Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, С. П. Суетин, Об одной теоретико-потенциальной задаче равновесия, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 5, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9619>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 07:38:34

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Об одной экстремальной теоретико-потенциальной задаче

В. И. Буслаев, С. П. Суетин

1. Пусть $E = \bigsqcup_{j=1}^m E_j$ — объединение конечного числа непересекающихся континуумов со связным дополнением, ни один из которых не вырождается в точку (ср. [1], [3; п. 1]), $M_1(E)$ — множество единичных положительных борелевских мер с носителем на E . Пусть $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — набор m функций таких, что каждая f_j голоморфна на E_j и допускает аналитическое продолжение с E_j вдоль любого пути в $\overline{\mathbb{C}}$, не пересекающего некоторое конечное множество точек, хотя бы одна из которых является точкой ветвления f_j .

Обозначим через $\mathfrak{K}_{E,\mathfrak{f}}$ семейство компактов $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $K \cap E = \emptyset$ и каждая из функций f_j голоморфна в той связной компоненте D_j дополнения $K^{\mathbb{C}} := \overline{\mathbb{C}} \setminus K$, которая содержит E_j , причем если $D_j = D_k$, то $f_j = f_k$.

2. Пусть $g_K(z, \zeta)$ — функция Грина для $K^{\mathbb{C}}$, и для произвольного $\theta > 0$ пусть

$$J_{\theta}(K; \mu) := \iint_{E \times E} \left[\theta \log \frac{1}{|z - \zeta|} + g_K(z, \zeta) \right] d\mu(z) d\mu(\zeta) \quad (1)$$

— энергия (удвоенная) меры $\mu \in M_1(E)$ относительно ядра $-\theta \log |z - \zeta| + g_K(z, \zeta)$. Стандартными методами теории потенциала [7], [4], [5] доказывается, что существует (единственная в классе $M_1(E)$) экстремальная мера $\lambda^K = \lambda^K(\cdot, \theta) \in M_1(E)$:

$$J_{\theta}(K; \lambda^K) = \inf_{\mu \in M_1(E)} J_{\theta}(K; \mu). \quad (2)$$

В связи с задачами теории рациональных аппроксимаций естественным образом возникает следующая экстремальная задача: доказать существование и описать структурные свойства экстремального компакта $F \in \mathfrak{K}_{E,\mathfrak{f}}$, т. е. такого компакта, что

$$J_{\theta}(F; \lambda^F) = \sup_{K \in \mathfrak{K}_{E,\mathfrak{f}}} J_{\theta}(K; \lambda^K) = \sup_{K \in \mathfrak{K}_{E,\mathfrak{f}}} \inf_{\mu \in M_1(E)} J_{\theta}(K; \mu). \quad (3)$$

В [6] задача (3) рассматривалась для случая, когда $E = [-1, 1]$, $\theta = 1$, в связи с аппроксимациями Паде–Чебышёва, в [10] — для случая, когда $E \subset \mathbb{R}$ состоит из конечного числа отрезков, $\theta = 3$, в связи с аппроксимациями Эрмита–Паде. В [8] рассмотрен случай, когда $E = [-1, 1]$, $\theta > 0$, и доказано, что если экстремальный компакт F существует, то он не разбивает плоскость и обладает S -свойством (см. [11], [5], [9]). В [2] для $E = [-1, 1]$, $\theta \in [0, 1]$ и $\theta = 3$ доказано существование экстремального компакта. В настоящей работе мы рассматриваем общий случай, когда компакт E состоит из конечного числа произвольных континуумов, а набор $\mathfrak{f}$ — из аналитических функций таких, что для $K \in \mathfrak{K}_{E,\mathfrak{f}}$ дополнение $K^{\mathbb{C}}$ может быть и несвязным.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

DOI: 10.4213/rm9619

3. Пусть $M_1(K)$ – множество всех единичных положительных борелевских мер с носителями на $K \in \mathfrak{K}_{E,\mathfrak{f}}$, $g_E(z, \zeta)$ – функция Грина для области $D := \overline{\mathbb{C}} \setminus E$,

$$I_\theta(K; \nu) := \iint_{K \times K} \left[\theta \log \frac{1}{|z - \zeta|} + g_E(z, \zeta) \right] d\nu(z) d\nu(\zeta) + 2 \int_K \psi(z) d\nu(z) \quad (4)$$

– энергия меры $\nu \in M_1(K)$ относительно ядра $-\theta \log |z - \zeta| + g_E(z, \zeta)$ и внешнего поля $\psi(z) = \theta g_E(z, \infty)$. Пусть $\lambda_K \in M_1(K)$ – (единственная в классе $M_1(K)$) экстремальная мера для функционала энергии (4):

$$I_\theta(K; \lambda_K) = \inf_{\nu \in M_1(K)} I_\theta(K; \nu). \quad (5)$$

Через $\tilde{\mu} = \beta_K(\mu)$ обозначим выметание меры $\mu \in M_1(E)$ из K^c на K . Справедливы следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K \in \mathfrak{K}_{E,\mathfrak{f}}$ и $\lambda = \lambda^K \in M_1(E)$ – экстремальная мера для функционала энергии (1). Тогда $\tilde{\lambda} = \beta_K(\lambda^K) = \lambda_K \in M_1(K)$ – экстремальная мера для функционала энергии (4).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $E = \bigcup_{j=1}^m E_j$ и $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$. Тогда задачи

$$M^\theta := \sup_{K \in \mathfrak{K}_{E,\mathfrak{f}}} \inf_{\mu \in M_1(E)} J_\theta(K; \mu) \quad \text{и} \quad M_\theta := \sup_{K \in \mathfrak{K}_{E,\mathfrak{f}}} \inf_{\nu \in M_1(K)} I_\theta(K; \nu) \quad (6)$$

эквивалентны, т.е. если существует $F \in \mathfrak{K}_{E,\mathfrak{f}}$ такой, что $J_\theta(F; \lambda^F) = M^\theta$, то $I_\theta(F; \lambda_F) = M_\theta$, и наоборот. При этом $\lambda_F = \beta_F(\lambda^F)$, $M_\theta = (1 + \theta)M^\theta - \theta^2 \gamma_E$, где γ_E – постоянная Робена компакта E .

Список литературы

- [1] В. И. Буслаев, *Матем. сб.*, **204**:2 (2013), 39–72. [2] В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 31–58. [3] В. И. Буслаев, С. П. Суетин, *УМН*, **69**:1(415) (2014), 169–170. [4] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **125**(167):1(9) (1984), 117–127. [5] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **134**(176):3(11) (1987), 306–352. [6] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 3–36. [7] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966. [8] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 113–136. [9] E. A. Rakhmanov, *Recent advances in orthogonal polynomials, special functions, and their applications*, Contemp. Math., **578**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 195–239. [10] Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **204**:9 (2013), 115–160. [11] H. Stahl, *J. Approx. Theory*, **91**:2 (1997), 139–204.

Виктор Иванович Буслаев
(Viktor I. Buslaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: buslaev@mi.ras.ru

Представлено С. Ю. Немировским
Принято редколлегией

11.09.2014

Сергей Павлович Суетин
(Sergey P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: suetin@mi.ras.ru