Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, Спектрально мероморфные операторы и нелинейные системы, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 5, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9621>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 06:45:11

Спектрально мероморфные операторы и нелинейные системы

П. Г. Гриневич, С. П. Новиков

Мы рассматриваем ОД мероморфные линейные операторы, действующие на функции вещественной переменной $x \in \mathbb{R}$, вида $L = \partial_x^n + \sum_{n \geq i \geq 2} a_{n-i} \partial_x^{n-i}$ с коэффициентами, мероморфными около оси $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Мы скажем, что оператор является спектрально мероморфным, или s -мероморфным, около полюса x_j , если все решения уравнения $L\psi = \alpha\psi$ мероморфны около этой точки для всех $\alpha \in \mathbb{C}$. Мы будем изучать операторы, s -мероморфные около всех полюсов $x_j \in \mathbb{R}$.

Введем нужные функциональные пространства. Рассмотрим набор линейных подпространств R_j вида $\sum_{-r_j \leq i < 0} b_i y^i$ пространства всех лорановских полиномов. Определим пространство функций $F = F(\{x_j; R_j\})$, мероморфных около оси $x \in \mathbb{R}$, с возможными полюсами в фиксированном дискретном множестве точек $x_j \in \mathbb{R}$ и разложениями Лорана по $y = x - x_j$ в фиксированном наборе линейных пространств R_j для отрицательных степеней y . Положительные коэффициенты Лорана в полюсах x_j должны удовлетворять только уравнениям, вытекающим из требования, что произведения функций из F не имеют членов вида y^{-1} .

ЛЕММА 1. Для любых финитных функций $f(x), g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, из пространства F скалярное произведение корректно определено формулой $\langle f, g \rangle = \int f(x) \bar{g}(\bar{x}) dx$, где интеграл берется по оси $x \in \mathbb{R}$ вне окрестности особенности и по контуру, обходящему особенность, около нее. Это скалярное произведение индефинитно, причем каждая особая точка x_j дает (независимо от других x_k) p_j отрицательных квадратов, где p_j – размерность пространства R_j отрицательных частей Лорана около x_j .

Доказательство легко следует из того, что, по определению пространства F , произведение функций не содержит степеней -1 около любого полюса. Риманова поверхность Γ с отмеченной точкой P , локальным параметром $z = 1/\lambda$, дивизором D степени g (род) и мероморфной функцией α с полюсом только в P порядка k дает согласно конструкции ВЧК (Бурхала–Чаунди–Кричевера [1]) ОД оператор $L\psi = \alpha\psi$ порядка k , алгебраический ранга 1. Легко видеть, что этот оператор s -мероморфный. Он формально самосопряжен (симметричен), если выполнено условие **SA**: задана антиинволюция $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\tau(P) = P$, такая, что $\tau(D) + D \sim K + 2P$, $\tau(\lambda) = -\bar{\lambda}$.

Особенности оператора L определяют класс функций $F = F^L$ (см. выше). В периодическом случае мы строим пространство $F_\kappa^L \subset F^L$ из функций $f(x+T) = \kappa f(x)$, $|\kappa| = 1$. В пространствах F_κ^L число отрицательных квадратов конечно. Напомним, что дифференциалом квазиимпульса называется мероморфный дифференциал dp с полюсом второго порядка только в точке P , $dp \sim d\lambda$, такой, что интегралы $\oint dp$ по всем циклам чисто вещественны. Тогда $\text{Im } p = p_I$ выбирается как однозначная вещественная функция такая, что $\tau(p_I) = -p_I$, поскольку $\tau dp = \overline{dp}$. Уровень $p_I = 0$ мы назовем каноническим контуром C_0 .

Проекция $\alpha(C_0)$ контура C_0 на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ совпадает со спектром оператора L на всей прямой $x \in \mathbb{R}$ в пространстве F^L .

ТЕОРЕМА 2. Скалярное произведение в пространстве F^L для алгебраического оператора L ранга 1, удовлетворяющего условию **SA**, корректно определено и индефинитно. Оператор L самосопряжен относительно скалярного произведения (см. выше). Его спектр совпадает с множеством $\alpha(C_0)$, где C_0 – канонический контур. Скалярное произведение определяется интегралом по каноническому контуру C_0 со

спектральной мерой Ω . Если базис собственных функций на контуре C_0 полон в пространстве F_κ^L , то число отрицательных квадратов скалярного произведения в пространствах F_κ^L определяется знаком спектральной меры Ω в соответствующих точках контура C_0 и является интегралом систем Гельфанда–Дикого $\dot{L} = [L, A]$.

Для доказательства теоремы рассмотрим функцию Бейкера–Ахиезера $\psi(\lambda, x) \sim e^{\lambda x}$ (около P) с дивизором полюсов $D = (\gamma_1, \dots, \gamma_g)$ и дуальную 1-форму $\psi^*(\mu, x) d\mu \sim e^{-\mu x} d\mu$ (около P) с нулями $D = (\gamma_1, \dots, \gamma_g)$. На языке скалярных функций Бейкера–Ахиезера имеем $\psi^*(\mu, x) d\mu = \psi^+(\mu, x)\Omega$, где $\Omega = (1 + o(1)) d\mu$ около P , с нулями $D + \tau(D)$, $\tau(D) + D \sim K + 2P$, K – канонический дивизор дифференциальных форм, Ω – спектральная мера на контур C_0 . Мы имеем $L^*\psi^* = \mu\psi^*$, где L^* сопряжен к L . Возможно, этот факт явно не отмечался в литературе. В работе [2] изучалось ядро типа Коши на Γ : $\omega(\lambda, \mu, x) \sim -d\mu/(\lambda - \mu) + O(1)$ около диагонали $\lambda = \mu$, $\omega \sim e^{\lambda x} o(1)$ при $\lambda \rightarrow P$, $\omega \rightarrow e^{-\mu x} o(1) d\mu$ при $\mu \rightarrow P$. Было найдено равенство $\partial_x \omega = -\psi(\lambda, x)\psi^*(\mu, x) d\mu$. Это равенство играет здесь ключевую роль. Следовательно, вычет по x равен нулю для любого произведения собственных функций самосопряженного оператора L около особенности. Тем самым, скалярное произведение (см. выше) корректно определено. При данном κ число отрицательных квадратов является инвариантом римановой поверхности, которая сохраняется со временем: уравнение $e^{ip(z)t} = \kappa$ на контуре C_0 дает дискретный набор точек $z_s \in C_0$. Число точек, в которых величина $d\Omega|_{z_s} \in \mathbb{R}$ отрицательна, конечно и дает число отрицательных квадратов скалярного произведения в пространстве F_κ^L . Полное пространство F^L является прямым интегралом пространств F_κ^L .

ПРИМЕР [3]. Для $k = 2$ имеем $L = -\partial_x^2 + u$. Пусть $u \sim r_j(r_j + 1)/(x - x_j)^2 + \text{Reg.}$ Для s -мероморфности регулярная часть потенциала обязана иметь в точке x_j нулевые нечетные производные до порядка $2r_j - 1$ включительно. Все R_j имеют вид $b_1 y^{-r_j} + b_2 y^{-r_j+2} + \dots + b_{r_j/2} y^{-2} -$ для четных $r_j \geq 2$ или $b_1 y^{-r_j} + b_2 y^{-r_j+2} + \dots + b_{(r_j+1)/2} y^{-1} -$ для нечетных $r_j \geq 1$. Каждый полюс дает $[(r_j + 1)/2]$ отрицательных квадратов. Положительные члены лорановского разложения функций $f \in F$ в точках x_j имеют нулевые коэффициенты при нечетных степенях y^{2i-1} , $i \leq r_j/2$, в первом случае и четных степенях y^{2i} , $i \leq (r_j + 1)/2$, во втором случае. Уже для рода $g = 1$ и вещественного эллиптического потенциала, отвечающего ромбической решетке, одна из конечных компонент спектра $\alpha(C_0)$ комплексна. Полнота собственных функций доказана в [3], так что число отрицательных квадратов сохраняется под действием KdV и высших KdV.

Предстоит доказать: 1. Если оператор s -мероморфный, то таков же и сопряженный оператор. 2. Все особенности R_j s -мероморфных операторов реализуются алгебраическими. **Их классификация – проблема.** 3. Теорему полноты для симметричных алгебраических операторов.

Список литературы

- [1] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, 11:1 (1977), 15–31. [2] P. G. Grinevich, A. Yu. Orlov, *Problems of modern quantum field theory*, Springer, Berlin, 1989, 86–106. [3] P. G. Grinevich, A. P. Novikov, *Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.)*, 44:4 (2013), 809–840.

П. Г. Гриневич (P. G. Grinevich)
ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: pgg@landau.ac.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
02.09.2014

С. П. Новиков (S. P. Novikov)
University of Maryland, College Park, MD, USA;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: novikov@umd.edu