Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Романов, О предельной динамике эволюционных уравнений, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm962>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:02:37

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ДИНАМИКЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. РОМАНОВ

Предлагается каноническое преобразование полулинейных уравнений параболического типа, позволяющее во многих случаях построить для данного уравнения *инерциальное многообразие* и соответствующую *инерциальную форму* – ОДУ в $\mathbb{R}^k$ с аналогичной динамикой при большом времени. Этот подход дает возможность значительно расширить список асимптотически конечномерных параболических задач, что и демонстрируется на примере систем реакции-диффузии.

1. Пусть X – сепарабельное гильбертово пространство и

$$(1) \quad \dot{u} = -Au + F(u)$$

есть полулинейное параболическое диссипативное уравнение в X . Здесь $u = u(t) \in X$, $t \geq 0$, A – линейный самосопряженный положительный оператор с компактной резольventой, гладкая нелинейность F в известном смысле “подчинена” A и $\|u(t)\|_X < \rho = \text{const}$ для $t > t^*(u(0))$. Конечномерное (диффеоморфное области $U \subset \mathbb{R}^k$) инвариантное и экспоненциально притягивающее все решения $u(t)$ гладкое многообразие $M \subset X$ называем *инерциальным многообразием* уравнения (1). Сужение (1) на M индуцирует *инерциальную форму* – ОДУ в U , полностью описывающее поведение $u(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

2. Рассмотрим в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ систему реакции-диффузии

$$(2) \quad u_t = D\Delta u + f(u)$$

с однородными условиями Дирихле, Неймана или с условиями периодичности на $\partial\Omega$. Здесь Ω – область с гладкой границей или параллелепипед, $u(t, x) = (u_1, \dots, u_n)$, $D = dI$ – скалярная числовая $(n \times n)$ -матрица с $d > 0$ и нелинейная функция $f \in C_0^3(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ (что, в частности, обеспечивает диссипативность (2) в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$). Пусть $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ – спектр $-\Delta_\Omega$, где Δ_Ω – оператор Лапласа в Ω с одним из данных краевых условий.

Известно [1], что система (2) допускает инерциальное многообразие, если $\sup(\mu_{s+1} - \mu_s) = \infty$ по $s \geq 1$; последнее справедливо для $\Omega = (0, a)$, но не всегда верно уже для $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. В [2] установлено существование инерциального многообразия у скалярного ($n = 1$) уравнения (2) в произвольном прямоугольнике $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, кубе $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и (на уровне анонсирования) в параллелепипеде $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с рационально соизмеримыми квадратами ребер.

3. На основе изложенной в п. 4 общей схемы построения инерциальных многообразий и инерциальных форм уравнений вида (1) получены следующие приложения к системам (2).

ТЕОРЕМА 1. Система (2) допускает инерциальное многообразие в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ для случаев:

- а) Ω – прямоугольник или ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей;
- б) Ω – параллелепипед в $\mathbb{R}^3$ с рационально соизмеримыми квадратами ребер.

4. Специфическая техника [3], [4] позволяет сводить (в определенном понимании) некоторые нелинейные уравнения параболического типа к ОДУ в $\mathbb{R}^k$. Здесь предлагается стандартная процедура подобного рода для абстрактного уравнения (1). Положим

$$(3a) \quad v = -A^{-1}F(u), \quad J(u) = (u, v(u)).$$

Если $u(t)$ – решение (1), то $\nu(t) = (u(t), v(t))$ – решение эволюционного уравнения

$$\dot{\nu} = -B\nu + G_0(\nu)$$

с фазовым пространством $E = X \times X$, линейным оператором $B(u, v) = (Au + Av, Av)$ и нелинейностью

$$(36) \quad G_0(u, v) = (0, g(u)), \quad g(u) = -F(u) + A^{-1}F'(u)(Au - F(u)),$$

где F' – производная Фреше и $F(u) = A^{-1}AF(u)$ при $F(u) \in$ области определения A . Подходящая замена G_0 на нелинейность G с $G(\nu) \equiv G_0(\nu)$ “в окрестности” множества $J(K)$ (K – глобальный аттрактор (1)) приводит к диссипативному в E эволюционному уравнению

$$(4) \quad \dot{\nu} = -B\nu + G(\nu).$$

Пусть $T = \operatorname{Re} B$, $T(u, v) = (Au + Av/2, Au/2 + Av)$ – положительный оператор в E и $\{E^\theta, T\}$ – шкала гильбертовых пространств с нормой $\|\nu\|_\theta = \|T^\theta \nu\|_E$. Спектры $\sigma(\cdot)$ операторов T и A связаны так: $2\sigma(T) = \sigma(A) \cup 3\sigma(A)$. Допустим, что G – гладкое равномерно-липшицево отображение E^α в E^β (при некоторых $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha - \beta < 1$). Методика [5] позволяет тогда установить существование инерциального многообразия $M \subset E^\alpha \subset E$ уравнения (4) в предположении

$$(5) \quad \sup_{k \geq 1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) / (\lambda_{k+1}^{\alpha-\beta} + \lambda_k^{\alpha-\beta}) = \infty,$$

где $\{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots\} = \sigma(T)$ и, возможно, $\alpha - \beta < 0$. Оказывается, в ряде случаев условие (5) выполняется для уравнения (4), хотя и не выполнено для (1) (с гильбертовой шкалой $\{X^\theta, A\}$). Наконец, в данной ситуации удастся показать, что наличие у (4) инерциального многообразия в E влечет за собой существование инерциального многообразия исходного уравнения (1) в X . Дальше эта схема применяется к системе (2) в частном случае $n = 1$, $N = 2$ с условием Дирихле на $\partial\Omega$ и $f(0) = 0$.

5. Запишем (2) в виде (1) с $X = L^2(\Omega)$ и $A = -d\Delta_\Omega$. Преобразования (3) дают

$$Ag(u) = df''(u)|\nabla u|^2 - f'(u)f(u).$$

Можно заменить (как указано выше) G_0 на нелинейность G , обеспечивающую диссипативность в (4) и равномерно-липшицеву из E^α в E^β с $\alpha \in (3/4, 1)$, $\beta = 1$. Важно, что здесь $\alpha < \beta$, тогда как нелинейная часть (2) равномерно-липшицева в шкале $\{X^\theta, A\}$ с $\alpha, \beta = 0$. Пользуясь свойствами $\sigma(\Delta_\Omega)$ для областей $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ и связью $\sigma(T)$ с $\sigma(A)$, находим, что спектр $\sigma(T)$ удовлетворяет (5) при $\alpha < \beta$. Таким образом, уравнение (4) допускает инерциальное многообразие, откуда выводим и существование инерциального многообразия для уравнения (2).

6. Итерируя преобразования (3), можно расширить границы применимости теоремы 1, а также доказать наличие инерциального многообразия у двумерной системы Навье–Стокса на торе с произвольными периодами, что существенно усиливает результаты [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Камаев Д. А. // Записки научн. семин. ЛОМИ АН СССР. 1981. Т. 110. С. 57–73.
 [2] Mallet-Paret J., Sell G.R. // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. №4. P. 805–866.
 [3] Kwak M. // Indiana Univ. Math. J. 1992. V. 41. №4. P. 927–981. [4] Baek J., Ju H.-K., Kwak M. // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. №3. P. 721–731. [5] Романов А. В. // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №4. С. 36–54.