Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Белошадка, О представлениях группы Гейзенберга матриц с одним целым и двумя вещественными коэффициентами, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 5, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9623>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:17:02

О представлениях группы Гейзенберга матриц с одним целым и двумя вещественными коэффициентами

И. В. Белошапка

Пусть H, P, C – абелевы группы, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – билинейное отображение из $H \times P$ в C . Группой Гейзенберга G мы называем множество $H \times P \times C$ с законом композиции $(h_1, p_1, c_1) \cdot (h_2, p_2, c_2) = (h_1 + h_2, p_1 + p_2, c_1 + c_2 + h_1 p_2)$.

Пусть $G_\chi = H_\chi PC$, где $H_\chi = \{h \in H: \chi_C(\langle h, p \rangle) = 1 \text{ для всех } p \in P\}$ и χ_C – характер подгруппы C . Тогда G_χ – нормальный делитель группы G , он зависит только от χ_C . Пусть далее $H \simeq \mathbb{Z}$, $P \simeq C \simeq \mathbb{R}$ и $\chi_P(p) = e^{2\pi i s p}$, $\chi_C(c) = e^{2\pi i t c}$ – характеры подгрупп P, C соответственно, $s, t \in \mathbb{C}$. Тогда подгруппа H_χ тривиальна, если $t \neq 0$, и равна $\mathbb{Z}$, если $t = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть V_χ – пространство комплекснозначных функций f на G со свойствами: (i) $f(hg) = \chi(h)f(g)$, $h \in G_\chi$; (ii) носитель функции f содержится в конечном числе классов смежности группы G : $\text{Supp}(f) \subset \bigcup_{i \in I} h_i G$, $|I| < \infty$.

Правые сдвиги определяют представление π_χ в пространстве $V_\chi = \text{ind}_{G_\chi}^G(\chi)$.

ТЕОРЕМА 1. I. Если $t \neq 0$, то: 1) V_χ не содержат нетривиальных относительно действия группы G подпространств; 2) V_χ бесконечномерны; 3) линейные преобразования, коммутирующие с действием группы G , скалярны; 4) если $\chi_1 \sim (t_1, s_1)$, $\chi_2 \sim (t_2, s_2)$, то $\pi_{\chi_1} \sim \pi_{\chi_2}$ тогда и только тогда, когда существует $h \in \mathbb{Z}$ такое, что $t_1 = t_2$, $s_1 = s_2 + ht_1$.

II. Если $t = 0$, то $G_\chi = G$ и V_χ – одномерное представление группы G .

Теорема доказывается незначительными изменениями рассуждений в доказательстве аналогичного утверждения в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2]. Пусть $\rho: G \rightarrow \text{End}(V)$ – представление группы G , где V – счетномерное комплексное пространство, тогда $V(K, \chi)$ – весовое подпространство представления V , если $V(K, \chi) = \{v \in V \mid \rho(k)v = \chi(k)v \ \forall k \in K\}$, где $K \subset G$ – подгруппа G и $\chi: K \rightarrow \mathbb{C}^*$. Представление ρ группы G обладает конечным весом, если существуют подгруппа $K \subset G$ и характер $\chi: K \rightarrow \mathbb{C}^*$ этой подгруппы такие, что: 1) $V(K, \chi) \neq (0)$; 2) $\dim_{\mathbb{C}} V(K, \chi) < \infty$.

Следуя [2], формулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ρ – представление группы G в счетномерном комплексном пространстве V с конечным весом относительно подгруппы PC , тогда существует характер $\chi: PC \rightarrow \mathbb{C}^*$ такой, что $\rho \sim \pi_\chi$, т.е. представление ρ мономимально.

Определим след $\text{Tr } \pi_\chi(g)$ представления π_χ как комплекснозначную функцию на группе, вычисляемую как след оператора представления $\pi_\chi(g)$ в базисе δ_m , $m \in \mathbb{Z}$, пространства $D(\mathbb{Z})$. Легко видеть, что так определенный ряд никогда не сходится. Расширим группу G : $\hat{G} = G \rtimes A$ как полупрямое представление, где $A = \text{Hom}(H, P) \simeq \mathbb{R}$. Тогда A действует на G по формуле: $\forall a \in A \ a(h, p, c) := (h, p + ah, c + ah(h-1)/2)$, $h \in H$, $p \in P$, $c \in C$. Представление π_χ группы G можно продолжить как представление $\hat{\pi}_\chi$ группы $\hat{G}$ на том же пространстве: $\hat{\pi}_\chi := \pi_\chi \otimes \chi_A$ (см. [1]), где χ_A – характер подгруппы A , $\chi_A(a) = e^{2\pi i u a}$, $\hat{\chi} = (\chi, \chi_A)$ – характер группы $\hat{G}$. Действие группы $\hat{G}$ будет таким:

$$\hat{\pi}_\chi(m, p, c, a)\delta_n = \exp\left\{2\pi i\left(tc + sp + sa(n-m) + \frac{1}{2}ta(n-m)(n-m-1) + t(n-m)p\right)\right\}\delta_{n-m}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00160_a).

DOI: 10.4213/rm9623

Тогда след представления $\widehat{\pi}_\chi(g)$ группы $\widehat{G}$ определен при $\operatorname{Re}(at) < 0$ и равен нулю при $m \neq 0$, $m \in H$. Из рассуждений о спектрах подгрупп получаем, что $\widehat{\pi}_{\widehat{\chi}_1} \sim \widehat{\pi}_{\widehat{\chi}_2}$ тогда и только тогда, когда существует $h \in H$ такое, что

$$t_1 = t_2, \quad s_1 = s_2 + ht_1, \quad u_1 = u_2 + hs_1 + \frac{1}{2}h(h-1)t_1. \quad (1)$$

Обозначим $\mathbb{M}_G$ пространство модулей неприводимых индуцированных представлений: $(t, s, u) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} / \sim$, где $\widehat{\pi}_{\widehat{\chi}_1} \sim \widehat{\pi}_{\widehat{\chi}_2}$, если найдется $h \in \mathbb{Z}$ такое, что выполнено (1).

Предложение 1. $\widehat{\pi}_{\widehat{\chi}_1} \sim \widehat{\pi}_{\widehat{\chi}_2} \Leftrightarrow \operatorname{Tr} \widehat{\pi}_{\widehat{\chi}_1}(g) = \operatorname{Tr} \widehat{\pi}_{\widehat{\chi}_2}(g) \forall g \in \widehat{G}$ нпу $\operatorname{Re}(at_1), \operatorname{Re}(at_2) < 0$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Проверяется непосредственно.

$\Leftarrow$ Рассмотрим отображение $F: (t, s, u) \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi is}, e^{2\pi iu}, e^{2\pi^2 it}, e^{2\pi^2 is}, e^{2\pi^2 iu}) = (\lambda, z, \tau, \lambda', z', \tau')$. Считаем, что $t, s, \pi t, \pi s$ иррациональны, $\operatorname{Im} t \neq 0$, иначе добавляемся этого заменой $F(c_1 t, c_2 s, u) = \widehat{F}(t, s, u)$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \widehat{\pi}_{\widehat{\chi}}(0, p, c, a) &= e^{2\pi i(tc+sp+au)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i(tmp+sam+tam(m-1)/2)} \\ &= \tau^a \lambda^c z^p \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{am} \lambda^{mp+am(m-1)/2}. \end{aligned}$$

Рассуждения в [1] показывают, что комплексные числа (λ, z, τ) определяют линейное расслоение над семейством эллиптических кривых E_λ , где $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ($|\lambda| \neq 1$, так как $\operatorname{Im} t \neq 0$), z лежит на эллиптической кривой $E_\lambda \simeq \mathbb{C}^*/\lambda^\mathbb{Z}$, $z \mapsto z\lambda^h$, $h \in \mathbb{Z}$. Цикл $\tau \mapsto \tau z^h \lambda^{h(h-1)/2}$ определяет расслоения L степени 1 и $L^{\otimes k}$ степени k , $k \in \mathbb{Z}$, на эллиптической кривой E_λ . Функции $\theta_{p,k}(\lambda, z) = z^p \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{km} \lambda^{mp+km(m-1)/2}$ при $0 \leq p \leq k-1$ составляют базис голоморфных сечений расслоения $L^{\otimes k}$ на E_λ . Имеем:

$$\begin{array}{ccc} L & \hookrightarrow & H^0(E_\lambda, L^{\otimes k}) \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\lambda & \hookrightarrow & \mathbb{P}(H^0(E_\lambda, L^{\otimes k})) \end{array}$$

Это дает вложение пространства модулей $\mathbb{M}_G$ в аффинное пространство и равенства $\lambda_1 = \lambda_2$, $z_1 = z_2 \lambda^h$, $\tau_1 = \tau_2 z_1^h \lambda^{h(h-1)/2}$ и $\lambda'_1 = \lambda'_2$, $z'_1 = z'_2 (\lambda'_1)^h$, $\tau'_1 = \tau'_2 (z'_1)^h (\lambda'_1)^{h(h-1)/2}$, откуда получаем: $t_1 = t_2$, $s_1 = s_2 + ht_1$, $u_1 = u_2 + hs_1 + h(h-1)t_1/2$, что и требовалось.

Предложение 2. 1) При $t \rightarrow 0$ представление π_χ раскладывается в бесконечную прямую сумму одномерных представлений $\mu = \mu' \otimes \chi_P \otimes 1$, где μ' пробегает все характеры подгруппы H .

2) Элементы (h, p, c, a) и (h', p', c', a') , где $h, h' \neq 0$, сопряжены в $\widehat{G}$, если $h = h'$, $a = a'$. Если $h = 0$, то $(0, p, c, a)$ сопряжен $(0, p', c', a')$ тогда и только тогда, когда существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $p' = p + an$, $c' = c + pn + an(n-1)/2$, $a = a'$.

3) Если элементы $g = (0, p, c, a)$ и $g' = (0, p', c', a')$ не сопряжены в $\widehat{G}$, то

$$\int_{\mathbb{M}_G} \operatorname{Tr} \widehat{\pi}_{\widehat{\chi}}(g) \overline{\operatorname{Tr} \widehat{\pi}_{\widehat{\chi}}(g')} d\mu = 0.$$

4) $\chi_P(p)\chi_C(c) = \lim_{l \rightarrow \infty} \operatorname{Tr} \widehat{\pi}_{\widehat{\chi}}(0, p, c, la)$ нпу $\operatorname{Re}(at) < 0$, $p \in P$, $c \in C$, $l \in \mathbb{N}$.

Список литературы

- [1] A. N. Parshin, *Lectures on representations of discrete Heisenberg groups*, Humboldt Univ., Berlin, 2010. [2] С. А. Арналь, А. Н. Паршин, *Матем. заметки*, **92:3** (2012), 323–330.

И. В. Белошапка (I. V. Beloshapka)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: i-beloshapka@yandex.ru

Представлено С. Ю. Немировским

Принято редакцией

03.08.2014