Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Девятков, Действия коммутативной унитарной группы на многообразиях флагов и нильпотентные умножения, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 5, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:47:21

Действия коммутативной унипотентной группы на многообразиях флагов и нильпотентные умножения

Р. А. Девятков

Пусть G – связная полупростая алгебраическая группа над $\mathbb{C}$, $P \subset G$ – параболическая подгруппа. Обозначим аддитивную группу поля через $\mathbf{G}_a$. Пусть $m = \dim G/P$. Наша цель – классифицировать действия *коммутативной унипотентной группы* $(\mathbf{G}_a)^m$ на *обобщенном многообразии флагов* G/P с открытой орбитой с точностью до сопряжения автоморфизмами многообразия G/P и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$. Не ограничивая общности, будем считать, что центр группы G тривиален. Используя известные результаты об автоморфизмах обобщенных многообразий флагов (см., например, [1]), можно свести эту задачу к случаю, когда группа G простая.

Вопрос о существовании действий коммутативной унипотентной группы на различных полных многообразиях и классификации таких действий был поставлен в [2]. Он решен для различных классов многообразий в работах [2]–[4]. В частности, в [4] перечислены все обобщенные многообразия флагов, на которых существует хотя бы одно действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$ с открытой орбитой.

Чтобы сформулировать этот результат, введем некоторые обозначения. Будем перечислять вершины схем Дынкина и соответствующие им простые корни в системах корней как в [5]. Если зафиксирована простая алгебраическая группа G , то обозначим (определенную с точностью до сопряжения) максимальную параболическую подгруппу, соответствующую i -му простому корню, через P_i .

Следуя [1], назовем пару (G, P) , где G – простая алгебраическая группа с тривиальным центром, а $P \subset G$ – параболическая подгруппа, *исключительной* в следующих случаях: (а) $G = \mathrm{PSp}_{2l}$, $P = P_1$; (б) $G = \mathrm{PSO}_{2l+1}$, $P = P_l$; (с) G – группа типа G_2 , $P = P_1$. В противном случае назовем пару (G, P) *неисключительной*. Известно, что если (G, P) – исключительная пара, то существует такая неисключительная пара (H, Q) , что многообразие G/P изоморфно H/Q . Далее будем считать, что пара (G, P) не является исключительной.

ТЕОРЕМА 1 [4; теорема 1]. *В предыдущих предположениях многообразие G/P допускает локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$ тогда и только тогда, когда унипотентный радикал группы P коммутативен, т. е. в точности в следующих случаях: 1) $G = \mathrm{SL}_{l+1}$, P – любая максимальная параболическая подгруппа; 2) $G = \mathrm{SO}_{2l+1}$, $P = P_1$; 3) $G = \mathrm{Sp}_{2l}$, $P = P_1$; 4) $G = \mathrm{PSO}_{2l}$, $P = P_i$, где $i = 1, l-1, l$; 5) G – группа типа E_6 , $P = P_1$ или $P = P_6$; 6) G – группа типа E_7 , $P = P_7$.*

Пусть V – конечномерное представление связной редуктивной группы L , $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie} L$. Назовем умножение (билинейное отображение) $V \times V \rightarrow V$ *согласованным с действием алгебры $\mathfrak{l}$* , если оно коммутативно, ассоциативно, все операторы умножения нильпотенты и для любого вектора $v \in V$ существует такой элемент $x \in \mathfrak{l}$, что оператор умножения на вектор v действует на пространстве V так же, как элемент x .

ТЕОРЕМА 2. *Мы сохраняем предположения, введенные выше. Пусть $P^- \subset G$ – такая параболическая подгруппа, что группа $L = P \cap P^-$ является подгруппой Леви в P . Пусть $\mathfrak{u}^-$ – алгебра Ли унипотентного радикала группы P^- , $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie} L$.*

Тогда действия группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на многообразии G/P с точностью до сопряжения автоморфизмами многообразия G/P и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$ находятся во взаимно однозначном соответствии с умножениями на алгебре $\mathfrak{u}^-$, согласованными с (присоединенным) действием алгебры $\mathfrak{l}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть в представлении V можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда все операторы умножения на самом деле являются операторами действия элементов алгебры $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$. Если при этом $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{l}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{l}_s$, где $\mathfrak{l}_i$ простые, то после подходящей перестановки слагаемых $\mathfrak{l}_i$ существуют такое разложение $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_t$ и такой индекс $r \leq s$, $r \leq t$, что: 1) V_i – неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}_i$ при $1 \leq i \leq r$; 2) $\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ при $1 \leq i$, $j \leq s$, $i \neq j$ (здесь и далее $\cdot$ обозначает действие алгебры $\mathfrak{L}$ в представлении); 3) $V_i V_j = 0$ при $1 \leq i, j \leq s$, $i \neq j$; 4) $\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ при $1 \leq i \leq s$, $s < j \leq t$; 5) $\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ при $s < i \leq r$, $1 \leq j \leq s$; 6) $V_i V = 0$ при $s < i \leq t$.

Далее будем считать, что группа L простая, а представление V неприводимое.

Пусть на векторном пространстве V задана невырожденная билинейная форма $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$. Назовем трилинейную форму $c: V \times V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ двойственной к умножению $\mu: V \times V \rightarrow V$, если для всех $u, v, w \in V$ выполнено равенство $c(u, v, w) = \omega(\mu(uv), w)$. Ясно, что умножение однозначно определяется по двойственной к нему трилинейной форме, и наоборот.

ТЕОРЕМА 3. В предыдущих предположениях пусть на представлении V можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. В этом случае имеет место одна из следующих двух возможностей.

1. $L = SL(W)$, где W – некоторое векторное пространство, $V = W$ или $V = W^*$. Тогда умножение на пространстве V может быть любым коммутативным ассоциативным умножением, для которого все операторы умножения нильпотентны.

2. $L = Sp(V, \omega)$, где $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторая невырожденная кососимметрическая форма. Зафиксируем лагранжево подпространство $V_1 \subset V$. Тогда трилинейные формы, двойственные к умножениям, согласованным с действием алгебры $\mathfrak{l}$, рассматриваемые с точностью до действия группы L , – это в точности продолжения симметричных трилинейных форм на пространстве V/V_1 , рассматриваемых с точностью до действия группы $GL(V/V_1)$, на пространство V .

Возвращаясь к действиям $(\mathbf{G}_a)^m: G/P$, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. В предыдущих предположениях, если G/P – проективное пространство, то действия $(\mathbf{G}_a)^m: G/P$ с открытой орбитой с точностью до сопряжения автоморфизмами многообразия G/P и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$ параметризуются классами изоморфизма коммутативных ассоциативных m -мерных алгебр с нильпотентными операторами умножения. В противном случае либо действие $(\mathbf{G}_a)^m: G/P$ с открытой орбитой существует и единственно с точностью до сопряжения автоморфизмами многообразия G/P и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$ (пары (G, P) , для которых это верно, перечислены в теореме 1), либо действий $(\mathbf{G}_a)^m: G/P$ с открытой орбитой нет вообще.

Список литературы

- [1] M. Demazure, *Invent. Math.*, **39**:2 (1977), 179–186. [2] B. Hasset, Yu. Tschinkel, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **22** (1999), 1211–1230. [3] Е. В. Шаройко, *Матем. сб.*, **200**:11 (2009), 145–160. [4] I. V. Arzhantsev, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **139**:3 (2011), 783–786. [5] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Элементы математики, Мир, М., 1972, 334 с.

Ростислав Андреевич Девятов
(Rostislav A. Devyatov)

НИУ “Высшая школа экономики”;

Institut für Mathematik, Freie Universität Berlin, Германия

E-mail: deviatov@mccme.ru

Представлено Д. О. Орловым

Принято редколлегией

12.09.2014