $\mathbf{a} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)$ удовлетворяют условию нулевого суммарного потока (1.5). Тогда предположения (E-NS) и (3.14) приводят к противоречию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть выполнены предположения теоремы 1.1. Допустим, что ее утверждение ложно. Тогда по лемме 3.3 существуют функции $\hat{\mathbf{w}}, \hat{p}$ и последовательность $(\mathbf{u}_k, p_k)$, удовлетворяющие набору условий (E-NS), однако вследствие лемм 3.9 и 3.7 эти предположения ведут к противоречию.

4. Осесимметричный случай

Прежде всего уточним некоторые обозначения. Пусть $O_{x_1}, O_{x_2}, O_{x_3}$ суть координатные оси в $\mathbb{R}^3$ и

$$\theta = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad z = x_3$$

суть цилиндрические координаты. Обозначим через v_θ , v_r , v_z проекции вектора $\mathbf{v}$ на оси θ , r , z .

Напомним, что скалярная функция f осесимметрична, если она не зависит от θ . В свою очередь, вектор-функция $\mathbf{h} = (h_r, h_\theta, h_z)$ называется осесимметричной, если h_r , h_θ и h_z не зависят от θ . Вектор-функция $\mathbf{h}' = (h_r, h_\theta, h_z)$ называется осесимметричной без вращения, если $h_\theta = 0$, в то время как h_r и h_z не зависят от θ .

Основной результат данного раздела состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ представляет собой ограниченную осесимметричную область (см., например, рис. 5) с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из $N + 1$ связной компоненты Γ_i . Тогда, если $\mathbf{f} \in W^{1,2}(\Omega)$ и $\mathbf{a} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)$ осесимметричны и граничное значение $\mathbf{a}$ удовлетворяет условию нулевого суммарного потока (1.5), то система (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно слабое осесимметричное решение. Более того, если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{a}$ суть осесимметричные функции без вращения, то система (1.1)–(1.3) также имеет по крайней мере одно слабое осесимметричное решение без вращения.*

Рис. 5. Осесимметричная область ($N = 3$)

Используя аргумент Ж. Лерэ “от противного” (основная идея представлена в п. 3.2 для плоского случая; детали, отражающие специфику осесимметричного случая, могут быть найдены, например, в статье [23]), можно доказать следующий факт.

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ представляет собой ограниченную осесимметричную область с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из $N + 1$ связной компоненты Γ_i , $\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in W^{2,2}(\Omega)$, $\mathbf{a} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)$ суть осесимметрические вектор-функции и граничные данные $\mathbf{a} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)$ удовлетворяют условию нулевого суммарного потока (1.5). Тогда, если утверждение теоремы 4.1 не выполнено, то существуют $\hat{\mathbf{w}}$, $\hat{p}$ со следующими свойствами.*

(E-AX) Функции $\widehat{\mathbf{w}} \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)$, $\widehat{p} \in W^{1,3/2}(\Omega)$ осесимметричны и удовлетворяют системе уравнений Эйлера (3.5).

(E-NS-AX) Выполнено условие (E-AX) и существуют последовательности осесимметричных функций $\mathbf{u}_k \in W^{1,2}(\Omega)$, $p_k \in W^{1,3/2}(\Omega)$ и чисел $\nu_k \rightarrow 0+$, $\lambda_k \rightarrow \lambda_0 > 0$ такие, что нормы $\|\mathbf{u}_k\|_{W^{1,2}(\Omega)}$, $\|p_k\|_{W^{1,3/2}(\Omega)}$ равномерно ограничены, пары $(\mathbf{u}_k, p_k)$ удовлетворяют системе уравнений (3.6) с $\mathbf{f}_k = \frac{\lambda_k \nu_k^2}{\nu^2} \mathbf{f}$, $\mathbf{a}_k = \frac{\lambda_k \nu_k}{\nu} \mathbf{a}$ и

$$\|\nabla \mathbf{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 1, \quad \mathbf{u}_k \rightharpoonup \widehat{\mathbf{w}} \quad \text{в } W^{1,2}(\Omega), \quad p_k \rightharpoonup \widehat{p} \quad \text{в } W^{1,3/2}(\Omega). \quad (4.1)$$

Более того, $\mathbf{u}_k \in W_{\text{loc}}^{3,2}(\Omega)$ и $p_k \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega)$.

Как и в предыдущем разделе, для доказательства теоремы существования 4.1 нужно показать, что условия (E-NS-AX) ведут к противоречию.

Зададим множества $P_+ = \{(0, x_2, x_3) : x_2 > 0, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{D} = \Omega \cap P_+$. Очевидно, что на полуплоскости P_+ координаты x_2, x_3 совпадают с координатами r, z .

Для множества $A \subset \mathbb{R}^3$ положим $\check{A} := A \cap P_+$ и для $B \subset P_+$ обозначим через $\tilde{B}$ множество в $\mathbb{R}^3$, полученное вращением B вокруг оси O_z .

Легко видеть, что имеют место следующие свойства.

(S₁) $\mathcal{D}$ есть ограниченная плоская область с липшицевой границей. Более того, множество $\check{\Gamma}_j$ связно для каждого индекса $j = 0, 1, \dots, N$. Другими словами, $\{\check{\Gamma}_j : j = 0, 1, \dots, N\}$ совпадает с семейством всех компонент связности множества $P_+ \cap \partial \mathcal{D}$.

Таким образом, $\widehat{\mathbf{w}}$ и $\widehat{p}$ удовлетворяют следующей системе в плоской области $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial r} - \frac{(\widehat{w}_\theta)^2}{r} + \widehat{w}_r \frac{\partial \widehat{w}_r}{\partial r} + \widehat{w}_z \frac{\partial \widehat{w}_r}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \widehat{p}}{\partial z} + \widehat{w}_r \frac{\partial \widehat{w}_z}{\partial r} + \widehat{w}_z \frac{\partial \widehat{w}_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\widehat{w}_\theta \widehat{w}_r}{r} + \widehat{w}_r \frac{\partial \widehat{w}_\theta}{\partial r} + \widehat{w}_z \frac{\partial \widehat{w}_\theta}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(r \widehat{w}_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \widehat{w}_z)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

(эти уравнения выполнены для почти всех $x \in \mathcal{D}$) и

$$\widehat{\mathbf{w}}(x) = 0 \quad \text{для } \mathfrak{H}^1\text{-почти всех } x \in P_+ \cap \partial \mathcal{D}. \quad (4.3)$$

Имеем следующие интегральные оценки: $\widehat{\mathbf{w}} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathcal{D})$,

$$\int_{\mathcal{D}} r |\nabla \widehat{\mathbf{w}}(r, z)|^2 dr dz < \infty, \quad (4.4)$$

и, по теореме вложения Соболева для трехмерных областей, $\widehat{\mathbf{w}} \in L^6(\Omega)$, т. е.

$$\int_{\mathcal{D}} r |\widehat{\mathbf{w}}(r, z)|^6 dr dz < \infty. \quad (4.5)$$

Кроме того, условие $\nabla \hat{p} \in L^{3/2}(\Omega)$ может быть записано в виде

$$\int_{\mathcal{D}} r |\nabla \hat{p}(r, z)|^{3/2} dr dz < \infty. \quad (4.6)$$

4.1. Некоторые результаты об уравнениях Эйлера. В этом пункте собрана информация о предельном решении $(\hat{\mathbf{w}}, \hat{p})$ системы (4.2), (4.3), полученная в работах, предшествовавших итоговой статье [22].

Следующее утверждение доказано в [33; лемма 4] и [17; теорема 2.2].

ТЕОРЕМА 4.2. *Если условия (E-AX) выполнены, то*

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, N\} \quad \exists \hat{p}_j \in \mathbb{R} : \quad \hat{p}(x) \equiv \hat{p}_j \quad \text{для } \mathfrak{H}^2\text{-почти всех } x \in \Gamma_j. \quad (4.7)$$

В частности, в силу осевой симметрии

$$\hat{p}(x) \equiv \hat{p}_j \quad \text{для } \mathfrak{H}^1\text{-почти всех } x \in \check{\Gamma}_j. \quad (4.8)$$

Нам понадобится слабая версия закона Бернулли для соболевских решений $(\hat{\mathbf{w}}, \hat{p})$ уравнений Эйлера (4.2) (см. теорему 4.3 ниже).

Из последнего равенства в (4.2) и из (4.4) вытекает, что существует функция тока $\psi \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\mathcal{D})$ такая, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -r \hat{w}_z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = r \hat{w}_r. \quad (4.9)$$

Легко видеть, что функция ψ непрерывна в точках множества

$$\overline{\mathcal{D}} \setminus O_z = \overline{\mathcal{D}} \setminus \{(0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

ЛЕММА 4.2 (ср. с леммой 3.4). *Если условия (E-AX) выполнены, то существуют константы $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$ такие, что $\psi(x) \equiv \xi_j$ на каждой кривой $\check{\Gamma}_j$, $j = 0, 1, \dots, N$.*

Обозначим через $\hat{\Phi} = \hat{p} + |\hat{\mathbf{w}}|^2/2$ полное давление, соответствующее решению $(\hat{\mathbf{w}}, \hat{p})$.

ТЕОРЕМА 4.3 (закон Бернулли [23]). *Пусть условия (E-AX) выполнены. Тогда найдется множество $A_{\hat{\mathbf{w}}} \subset \mathfrak{H}^1(A_{\hat{\mathbf{w}}}) = 0$ такое, что каждая точка $x \in \overline{\mathcal{D}} \setminus (O_z \cup A_{\hat{\mathbf{w}}})$ является точкой Лебега⁶ для $\hat{\mathbf{w}}$, $\hat{\Phi}$ и для каждого компактного связного множества $K \subset \overline{\mathcal{D}} \setminus O_z$ имеет место следующее свойство: если*

$$\psi|_K = \text{const}, \quad (4.10)$$

то

$$\hat{\Phi}(x_1) = \hat{\Phi}(x_2) \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in K \setminus A_{\hat{\mathbf{w}}}. \quad (4.11)$$

⁶При определении точки Лебега $x \in (\partial \mathcal{D}) \setminus (O_z \cup A_{\hat{\mathbf{w}}})$ рассматривается естественное продолжение функций $\hat{\mathbf{w}}$, $\hat{\Phi}$ на всю полуплоскость P_+ константами 0 , $\hat{p}_j$ соответственно.

4.2. Получение противоречия. Предположим, что

$$\begin{aligned}\Gamma_j \cap O_{x_3} &\neq \emptyset, & j = 0, 1, \dots, M', \\ \Gamma_j \cap O_{x_3} &= \emptyset, & j = M' + 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Следующий результат был получен в [23].

ТЕОРЕМА 4.4. *Если условия (E-AX) выполнены, то $\hat{p}_0 = \dots = \hat{p}_{M'}$, где $\hat{p}_j$ суть константы из теоремы 4.2.*

Данный феномен связан с тем фактом, что ось симметрии может быть аппроксимирована линиями тока, на которых полное давление постоянно (см. теорему 4.4).

Рассмотрим три возможных случая.

(а) Максимум $\hat{\Phi}$ достигается на граничной компоненте, пересекающей ось симметрии:

$$\hat{p}_0 = \max_{j=0, \dots, N} \hat{p}_j = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \hat{\Phi}(x). \quad (4.12)$$

(b) Максимум $\hat{\Phi}$ достигается на граничной компоненте, не пересекающей ось симметрии:

$$\hat{p}_0 < \hat{p}_N = \max_{j=0, \dots, N} \hat{p}_j = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \hat{\Phi}(x). \quad (4.13)$$

(с) Максимум $\hat{\Phi}$ не достигается на $\partial\Omega$:

$$\max_{j=0, \dots, N} \hat{p}_j < \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \hat{\Phi}(x). \quad (4.14)$$

Рассмотрим случай (4.12). Добавляя константу к давлению p , можно предполагать, не умаляя общности, что

$$\hat{p}_0 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \hat{\Phi}(x) = 0. \quad (4.15)$$

Так как тождество $\hat{p}_0 = \hat{p}_1 = \dots = \hat{p}_N$ невозможно, то $\hat{p}_j < 0$ для некоторого индекса $j \in \{M' + 1, \dots, N\}$ (напомним, что по теореме 4.4 $\hat{p}_0 = \dots = \hat{p}_{M'} = 0$).

Теперь можно получить противоречие, следуя аргументам статей [23], [20]. Из (3.5a), (3.5b) получаем тождество

$$\begin{aligned}0 &= x \cdot \nabla \hat{p}(x) + x \cdot (\hat{\mathbf{w}}(x) \cdot \nabla) \hat{\mathbf{w}}(x) \\ &= \operatorname{div} [x \hat{p}(x) + (\hat{\mathbf{w}}(x) \cdot x) \hat{\mathbf{w}}(x)] - \hat{p}(x) \operatorname{div} x - |\hat{\mathbf{w}}(x)|^2 \\ &= \operatorname{div} [x \hat{p}(x) + (\hat{\mathbf{w}}(x) \cdot x) \hat{\mathbf{w}}(x)] - 3\hat{\Phi}(x) + \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{w}}(x)|^2.\end{aligned} \quad (4.16)$$

Интегрируя по области Ω , имеем

$$\begin{aligned}0 &\geq \int_{\Omega} \left[3\hat{\Phi}(x) - \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{w}}(x)|^2 \right] dx = \int_{\partial\Omega} \hat{p}(x) (x \cdot \mathbf{n}) ds = \sum_{j=0}^N \hat{p}_j \int_{\Gamma_j} (x \cdot \mathbf{n}) ds \\ &= - \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \int_{\Omega_j} \operatorname{div} x dx = -3 \sum_{j=1}^N \hat{p}_j |\Omega_j| > 0.\end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает доказательство для случая (4.12).

Для второго случая (4.13) можно окружить соответствующую максимуму компоненту Γ_N регулярным циклом, который отделяет Γ_N от оси симметрии O_z и на котором $\widehat{\Phi} \equiv c \in (\widehat{p}_0, \widehat{p}_N)$. Тем самым удастся исключить из рассмотрения некоторую окрестность сингулярной линии O_z . Тогда можно свести доказательство к плоскому случаю, разобранным в п. 3.3.1. Подобное же сведение удастся проделать и в третьем случае (4.14). Таким образом, показано, что предположения (E-NS-AX) ведут к противоречию во всех трех возможных случаях (4.12)–(4.14). Это завершает доказательство теоремы 4.1.

5. Дополнение к разделам 3 и 4

В этом разделе мы опишем конструкцию подобластей V_i со свойством (3.21). В силу замечания 3.1 и леммы 3.4, результаты Кронрода применимы к функции тока ψ . Определим полное давление на дереве Кронрода T_ψ (см. п. 3.1.2) следующим образом. Пусть $K \in T_\psi$ и $\text{diam } K > 0$. Возьмем произвольно точку $x \in K \setminus A_{\widehat{w}}$ и положим $\widehat{\Phi}(K) = \widehat{\Phi}(x)$. Это определение корректно вследствие закона Бернулли (см. теорему 3.2). Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5.1 [22]. Пусть $A, B \in T_\psi$, $\text{diam } A > 0$ и $\text{diam } B > 0$. Рассмотрим соответствующую дугу $[A, B] \subset T_\psi$, соединяющую A с B (см. лемму 3.2). Тогда сужение $\widehat{\Phi}|_{[A, B]}$ является непрерывной функцией.

Отметим, что доказательство этой леммы основано на законе Бернулли (см. теорему 3.2) и хорошо известных свойствах квазинепрерывности⁷ соболевских функций (см., например, [49; теорема 1 из § 4.8 и теорема 2 из § 4.9.2]).

Будем говорить, что множество $\mathcal{Z} \subset T_\psi$ имеет T -меру нуль, если $\mathfrak{H}^1(\{\psi(C) : C \in \mathcal{Z}\}) = 0$. Оказывается, что для функции $\widehat{\Phi}|_{T_\psi}$ имеет место некоторый аналог N -свойства Лузина.

ЛЕММА 5.2 [22]. Пусть $A, B \in T_\psi$, $\text{diam } A > 0$ и $\text{diam } B > 0$. Если множество $\mathcal{Z} \subset [A, B]$ имеет T -меру нуль, то $\mathfrak{H}^1(\{\widehat{\Phi}(C) : C \in \mathcal{Z}\}) = 0$.

Доказательство этой леммы основано на применении формулы коплощади (см., например, [50]).

Из лемм 3.5 и 5.2 получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Если $A, B \in T_\psi$, $\text{diam } A > 0$ и $\text{diam } B > 0$, то

$$\mathfrak{H}^1(\{\widehat{\Phi}(C) : C \in [A, B] \text{ и } C \text{ не является регулярным циклом}\}) = 0.$$

Обозначим $B_0, B_1, \dots, B_N$ элементы T_ψ такие, что $B_j \supset \Gamma_j$, $j = 0, 1, \dots, N$. Вследствие леммы 3.4 каждый элемент $C \in [B_i, B_j] \setminus \{B_i, B_j\}$ представляет собой компоненту связности множества уровня функции ψ такую, что множества B_i, B_j лежат в различных компонентах связности $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

Положим

$$\alpha = \max_{j=0, \dots, M} \min_{C \in [B_j, B_N]} \widehat{\Phi}(C).$$

⁷Свойство квазинепрерывности функции $\widehat{\Phi}$ состоит в следующем: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество $U \subset \mathbb{R}^2$ такое, что $\mathfrak{H}_\infty^1(U) < \varepsilon$ и сужение $\widehat{\Phi}|_{\overline{\Omega} \setminus U}$ непрерывно.

В силу свойства (3.18) имеем $\alpha < 0$. Возьмем последовательность положительных чисел $t_i \in (0, -\alpha)$, $i \in \mathbb{N}$, $t_{i+1} = t_i/2$, такую, что импликация

$$\widehat{\Phi}(C) = -t_i \Rightarrow C \text{ представляет собой регулярный цикл}$$

справедлива для каждого индекса $j = 0, 1, \dots, M$ и для всех $C \in [B_j, B_N]$. Существование такой последовательности вытекает из следствия 5.1.

Рассмотрим естественный порядок на дуге $[C_j, B_N]$, именно, $C' < C''$, если C'' ближе к B_N , чем C' (это означает, что C' и B_N лежат в разных компонентах связности множества $T_\psi \setminus \{C''\}$). Для $j = 0, 1, \dots, M$ и $i \in \mathbb{N}$ положим

$$A_i^j = \max\{C \in [B_j, B_N] : \widehat{\Phi}(C) = -t_i\}.$$

Другими словами, A_i^j является ближайшим к Γ_N элементом множества $\{C \in [B_j, B_N] : \widehat{\Phi}(C) = -t_i\}$.

По построению каждое из множеств A_i^j представляет собой регулярный цикл (см. рис. 4 для случая кольцеобразной области, $N = 1$). Некоторые из этих циклов A_i^j могут совпадать, т. е. равенства вида $A_i^{j_1} = A_i^{j_2}$ возможны (если дуги дерева Кронрода $[B_{j_1}, B_N]$ и $[B_{j_2}, B_N]$ имеют нетривиальное пересечение), но эта априорная возможность не влияет на наши аргументы. Отметим, что по построению циклы A_i^j или не пересекаются, или совпадают, т. е. если $A_i^{j_1} \neq A_i^{j_2}$, то $A_i^{j_1} \cap A_i^{j_2} = \emptyset$.

По определению регулярных циклов (см. пояснения к лемме 3.5), каждое множество A_i^j представляет собой C^1 -гладкую кривую, гомеоморфную единичной окружности, причем $A_i^j \subset \Omega$. В частности, для каждого $i \in \mathbb{N}$ компактное множество $\bigcup_{j=0}^M A_i^j$ отделено от $\partial\Omega$ и

$$\text{dist}\left(\bigcup_{j=0}^M A_i^j, \partial\Omega\right) > 0.$$

Тогда для каждого i и для достаточно малых значений $h > 0$ (эта малость зависит от i) имеем включение

$$\{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Gamma_N) < h\} \subset \Omega \setminus \left(\bigcup_{j=0}^M A_i^j\right).$$

Конечно, множество $\{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Gamma_N) < h\}$ связно для малых значений параметра h (оно гомеоморфно открытому кольцу). Следовательно, для малых h это множество содержится в некоторой компоненте связности открытого множества $\Omega \setminus \left(\bigcup_{j=0}^M A_i^j\right)$. Обозначим эту компоненту через V_i . В частности, $\Gamma_N \subset \partial V_i$ и

$$\Omega \cap \partial V_i = A_i^0 \cup \dots \cup A_i^M. \quad (5.1)$$

По построению последовательность областей V_i убывающая, т. е. $V_i \supset V_{i+1}$. Следовательно, последовательность множеств $(\partial\Omega) \cap (\partial V_i)$ невозрастающая:

$$(\partial\Omega) \cap (\partial V_i) \supseteq (\partial\Omega) \cap (\partial V_{i+1}). \quad (5.2)$$

Каждое из множеств $(\partial\Omega) \cap (\partial V_i)$ состоит из нескольких компонент Γ_l с $l > M$ (так как дуги $\bigcup_{j=0}^M A_i^j$ отделяют Γ_N от $\Gamma_0, \dots, \Gamma_M$, но не обязательно от других Γ_l). Поскольку имеется лишь конечный набор компонент Γ_l , ввиду свойства монотонности (5.2) приходим к заключению, что для больших i множество $(\partial\Omega) \cap (\partial V_i)$ не зависит от i . Поэтому можно предположить без потери общности, что $(\partial\Omega) \cap (\partial V_i) = \Gamma_K \cup \dots \cup \Gamma_N$, где $K \in \{M+1, \dots, N\}$. Следовательно,

$$\partial V_i = A_i^0 \cup \dots \cup A_i^M \cup \Gamma_K \cup \dots \cup \Gamma_N. \quad (5.3)$$

6. Решения с особенностями в области течения

6.1. Плоские течения. В этом разделе рассматриваются плоские и осесимметричные решения задачи протекания, порожденные источниками или стоками в области течения. Рассмотрим сначала плоскую задачу. Пусть Γ – гладкая жорданова кривая на плоскости, ограничивающая область Ω и содержащая внутри себя начало координат O . В точке O расположен источник или сток интенсивности F . Требуется найти решение системы (1.1), (1.2) в области $\Omega \setminus O$, удовлетворяющее условиям (1.3) и

$$u_r = \frac{F}{2\pi r} [1 + o(1)], \quad u_\varphi = o(1), \quad r \rightarrow 0, \quad (6.1)$$

где u_r , u_φ – радиальная и окружная компоненты скорости. Предположим, что начало координат является единственной особой точкой поля скоростей. Тогда из уравнения (1.2) и условий (1.3), (6.1) вытекает равенство

$$\int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = F \quad (6.2)$$

($\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к кривой Γ).

Задача (1.1)–(1.3), (6.1) является предельным случаем задачи о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости в криволинейном кольце с условиями протекания на его границах. Впервые она рассматривалась в статье [51], где анонсирован результат о ее разрешимости при малых значениях параметра $|F|/\nu$. Подробное доказательство ее разрешимости имеется в работе [52]. Другое доказательство приведено в статье А. Руссо и А. Тартальоне [53]. Специфика задачи (1.1)–(1.3), (6.1) состоит в том, что интеграл Дирихле искомой вектор-функции $\mathbf{u}(x)$ бесконечен в силу представления (6.1). Более того, решение этой задачи обладает бесконечной энергией. Однако можно надеяться, что регуляризованная задача после выделения из функций $\mathbf{u}$, p сингулярных составляющих допускает получение априорной оценки, гарантирующей ее разрешимость.

Уравнения плоского движения в полярных координатах (r, φ) получаются из системы (2.51), в которой следует заменить θ на φ , положить $u_z = 0$, а функции u_r , u_φ , p считать не зависящими от z . Введем в рассмотрение новые искомые функции

$$w_r = u_r - \frac{F}{2\pi r}, \quad w_\varphi = u_\varphi, \quad \bar{p} = p + \frac{F^2}{8\pi^2 r^2}. \quad (6.3)$$

Вследствие (2.51), вектор $\mathbf{w}$ и функция $\bar{p}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
 & w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r} w_\varphi \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} w_\varphi^2 + \frac{F}{2\pi r} \frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{F}{2\pi r^2} w_r \\
 & = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2} w_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\
 & w_r \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} w_\varphi \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} w_r w_\varphi + \frac{F}{2\pi r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + \frac{F}{2\pi r^2} w_\varphi \\
 & = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2} w_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right), \\
 & \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Условие (1.3) в новых терминах переписывается в виде

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{a}}(x), \quad x \in \Gamma, \tag{6.5}$$

где компоненты вектора $\tilde{\mathbf{a}}$ имеют вид $\tilde{a}_r = a_r - F/(2\pi r)$, $\tilde{a}_\varphi = a_\varphi$. В силу (6.2) этот вектор удовлетворяет условию нулевого потока:

$$\int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \tag{6.6}$$

Условие (6.6) позволяет переформулировать задачу (6.4), (6.5) в терминах функции тока $\psi(r, \varphi)$, связанной с компонентами вектора $\mathbf{w}$ соотношениями

$$w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad w_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{6.7}$$

(Ранее, до выделения сингулярной составляющей поля скоростей, переход к функции тока был непродуктивен, так как функция тока точечного источника в плоской задаче является многозначной функцией.) Функция тока удовлетворяет уравнению

$$\nu \Delta^2 \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta \psi, \psi)}{\partial(r, \varphi)} - \frac{F}{2\pi r} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} = 0. \tag{6.8}$$

Краевое условие (6.5) в терминах функции тока переписывается в виде

$$\psi = a(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = b(x), \quad x \in \Gamma. \tag{6.9}$$

Функции a, b выражаются через компоненты вектора $\tilde{\mathbf{a}}$. Если компоненты этого вектора принадлежат классу $W^{1/2,2}(\Gamma)$, то справедливы включения

$$a \in W^{3/2,2}(\Gamma), \quad b \in W^{1/2,2}(\Gamma). \tag{6.10}$$

Далее предполагается, что эти условия выполнены.

Перейдем в задаче (6.8), (6.9) к новой искомой функции $\chi = \psi - f$ так, чтобы

$$f = a, \quad \frac{\partial f}{\partial n} = b, \quad x \in \Gamma. \quad (6.11)$$

Выбором функции f мы распорядимся позже. Функция χ является решением краевой задачи

$$\nu \Delta^2 \chi - \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta \chi, \chi)}{\partial(r, \varphi)} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta \chi, f)}{\partial(r, \varphi)} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta f, \chi)}{\partial(r, \varphi)} - \frac{F}{2\pi r} \frac{\partial \Delta \chi}{\partial r} = g, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}; \quad (6.12)$$

$$\chi = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (6.13)$$

Здесь обозначено

$$g = -\nu \Delta^2 f + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta f, f)}{\partial(r, \varphi)} + \frac{F}{2\pi r} \frac{\partial \Delta f}{\partial r}. \quad (6.14)$$

Выберем число γ , $0 < \gamma < \text{dist}(\Gamma, \{0\})$, и обозначим через Ω_γ область, ограниченную кривой Γ и окружностью $C_\gamma = \{x: r = \gamma\}$. Обозначим через $\dot{H}^2(\Omega_\gamma; r)$ гильбертово пространство, полученное замыканием множества функций класса $C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ в норме

$$\|\eta\|_{\dot{H}^2(\Omega_\gamma; r)}^2 = \int_{\Omega_\gamma} \left(\eta_{rr}^2 + \frac{2}{r^2} \eta_{r\varphi}^2 + \frac{1}{r^4} \eta_{\varphi\varphi}^2 + \frac{1}{r^2} \eta_r^2 \right) r \, dr \, d\varphi.$$

Устремив γ к нулю, мы получим гильбертово пространство, которое обозначим $\dot{V}(\Omega; r)$. Норма в этом пространстве определяется предыдущим равенством, в котором область интегрирования заменяется на Ω . Функции $\eta \in \dot{V}(\Omega; r)$ непрерывны в области $\bar{\Omega}$ и обращаются в нуль при $r = 0$. Имеет место оценка $|\eta| \leq C_0 r^\alpha \|\eta\|_{\dot{H}^2(\Omega; r)}$, $(r, \varphi) \in \bar{\Omega}$, $0 < \alpha < 1$, с постоянной $C_0 > 0$, зависящей от области Ω и показателя α .

Функцию $\chi \in \dot{V}(\Omega; r)$ назовем обобщенным решением задачи (6.12), (6.13), если для любого $\eta \in \dot{V}(\Omega; r)$ выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \left(\chi_{rr} \eta_{rr} + \frac{2}{r^2} \chi_{r\varphi} \eta_{r\varphi} + \frac{1}{r^4} \chi_{\varphi\varphi} \eta_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} \chi_r \eta_r \right) r \, dr \, d\varphi \\ & + \int_{\Omega} \left[\frac{\Delta \chi}{r} \frac{\partial(\chi, \eta)}{\partial(r, \varphi)} + \frac{\Delta \chi}{r} \frac{\partial(f, \eta)}{\partial(r, \varphi)} + \frac{\Delta f}{r} \frac{\partial(\chi, \eta)}{\partial(r, \varphi)} + \frac{F \Delta \chi}{2\pi r} \eta_r \right] r \, dr \, d\varphi \\ & = \int_{\Omega} g \eta r \, dr \, d\varphi. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Следующая лемма является аналогом леммы Хопфа (см. лемму 2.1).

ЛЕММА 6.1. Пусть $\Gamma \in C^\infty$ – жорданова кривая, содержащая внутри себя начало координат. Предположим, что функции a , b , заданные на этой кривой, удовлетворяют условиям (6.10). Тогда существует такая функция

$f \in W^{2,2}(\Omega)$, что выполнены условия (6.11) и для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Omega} \Delta \chi \frac{\partial(f, \chi)}{\partial(r, \varphi)} dx \right| \leq \varepsilon \|\chi\|_{\dot{H}^2(\Omega; r)}^2 \quad \forall \chi \in \dot{V}(\Omega; r). \quad (6.16)$$

Доказательство леммы 6.1 изложено в работе [52].

ЛЕММА 6.2. *Предположим, что выполнены условия леммы 6.1. Если при этом величина F такова, что*

$$|F| < 2\pi\nu, \quad (6.17)$$

то для любого обобщенного решения χ задачи (6.12), (6.13) имеет место оценка

$$\|\chi\|_{\dot{H}^2(\Omega; r)} \leq C_* \quad (6.18)$$

с постоянной $C_ = C_*(\nu, F, \Omega, a, b)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в тождестве (6.15) $\eta = \chi$. Оно примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\nu \left(\chi_{rr}^2 + \frac{2}{r^2} \chi_{r\varphi}^2 + \frac{1}{r^4} \chi_{\varphi\varphi}^2 + \frac{1}{r^2} \chi_r^2 \right) + \frac{F}{2\pi} \left(\frac{\chi_r^2}{r^2} - \frac{\chi_{\varphi}^2}{r^4} \right) + \frac{\Delta \chi}{r} \frac{\partial(f, \chi)}{\partial(r, \varphi)} \right] r dr d\varphi \\ & = \int_{\Omega} g \chi r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда, выбирая функцию f в соответствии с леммой 6.1 и учитывая представление (6.14) функции g в терминах f и ее производных, мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\nu \left(\chi_{rr}^2 + \frac{2}{r^2} \chi_{r\varphi}^2 + \frac{1}{r^4} \chi_{\varphi\varphi}^2 + \frac{1}{r^2} \chi_r^2 \right) - \frac{|F|}{2\pi} \left(\frac{\chi_r^2}{r^2} + \frac{\chi_{\varphi}^2}{r^4} \right) \right] r dr d\varphi \\ & \leq \varepsilon \|\chi\|_{\dot{H}^2(\Omega; r)}^2 + (\nu \|f\|_{W^{2,2}(\Omega)} + c \|f\|_{W^{2,2}(\Omega)}^2) \|\chi\|_{\dot{H}^2(\Omega; r)}, \end{aligned}$$

где постоянная c зависит лишь от области Ω . Для завершения доказательства леммы 6.2 достаточно положить

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} - \frac{|F|}{4\pi},$$

что приводит к требуемой априорной оценке нормы χ :

$$\|\chi\|_{\dot{H}^2(\Omega; r)} \leq 4\pi(2\pi\nu - |F|)^{-1} (\nu \|f\|_{W^{2,2}(\Omega)} + c \|f\|_{W^{2,2}(\Omega)}^2) = C_* \quad (6.19)$$

(здесь учтено, что у производной периодической функции среднее значение по периоду равно нулю).

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены условия лемм 6.1 и 6.2. Тогда задача (6.12), (6.13) имеет по крайней мере одно обобщенное решение $\chi \in \dot{V}(\Omega; r)$ и для этого решения справедлива оценка (6.19).

Доказательство теоремы 6.1 основано на естественной регуляризации задачи (6.12), (6.13) (см. [52]). Приведем ее краткое доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти решение уравнения (6.12) в области Ω_γ , удовлетворяющее условиям (6.13) и

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad x \in C_\gamma. \quad (6.20)$$

Перейдем в задаче (6.12), (6.13), (6.20) к новой искомой функции $\chi^{(\gamma)} = \psi - f^{(\gamma)}$, где функция $f^{(\gamma)}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} f^{(\gamma)} &= a(x), \quad \frac{\partial f^{(\gamma)}}{\partial n} = b(x), \quad x \in \Gamma; \\ f^{(\gamma)} &= 0, \quad \frac{\partial f^{(\gamma)}}{\partial r} = 0, \quad x \in C_\gamma. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Функция $\chi^{(\gamma)}$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} \nu \Delta^2 \chi^{(\gamma)} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta \chi^{(\gamma)}, \chi^{(\gamma)})}{\partial(r, \varphi)} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta \chi^{(\gamma)}, f^{(\gamma)})}{\partial(r, \varphi)} \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta f^{(\gamma)}, \chi^{(\gamma)})}{\partial(r, \varphi)} - \frac{F}{2\pi r} \frac{\partial \Delta \chi^{(\gamma)}}{\partial r} = g^{(\gamma)} \end{aligned} \quad (6.22)$$

и удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} \chi^{(\gamma)} &= 0, \quad \frac{\partial \chi^{(\gamma)}}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma; \\ \chi^{(\gamma)} &= 0, \quad \frac{\partial \chi^{(\gamma)}}{\partial r} = 0, \quad x \in C_\gamma. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Здесь обозначено

$$g^{(\gamma)} = -\nu \Delta^2 f^{(\gamma)} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta f^{(\gamma)}, f^{(\gamma)})}{\partial(r, \varphi)} + \frac{F}{2\pi r} \frac{\partial \Delta f^{(\gamma)}}{\partial r}. \quad (6.24)$$

Функцию $\chi^{(\gamma)} \in \dot{H}^2(\Omega_\gamma; r)$ назовем обобщенным решением задачи (6.22), (6.23), если для любого $\eta^{(\gamma)} \in \dot{H}^2(\Omega_\gamma; r)$ выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega_\gamma} \left(\chi_{rr}^{(\gamma)} \eta_{rr}^{(\gamma)} + \frac{2}{r^2} \chi_{r\varphi}^{(\gamma)} \eta_{r\varphi}^{(\gamma)} + \frac{1}{r^4} \chi_{\varphi\varphi}^{(\gamma)} \eta_{\varphi\varphi}^{(\gamma)} + \frac{1}{r^2} \chi_r^{(\gamma)} \chi_r^{(\gamma)} \right) r dr d\varphi \\ + \int_{\Omega_\gamma} \left[\frac{\Delta \chi^{(\gamma)}}{r} \frac{\partial(\chi^{(\gamma)}, \eta^{(\gamma)})}{\partial(r, \varphi)} + \frac{\Delta \chi^{(\gamma)}}{r} \frac{\partial(f^{(\gamma)}, \eta^{(\gamma)})}{\partial(r, \varphi)} \right. \\ \left. + \frac{\Delta f^{(\gamma)}}{r} \frac{\partial(\chi^{(\gamma)}, \eta^{(\gamma)})}{\partial(r, \varphi)} + \frac{F \Delta \chi^{(\gamma)}}{2\pi r} \eta_r^{(\gamma)} \right] r dr d\varphi \\ = \int_{\Omega_\gamma} g^{(\gamma)} \eta^{(\gamma)} r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Рассмотрим семейство задач (6.22), (6.23), в которых $\gamma \in (0, \gamma_0]$. Разрешимость каждой из них доказывается известными методами (см., например, [2], [7]). В основе доказательства лежат аналогии лемм 6.1, 6.2. При любом $\gamma \in (0, \gamma_0]$ существует функция $f^{(\gamma)} \in \mathring{H}^2(\Omega_\gamma; r)$, удовлетворяющая условиям (6.21) и такая, что при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Omega_\gamma} \Delta \chi^{(\gamma)} \frac{\partial(f^{(\gamma)}, \chi^{(\gamma)})}{\partial(r, \varphi)} dr d\varphi \right| \leq \varepsilon \|\chi^{(\gamma)}\|_{\mathring{H}^2(\Omega_\gamma; r)}^2 \quad (6.26)$$

для произвольного $\chi^{(\gamma)} \in \mathring{H}^2(\Omega_\gamma; r)$. Доказательство неравенства (6.26) почти дословно повторяет доказательство леммы 6.1. Важно отметить, что величина ε в неравенстве (6.26) может быть выбрана одной и той же для всех $\gamma \in (0, \gamma_0]$.

Далее доказывается утверждение, аналогичное лемме 6.2. Пусть выполнены условия леммы 6.1 и величина F удовлетворяет неравенству (6.17). Тогда любое обобщенное решение $\chi^{(\gamma)}$ задачи (6.22), (6.23) допускает оценку

$$\|\chi^{(\gamma)}\|_{\mathring{H}^2(\Omega_\gamma; r)} \leq C \quad (6.27)$$

с постоянной C , не зависящей от γ , если $0 < \gamma < \gamma_0$. Теперь остается в задаче (6.22), (6.20) перейти к пределу при $\gamma \rightarrow 0$. С этой целью продолжим нулем функции $\chi^{(\gamma)}$, $f^{(\gamma)}$ в $\Omega \setminus \Omega_\gamma$, сохранив за ними прежние обозначения. Продолженные функции определены во всей области Ω и имеют конечные нормы в пространстве $\mathring{H}^2(\Omega; r)$. В силу оценки (6.26), нормы функций $\chi^{(\gamma)}$ ($0 < \gamma \leq \gamma_0$) ограничены в указанном пространстве. Существует слабый предел χ семейства функций $\chi^{(\gamma)}$, $\gamma \in (0, \gamma_0]$, когда $\gamma \rightarrow 0$. Предельная функция принадлежит пространству $\mathring{V}(\Omega; r)$. Слабо компактное в пространстве $\mathring{H}^2(\Omega; r)$ множество функций $\chi^{(\gamma)}$, $\gamma \in [0, \gamma_0]$, компактно в пространстве $W^{1,4}(\Omega)$. Это позволяет осуществить предельный переход в тождестве (6.25) при $\gamma \rightarrow 0$. Предельная функция χ удовлетворяет тождеству (6.15), что и завершает доказательство теоремы 6.1.

6.2. Осесимметричные течения. Рассмотрим теперь осесимметричную задачу в ограниченной области $Q \in \mathbb{R}^3$, граница которой является поверхностью вращения $S \in C^\infty$. Меридиональное сечение области Q обозначим через Ω . Граница области Ω состоит из дуги Γ и отрезка $\Lambda = \{r, z: r = 0, z_1 < z < z_2\}$, на котором распределены источники или стоки с постоянной линейной плотностью F (см. рис. 6). Требуется найти решение $\mathbf{u} = (u_r, u_z)$, p системы (2.51) в области Ω , которое удовлетворяет условиям

$$u_r = \frac{F}{2\pi r} + a_r, \quad u_z = a_z, \quad (r, z) \in \Gamma, \quad (6.28)$$

$$u_r = \frac{F}{2\pi r} [1 + o(1)], \quad u_z = o(1), \quad r \rightarrow 0, \quad z \in (z_1, z_2), \quad (6.29)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (6.30)$$

Рис. 6. Меридиональное сечение области Q со стоками на оси симметрии

Предположим, что существует соленоидальное продолжение $\mathbf{b}$ векторного поля $\mathbf{a}$ в область Ω с конечным интегралом Дирихле. Введем в рассмотрение новые искомые функции

$$w_r = u_r - \frac{q}{2\pi r} - b_r, \quad w_z = u_z - b_z, \quad \bar{p} = p + \frac{q^2}{8\pi^2 r^2}. \quad (6.31)$$

Вектор $\mathbf{w} = (w_r, w_z)$ и функция $\bar{p}$ удовлетворяют в области Ω системе уравнений

$$\begin{aligned} & w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} + \frac{F}{2\pi r} \frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{F}{2\pi r^2} w_r + b_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + b_z \frac{\partial w_r}{\partial z} + w_r \frac{\partial b_r}{\partial r} + b_z \frac{\partial w_r}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} - \frac{w_r}{r^2} \right) + g_r, \\ & u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{F}{2\pi r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + b_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + b_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{\partial b_z}{\partial r} + b_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ & - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \right) + g_z, \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial(r w_r)}{\partial r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

и краевому условию

$$\mathbf{w} = 0, \quad (r, z) \in \Gamma. \quad (6.33)$$

Здесь g_r, g_z — компоненты вектора $\mathbf{g}$,

$$\mathbf{g} = \nu \Delta \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} - \frac{F}{2\pi} \nabla \left(\frac{\mathbf{b}}{r} \right).$$

Определим функциональное пространство $H(\Omega; r)$ как замыкание множества соленоидальных осесимметричных вектор-функций $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)$ в норме интеграла Дирихле

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\Omega, r)}^2 = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{v_r^2}{r^2} \right] r \, dr \, dz.$$

Вектор-функция $\mathbf{w} \in H(\Omega; r)$ называется обобщенным решением задачи (6.32), (6.33), если интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \left[\nu \left(\nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} + \frac{u_r h_r}{r^2} \right) - \mathbf{w} \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} - \mathbf{w} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} + \frac{F}{2\pi r} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \cdot \boldsymbol{\eta} - \frac{u_r h_r}{r} \right) \right] r \, dr \, dz = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} r \, dr \, dz$$

выполнено для любого $\boldsymbol{\eta} \in H(\Omega; r)$. Полагая в этом тождестве $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}$, мы приходим к соотношению

$$\int_{\Omega} \left[\nu \left(\nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} + \frac{u_r^2}{r^2} \right) - \frac{F u_r^2}{2\pi r^2} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} \right] r \, dr \, dz = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} r \, dr \, dz. \quad (6.34)$$

Теперь заметим, что продолжение вектора $\mathbf{a}$ в область Ω можно построить так, чтобы для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} r \, dr \, dz \right| \leq \varepsilon \|\mathbf{w}\|_{H(\Omega; r)}^2 \quad \forall \mathbf{w} \in H(\Omega; r). \quad (6.35)$$

Построение такого продолжения в терминах функции тока осесимметричного течения выполнено в работе [52]. Выбирая $\varepsilon = (4\pi)^{-1}(2\pi\nu - F)$ и предполагая, что

$$F < 2\pi\nu, \quad (6.36)$$

получаем из (6.34), (6.35) априорную оценку

$$\|\mathbf{w}\|_{H(\Omega; r)} \leq C_1 (\nu \|\mathbf{b}\|_{H(\Omega; r)} + C_2 \|\mathbf{b}\|_{H(\Omega; r)}^2), \quad (6.37)$$

где C_2 зависит лишь от области Ω , а в качестве C_1 можно взять $4\pi(2\pi\nu - F)^{-1}$, если $0 \leq F < 2\pi\nu$, и $2/\nu$, если $F \leq 0$. Оценка (6.37) является ключевой при доказательстве следующей теоремы [52].

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть соленоидальное продолжение $\mathbf{b}$ вектора $\mathbf{a}$ (6.28) в область Ω имеет конечный интеграл Дирихле. Если величина F удовлетворяет неравенству (6.36), то существует обобщенное решение $\mathbf{w} \in H(\Omega; r)$ задачи (6.32), (6.33) и его норма допускает оценку (6.37).

Примечателен тот факт, что на параметр F здесь накладывается одностороннее ограничение: линейная плотность распределенных стоков может быть любой. В то же время разрешимость плоской задачи с источником или стоком установлена лишь при ограничении (6.17) на модуль F [51], [52]. С другой стороны, никаких ограничений на нормы функций $\mathbf{a}$ в обеих задачах не накладывается.

7. Заключение

Изложенная выше методика не допускает обобщения на трехмерные задачи. Проблема Лерэ решена лишь в осесимметричной области, а в произвольной трехмерной области с многосвязной границей остается открытой. Мы полагаем, что первым шагом в этом направлении будет изучение задачи протекания с дополнительными условиями симметрии относительно некоторой плоскости или относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей (но без условия осесимметричности). Основные трудности в анализе такой задачи могут быть поняты, когда область течения является сферическим слоем. Идея рассмотрения симметричных решений задачи протекания, принадлежащая Ч. Дж. Эмику [17] и реализованная им для плоских течений, позволяет свести задачу протекания к задаче в области с односвязной границей путем “разрезания” исходной области вдоль линии симметрии. Представляется вполне правдоподобной следующая гипотеза. Пусть течение имеет две плоскости симметрии, которые пересекают каждую связную компоненту границы области течения. Тогда (при выполнении естественных условий гладкости входных данных) задача протекания имеет по крайней мере одно решение.

В работах [21] и [24] исследовалась плоская симметричная внешняя задача (1.1)–(1.3) и трехмерная осесимметричная внешняя задача. В обоих случаях была доказана разрешимость задачи без ограничений на потоки граничного поля скоростей. Однако для произвольных внешних плоских или трехмерных областей проблема Лерэ остается открытой. По-видимому, для ее решения нужны существенно новые идеи.

В работах [54], [13], [55] исследовалась стационарная задача (1.1)–(1.3) в некомпактных областях Ω с многосвязной границей. В упомянутых работах была доказана разрешимость задачи (1.1)–(1.3) при условии малости потоков граничного векторного поля через “внутренние” компоненты связности границы. При этом потоки граничного поля через “внешние” компоненты произвольны. В [54], [13] были найдены решения с конечным интегралом Дирихле, а в [55] интеграл Дирихле может быть как конечен, так и бесконечен, в зависимости от геометрии выходов области Ω на бесконечность. Было бы интересно распространить эти результаты на случай произвольных потоков граничного поля через “внутренние” компоненты границы.

Еще одна интересная задача связана с изучением пограничных слоев вблизи участков интенсивного вдува жидкости на проницаемой границе области течения. Самый простой вариант постановки такой задачи состоит в следующем. Рассматривается плоское течение в криволинейном кольце Ω с внешней границей Γ_0 и внутренней границей Γ_1 . Предположим, что нормальные компоненты скорости не обращаются в нуль на кривых Γ_0 и Γ_1 , и обозначим через F_0 и F_1 соответствующие потоки скорости (ясно, что $F_1 = -F_0$). В этом случае асимптотическое решение задачи протекания при $Re = |F_1|/\nu \rightarrow \infty$ может быть построено с помощью модификации классического метода Вишика–Люстерника [56]. В противоположность теории пограничного слоя в задаче обтекания [34], здесь толщина пограничного слоя при больших значениях Re имеет порядок Re^{-1} . Пограничный слой локализован вблизи кривой Γ_1 , если $F_1 > 0$, или вблизи

кривой Γ_0 , если $F_1 < 0$. Задача обоснования формальной асимптотики как главного члена решения задачи протекания при $Re \rightarrow \infty$ в общем случае весьма нетривиальна. Однако есть надежда на такое обоснование в симметричной плоской задаче, где имеются эффективные априорные решения [14]. Естественный подход к обоснованию состоит в линеаризации задачи на приближенном решении и последующем применении теоремы Канторовича о сходимости метода Ньютона. К сожалению, мы пока не располагаем достаточной информацией относительно спектральных свойств линеаризованного несамосопряженного оператора в задаче протекания при больших значениях Re , поскольку зависимость асимптотического решения от параметра Re не является явной.

Систематическое изучение краевых задач для уравнений Навье–Стокса с особенностями в области течения началось менее десяти лет назад, хотя примеры точных (в частности, автомоделных) сингулярных решений этих уравнений хорошо известны [34]. Сингулярность в плоской задаче с источником или стоком, рассмотренной в работах [52], [53], характеризуется безразмерным параметром $|F|/\nu = Re$, который можно назвать локальным числом Рейнольдса. Предложенные способы доказательства разрешимости плоской задачи не позволяют рассмотреть случай больших чисел Рейнольдса. Общий случай, по-видимому, требует совершенно новых идей, но мы надеемся, что уже имеющиеся методы позволят это сделать при дополнительном предположении о наличии линии симметрии течения.

Полученные в [52], [53] результаты могут быть распространены в нескольких направлениях. Рассмотрим снова плоские течения с особенностями, но теперь эти особенности расположены не внутри области течения, а на ее границе Γ . Более конкретно, на кривой Γ имеются две точки A^+ и A^- , в которые помещены источник и сток с интенсивностями F и $-F$ соответственно. На остальной части границы заданы условия прилипания. Имеет ли такая задача для системы (1.1), (1.2) решение, если величина $|F|/\nu = Re$ мала? В качестве первого шага в решении этой задачи можно рассмотреть случай, когда участки кривой Σ вблизи точек A^+ и A^- являются отрезками прямых, пересекающихся под углом β . Тогда сингулярная часть решения будет описываться решением задачи о течении в плоском диффузоре [34], локализованным около угловых точек. Это решение единственно при малых Re и $\beta < \beta^* \approx 2.25$ [57]. После выделения указанной особенности поля скоростей мы приходим к задаче типа той, что изучена в разделе 6, но осложненной наличием угловых точек границы. На основании результатов работы В. А. Кондратьева [58] можно надеяться, что интеграл Дирихле регулярной составляющей поля скорости будет конечен для достаточно малых углов β и чисел Рейнольдса Re .

Было бы также интересно рассмотреть плоские течения с особенностями на границе области, когда источник или сток расположен в вершине угловой точки с нулевым углом.

Существенно более трудными представляются задачи с особенностями более высокого порядка, чем исследованные в работах [52], [53]. Примером такой задачи может служить осесимметричная задача о точечном источнике или стоке в области течения. Здесь даже выбор подходящего функционального пространства не очевиден. Причина в том, что после линеаризации уравне-

ний (1.1), (1.2) на течении, порожденном источником или стоком, возникающие члены с производными первого порядка не будут подчинены оператору Стокса в пространствах Соболева или Кондратьева. Кроме того, мощность точечного источника F и вязкость в трехмерном случае имеют разную размерность, и введение локального числа Рейнольдса не является продуктивным.

Как отмечалось во введении, трудности исследования решений уравнения Навье–Стокса в областях с многосвязной границей специфичны для стационарных задач. Они не возникают в случае начально-краевых задач. Однако имеются нестационарные задачи без начальных условий, для которых многосвязность границы существенно осложняет анализ. К ним относятся задачи с периодическими по времени значениями вектора скорости, заданного на границе области течения. В этом случае естественно ожидать существование периодического по времени решения задачи. Теорема существования периодических решений уравнений Навье–Стокса с однородными краевыми условиями при наличии периодических внешних сил была установлена В.И. Юдовичем [59]. В недавней работе Т. Кобаяши [60] рассмотрена задача протекания в плоской симметричной области с заданным на ее границе вектором скорости, который также является симметричным и периодически зависит от времени. Доказано существование периодического по времени решения при любых значениях частичных расходов. Было бы интересно рассмотреть эту задачу в произвольной плоской ограниченной области, в осесимметричной трехмерной ограниченной области, а также в различных классах неограниченных областей.

Кроме того, представляется целесообразным рассмотреть задачу о пульсирующем источнике или стоке в плоской области (аналог задачи, изученной в п. 6.1). Если мощность источника или стока периодически зависит от времени и соответствующее число Рейнольдса не очень велико, можно рассчитывать на разрешимость такой задачи в классе периодических решений.

Список литературы

- [1] J. Leray, “Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l’hydrodynamique”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **12** (1933), 1–82.
- [2] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, 2-е изд., Наука, М., 1970, 288 с.; англ. пер. 1-го изд.: О. А. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, 2nd English ed., rev. and enlarged, Math. Appl., **2**, Gordon and Breach Science Publishers, New York–London–Paris, 1969, xviii+224 pp.
- [3] E. Hopf, “Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen”, *Math. Nachr.*, **4**:1-6 (1951), 213–231.
- [4] V.I. Yudovich, “Eleven great problems of mathematical hydrodynamics”, *Mosc. Math. J.*, **3**:2 (2003), 711–737.
- [5] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, “О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 9, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **59**, Изд-во «Наука», Ленингр. отд., Л., 1976, 81–116; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, “Some problems of vector analysis and generalized formulations of boundary-value problems for the Navier–Stokes equations”, *J. Soviet Math.*, **10**:2 (1978), 257–286.

- [6] E. Hopf, “Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik”, *Math. Ann.*, **117**:1 (1941), 764–775.
- [7] H. Fujita, “On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier–Stokes equation”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1*, **9** (1961), 59–102.
- [8] R. Finn, “On the steady-state solutions of the Navier–Stokes equations. III”, *Acta Math.*, **105**:3-4 (1961), 197–244.
- [9] G.P. Galdi, “On the existence of steady motions of a viscous flow with non-homogeneous boundary conditions”, *Matematiche (Catania)*, **46**:1 (1991), 503–524.
- [10] Л. И. Сазонов, “О существовании стационарного симметричного решения двумерной задачи о протекании жидкости”, *Матем. заметки*, **54**:6 (1993), 138–141; англ. пер.: L. I. Sazonov, “On the existence of a stationary symmetric solution of the two-dimensional fluid flow problem”, *Math. Notes*, **54**:6 (1993), 1280–1283.
- [11] W. Borchers, K. Pileckas, “Note on the flux problem for stationary incompressible Navier–Stokes equations in domains with a multiply connected boundary”, *Acta Appl. Math.*, **37**:1-2 (1994), 21–30.
- [12] H. Kozono, T. Yanagisawa, “Leray’s problem on the stationary Navier–Stokes equations with inhomogeneous boundary data”, *Math. Z.*, **262**:1 (2009), 27–39.
- [13] J. Neustupa, “A new approach to the existence of weak solutions of the steady Navier–Stokes system with inhomogeneous boundary data in domains with noncompact boundaries”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **198**:1 (2010), 331–348.
- [14] H. Fujita, “On stationary solutions to Navier–Stokes equation in symmetric plane domains under general outflow condition”, *Navier–Stokes equations: theory and numerical methods* (Varenna, 1997), Pitman Res. Notes Math. Ser., **388**, Longman, Harlow, 1998, 16–30.
- [15] V. V. Pukhnachev, “Viscous flows in domains with a multiply connected boundary”, *New directions in mathematical fluid mechanics*, Adv. Math. Fluid Mech., Birkhäuser Verlag, Basel, 2010, 333–348.
- [16] H. Morimoto, “A remark on the existence of 2-D steady Navier–Stokes flow in bounded symmetric domain under general outflow condition”, *J. Math. Fluid Mech.*, **9**:3 (2007), 411–418.
- [17] Ch. J. Amick, “Existence of solutions to the nonhomogeneous steady Navier–Stokes equations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:6 (1984), 817–830.
- [18] М. В. Коробков, “Закон Бернулли при минимальных предположениях гладкости”, *Докл. РАН*, **436**:6 (2011), 727–730; англ. пер.: M. V. Korobkov, “Bernoulli law under minimal smoothness assumptions”, *Dokl. Math.*, **83**:1 (2011), 107–110.
- [19] M. V. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo, “On the flux problem in the theory of steady Navier–Stokes equations with nonhomogeneous boundary conditions”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **207**:1 (2013), 185–213.
- [20] M. V. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo, “Steady Navier–Stokes system with nonhomogeneous boundary conditions in the axially symmetric case”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIB Méc.*, **340**:3 (2012), 115–119.
- [21] M. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo, “The existence of a solution with finite Dirichlet integral for the steady Navier–Stokes equations in a plane exterior symmetric domain”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **101**:3 (2014), 257–274.
- [22] M. V. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo, “Solution of Leray’s problem for stationary Navier–Stokes equations in plane and axially symmetric spatial domains”, *Ann. of Math.* (2), **181**:2 (2015), 769–807.

- [23] M. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo, “The existence theorem for steady Navier–Stokes equations in the axially symmetric case”, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5), 2015 (to appear), DOI: 10.2422/2036-2145.201204.003; 2011 (v2 – 2012), 36 pp., arXiv: 1110.6301.
- [24] M. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo, *The existence theorem for the steady Navier–Stokes problem in exterior axially symmetric 3D domains*, 2014, 75 pp., arXiv: 1403.6921.
- [25] J. Bourgain, M. V. Korobkov, J. Kristensen, “On the Morse–Sard property and level sets of Sobolev and BV functions”, *Rev. Mat. Iberoam.*, **29**:1 (2013), 1–23.
- [26] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973, 342 с.; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970, xiv+290 pp.
- [27] A. Takeshita, “A remark on Leray’s inequality”, *Pacific J. Math.*, **157**:1 (1993), 151–158.
- [28] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations. Steady-state problems*, 2nd ed., Springer Monogr. Math., Springer, New York, 2011, xiv + 1018 pp.
- [29] R. Farwig, H. Kozono, T. Yanagisawa, “Leray’s inequality in general multi-connected domains in $\mathbb{R}^n$ ”, *Math. Ann.*, **354**:1 (2012), 137–145.
- [30] J. G. Heywood, “On the impossibility, in some cases, of the Leray–Hopf condition for energy estimates”, *J. Math. Fluid Mech.*, **13**:3 (2011), 449–457.
- [31] О. А. Ладыженская, “Исследование уравнения Навье–Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости”, *УМН*, **14**:3(87) (1959), 75–97; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, “Investigation of the Navier–Stokes equation for a stationary flow of an incompressible fluid”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963, 173–197.
- [32] И. И. Ворович, В. И. Юдович, “Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости”, *Матем. сб.*, **53(95)**:4 (1961), 393–428.
- [33] Л. В. Капитанский, К. И. Пилецкас, “О пространствах соленоидальных векторных полей и краевых задачах для уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами”, *Краевые задачи математической физики*. 12, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **159**, 1983, 5–36; англ. пер.: L. V. Kapitanskii, K. I. Pileckas, “Spaces of solenoidal vector fields and boundary value problems for the Navier–Stokes equations in domains with noncompact boundaries”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **159** (1984), 3–34.
- [34] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, ч. 2, 4-е изд., Физматгиз, М., 1963, 728 с.; нем. пер. 3-го изд.: N. E. Kotchin, I. A. Kibel, N. V. Rose, *Theoretische Hydromechanik*, v. II, Akademie-Verlag, Berlin, 1955, viii+569 pp.
- [35] H. Fujita, H. Morimoto, “A remark on the existence of the Navier–Stokes flow with non-vanishing outflow condition”, *Nonlinear waves* (Sapporo, 1995), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **10**, Gakkōtoshō, Tokyo, 1997, 53–61.
- [36] A. Russo, G. Starita, “On the existence of steady-state solutions to the Navier–Stokes system for large fluxes”, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5), **7**:1 (2008), 171–180.
- [37] H. Morimoto, “A solution to the stationary Navier–Stokes equations under the boundary condition with non-vanishing outflow”, *Mem. Inst. Sci. Technol. Meiji Univ.*, **31** (1992), 7–12.

- [38] H. Morimoto, “Stationary Navier–Stokes equations with non-vanishing outflow condition”, *Hokkaido Math. J.*, **24**:3 (1995), 641–648.
- [39] H. Morimoto, S. Ukai, “Perturbation of the Navier–Stokes flow in an annular domain with the non-vanishing outflow condition”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **3**:1 (1996), 73–82.
- [40] H. Fujita, H. Morimoto, H. Okamoto, “Stability analysis of Navier–Stokes flows in annuli”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **20**:11 (1997), 959–978.
- [41] В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Везезуб, Г. С. Глушко, В. Л. Грязнов, К. Г. Дубовик, С. А. Никитин, А. И. Простомолотов, А. И. Федосеев, С. Г. Черкасов, *Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса*, Наука, М., 1987, 272 с.
- [42] Г. В. Алексеев, В. В. Пухначев, “Осесимметричная задача протекания для уравнений Навье–Стокса в переменных завихренность–функция тока”, *Докл. РАН*, **445**:4 (2012), 402–406.
- [43] J. R. Dorronsoro, “Differentiability properties of functions with bounded variation”, *Indiana Univ. Math. J.*, **38**:4 (1989), 1027–1045.
- [44] J. Bourgain, M. V. Korobkov, J. Kristensen, “On the Morse–Sard property and level sets of $W^{n,1}$ Sobolev functions on $\mathbb{R}^n$ ”, *J. Reine Angew. Math.*, March 2013 (Online first).
- [45] M. V. Korobkov, J. Kristensen, “On the Morse–Sard theorem for the sharp case of Sobolev mappings”, *Indiana Univ. Math. J.*, **63**:6 (2014) (to appear); <http://www.iujm.indiana.edu/IUMJ/Preprints/5431.pdf>.
- [46] А. С. Кронрод, “О функциях двух переменных”, *УМН*, **5**:1(35) (1950), 24–134.
- [47] R. L. Moore, “Concerning triods in the plane and the junction points of plane continua”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **14**:1 (1928), 85–88.
- [48] C. R. Pittman, “An elementary proof of the triod theorem”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25**:4 (1970), 919.
- [49] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1992, viii+268 pp.
- [50] J. Malý, D. Swanson, W. P. Ziemer, “The co-area formula for Sobolev mappings”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:2 (2003), 477–492 (electronic).
- [51] В. В. Пухначев, “Проблема Ж. Лерэ и гипотеза В. И. Юдовича”, *Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки*, 2009, Спец. выпуск “Актуальные проблемы математической гидродинамики”, 185–194.
- [52] V. V. Pukhnachev, “Singular solutions of Navier–Stokes equations”, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, v. XV: *Advances in mathematical analysis of partial differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **232**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 193–218.
- [53] A. Russo, A. Tartaglione, “On the existence of singular solutions of the stationary Navier–Stokes problem”, *Lith. Math. J.*, **53**:4 (2013), 423–437.
- [54] J. Neustupa, “On the steady Navier–Stokes boundary value problem in an unbounded 2D domain with arbitrary fluxes through the components of the boundary”, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, **55**:2 (2009), 353–365.
- [55] K. Kaulakytė, K. Pileckas, “On the nonhomogeneous boundary value problem for the Navier–Stokes system in a class of unbounded domains”, *J. Math. Fluid Mech.*, **14**:4 (2012), 693–716.
- [56] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12**:5(77) (1957), 3–122.

- [57] L. Rivkind, V. A. Solonnikov, “Jeffery–Hamel asymptotics for steady state Navier–Stokes flow in domains with sector-like outlets to infinity”, *J. Math. Fluid Mech.*, **2**:4 (2000), 324–352.
- [58] В. А. Кондратьев, “Асимптотика решения уравнения Навье–Стокса вблизи угловой точки границы”, *Прикл. матем. мех.*, **31**:1 (1967), 119–123; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, “Asymptotic of solution of the Navier–Stokes equation near the angular point of the boundary”, *J. Appl. Math. Mech.*, **31**:1 (1967), 125–129.
- [59] В. И. Юдович, “Периодические движения вязкой несжимаемой жидкости”, *Докл. АН СССР*, **130**:6 (1960), 1214–1217; англ. пер.: V. I. Judovič, “Periodic motions of a viscous incompressible fluid”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 168–172.
- [60] T. Kobayashi, “Time periodic solutions of the Navier–Stokes equations under general outflow condition in a two dimensional symmetric channel”, *Hokkaido Math. J.*, **39**:3 (2010), 291–316.

Михаил Вячеславович Коробков
(Mikhail V. Korobkov)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет
E-mail: korob@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
20.08.2014

Константин Пилецкас
(Konstantin Pileckas)

Vilnius University, Vilnius, Lithuania
E-mail: konstantinas.pileckas@mif.vu.lt

Владислав Васильевич Пухначёв
(Vladislav V. Pukhnachev)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева
СО РАН;
Новосибирский государственный университет
E-mail: pukhnachev@gmail.com

Ремиджио Руссо
(Remigio Russo)

Seconda Università degli Studi di Napoli, Napoli, Italy
E-mail: remigio.russo@unina2.it