Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Буфетов, Б. М. Гуревич, К. М. Ханин, Ф. Челларози, Присуждение Я. Г. Синаю премии Абеля, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 5, 167–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:04:29

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Присуждение Я. Г. Синаю премии Абеля

В марте 2014 г. Президент Академии наук Норвегии объявил об очередном присуждении премии имени Н. Х. Абеля по математике. Этой премией за 2013 г. был награжден Яков Григорьевич Синай.

Многое роднит премию Абеля с Нобелевской премией: и время возникновения замысла такой премии – конец 19-го века, и размер, и участие королевских особ в церемонии вручения, и даже роль Нобеля, правда довольно своеобразная, в ее появлении (узнав, что Нобель категорически отказывается считать столь абстрактную науку, как математика, достойной своей премии, некоторые представители этой науки задумали основать награду для математиков, сравнимую по значению с премией Нобеля). Первым, кто четко высказал предложение об учреждении Абелевской премии (присуждаемой раз в пять лет), был норвежский математик Софус Ли, ставший незадолго до этого первым лауреатом премии имени Н. И. Лобачевского, присуждаемой с 1897 г. Казанским университетом. Но еще раньше шведский математик М. Г. Миттаг-Леффлер предложил создать фонд для награждения золотыми медалями с изображениями великих математиков авторов выдающихся работ, опубликованных в издаваемом им журнале “Acta Mathematica” (стоит учесть, что до 1905 г. Норвегия и Швеция составляли одно государство), и первым, чей портрет предполагалось поместить на такой медали, был Абель. Это предложение осталось неосуществленным, а идея Ли получила поддержку ряда крупнейших математиков Европы, но после его смерти в 1899 г. не нашлось никого, кто продолжил бы преодоление трудностей, еще остававшихся на пути реализации этой идеи. Однако вскоре, в преддверии столетия со дня рождения Абеля, наступавшего в 1902 г., уже правительство и королевский двор, желая придать празднованию этой даты государственный масштаб, в числе прочих праздничных мероприятий запланировали создание премии Абеля. Но и эти планы остались нереализованными из-за политических событий, приведших к распаду шведско-норвежского государства.

Современная история Международной премии Абеля связана с празднованием в 2002 г. его двухсотлетия. Инициатива норвежских ученых создать такую премию была поддержана их коллегами за рубежом, политиками и правительством. Первое присуждение состоялось в 2003 г., а за год до этого выдающийся норвежский математик Э. Сельберг (1917–2007) был награжден Почетной премией Абеля. С тех пор премией Абеля ежегодно награждаются крупнейшие математики мира, как правило, один, реже два одновременно; нынешнее награждение было двенадцатым. Со списком награжденных, составом комитета из пяти математиков, выбирающего достойного кандидата и периодически сменяемого, и с другими подробностями можно ознакомиться в доступной литературе [28], [29] или в Интернете. Мы же скажем несколько слов о том, как проходило награждение в этом году.

Вручение премии состоялось 20 мая 2014 г. в актовом зале Университета Аула в Осло, куда многочисленная публика проследовала под звуки военных фанфар,

прозвучавших в честь Абеля. Церемонию открыл Президент Академии наук проф. Н. Х. Стенсет, затем заслуги лауреата охарактеризовала председатель Абелевского комитета проф. Р. Пиене. Премию Я. Г. Синаю вручил крон-принц Хокон Магнус, после чего с ответным словом выступил лауреат. Речи чередовались с краткими музыкальными номерами. После завершения церемонии большинство присутствующих перешли в находящееся неподалеку здание Норвежского театра, где в честь лауреата состоялся прием, во время которого он дал интервью журналистке с норвежского телевидения. Собеседники сидели за столом на небольшом возвышении, а вопросы и ответы звучали из динамиков, так что гости их слышали и на некоторые реплики оживленно реагировали.

На следующий день читались Абелевские лекции. Первую прочитал Я. Г. Синай, остальные – его ученики Г. А. Маргулис и К. М. Ханин и венгерский математик Д. Сас. Вручение премии Абеля традиционно сопровождается поездкой в один из норвежских городов, в этом году был выбран Ставангер – “нефтяная столица Норвегии”, город, расположенный на ее юго-западном побережье (между прочим, Абель родился недалеко от этого города). Здесь 22 мая Я. Г. Синай прочитал лекцию в местном университете. На этом список событий, связанных с вручением премии, не кончается: 23 мая Я. Г. Синай уже был в Стокгольме, где состоялся организованный в его честь однодневный математический симпозиум, на котором он выступил с первым докладом. Посещение Стокгольма тоже является традицией, призванной подчеркнуть, что премия Абеля по своей значимости не уступает Нобелевской. Упомянем еще прием лауреата в королевском дворце в Осло, прием в его честь в посольстве России, возложение им венка к памятнику Абелю, творению знаменитого норвежского скульптора Густава Вигеланда, расположенному в центре столицы в Королевском саду, встречу с победителями школьных математических олимпиад.

Из сказанного ясно, что торжества, связанные с вручением Абелевской премии, носят в Норвегии характер большого национального праздника. Такое отношение к науке могло бы стать примером и для других государств.

В постановлении Абелевского комитета говорится, что профессор Синай награжден “за фундаментальный вклад в теорию динамических систем, эргодическую теорию и математическую физику”. Ниже мы попытаемся описать этот вклад.

Первые работы Я. Г. Синая относятся к концу 1950-х годов, когда он, став аспирантом А. Н. Колмогорова, вместе с некоторыми другими учениками Андрея Николаевича включился в изучение только что появившегося понятия энтропии динамической системы. Теми или иными аспектами эргодической теории он продолжал заниматься и в дальнейшем, но уже в середине 1960-х годов начал также интересоваться математическими задачами статистической физики, а в последующие годы диапазон областей математической физики, в которых им были получены важные результаты, существенно расширился.

Подробный обзор результатов Я. Г. Синая, полученных до середины 1990-х годов, содержится в юбилейной статье [46], что позволяет нам не повторять написанного в этой статье, а только сделать некоторые дополнения. Более подробно мы остановимся на результатах последних двух десятилетий. Сделанное ниже выделение тематических рубрик в значительной степени условно: многие работы можно отнести к нескольким рубрикам, а при современном, гораздо более широком, чем в середине 20-го века, взгляде на математическую физику можно сказать, что к ней относится подавляющее большинство работ Я. Г. Синая.

Общая энтропийная теория динамических систем. В 50-е годы 20-го века в эргодической теории наблюдался некоторый застой. Он во многом был связан с длительным отсутствием продвижений в решении основной проблемы того периода – проблемы классификации сохраняющих меру преобразований, или проблемы

изоморфизма. По существу эта проблема была решена (Дж. фон Нейманом) лишь для автоморфизмов с дискретным спектром. Особенно раздражающей была ее нерешенность в классе сдвигов Бернулли – простейших динамических систем вероятностного происхождения. Введение А. Н. Колмогоровым [36] энтропии как метрического инварианта изоморфизма сразу же позволило представить этот класс как объединение несчетного множества подклассов, в каждой паре которых сдвиги неизоморфны. В этой работе энтропия была определена не только для сдвигов Бернулли, но и для более широкого класса “квазирегулярных” динамических систем, аналогичных регулярным стационарным процессам и названных впоследствии К-системами. По определению А. Н. Колмогорова динамическая система (поток или автоморфизм) $\{S_t\}$ называется квазирегулярной, если в пространстве Лебега, где она определена, существует такая σ -подалгебра γ_0 основной σ -алгебры γ , что σ -алгебры $\gamma_t = S_t\gamma_0$ удовлетворяют соотношениям: 1) $\gamma_t \subseteq \gamma_{t'}$, если $t \leq t'$; 2) $\bigcup_t \gamma_t = \gamma$; 3) $\bigcap_t \gamma_t = \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ – тривиальная σ -алгебра, состоящая из множеств меры 0 или 1 (заметим, что $\bigcup_t \gamma_t$ есть наименьшая σ -алгебра, содержащая все γ_t). В основной теореме [36] утверждалось существование такой константы h , $0 < h \leq \infty$ (не зависящей от γ_0), что средняя условная энтропия $H(\gamma_{t+\Delta}|\gamma_t)$ равна $h\Delta$ для всякого $\Delta > 0$. Вскоре выяснилось, что независимость h от σ -алгебры γ_0 со свойствами 1)–3) имеет место лишь при дополнительных ограничениях на γ_0 (ошибка в доказательстве была указана В. А. Рохлиным), но понятие К-системы оказалось чрезвычайно полезным и важным. Во второй заметке об энтропии [37], посвященной в основном исправлению упомянутой ошибки, А. Н. Колмогоров уже определяет энтропию для произвольного автоморфизма пространства Лебега, имеющего конечную образующую, т. е. такое конечное измеримое разбиение $\alpha = \{A_1, \dots, A_k\}$, что множества $S_1^n A_i$, $-\infty < n < \infty$, $1 \leq i \leq k$, порождают всю σ -алгебру γ .

Одновременно с этой заметкой А. Н. Колмогорова и в том же томе журнала “Доклады Академии наук СССР” появилась заметка Я. Г. Синая [54]. В ней было предложено альтернативное определение энтропии. Его отличие от колмогоровского состояло, во-первых, в элементарности – оно не использовало теорию континуальных измеримых разбиений Рохлина и по существу не использовало даже понятие пространства Лебега (в тексте, правда, упоминавшегося). Во-вторых, оно годилось для всех автоморфизмов, как имеющих конечную образующую, так и не имеющих таковой. И наконец, это определение сопровождалось рядом утверждений, позволявших во многих случаях вычислять или, на худой конец, оценивать энтропию. Эти возможности были тут же продемонстрированы вычислением энтропии эргодического группового автоморфизма 2-мерного тора. Что касается определения энтропии, то хотя энтропия Синая была основана на тех же идеях, что и энтропия Колмогорова, в тот момент было очевидно лишь, что два определения приводят к одной и той же величине для К-систем с конечной образующей, в частности для сдвигов Бернулли с конечным числом состояний. Только через несколько лет, после появления теоремы Рохлина о существовании счетной образующей у каждого апериодического автоморфизма и теоремы Кригера о существовании конечной образующей у автоморфизма с конечной энтропией, стало ясно, что А. Н. Колмогоров и Я. Г. Синай определили один и тот же объект, обычно называемый теперь энтропией Колмогорова–Синая. Это понятие сыграло выдающуюся роль во всем дальнейшем развитии эргодической теории, открыв перед ней перспективы, о которых за несколько лет до этого нельзя было даже подозревать.

В другой замечательной работе [60] Я. Г. Синай доказал теорему (сформулированную им ранее в [59]) о слабом изоморфизме сдвигов Бернулли, которая получилась как следствие утверждения, что всякий эргодический автоморфизм с положительной

энтропией в определенном смысле является сдвигом Бернулли, точнее, оказывается изоморфным сдвигу Бернулли, если заменить σ -алгебру γ измеримых множеств в пространстве Лебега подходящей σ -подалгеброй. А в совместной работе Я. Г. Синая и В. А. Рохлина [52] была построена общая теория σ -подалгебр, возрастающих под действием автоморфизма, т. е. таких $\gamma_0 \subseteq \gamma$, что $\gamma_0 \subseteq \gamma_t$ при $t \geq 0$. В частности, было найдено необходимое условие равенства условной энтропии $H(\gamma_t|\gamma_0)$ и энтропии автоморфизма. Другой важный результат этой работы – доказательство совпадения класса К-автоморфизмов с классом автоморфизмов с вполне положительной энтропией, введенным незадолго до этого М. С. Пинскером.

Ряд работ Я. Г. Синая посвящен исследованию К-поток. В [57] он установил, что всякий К-поток имеет положительную энтропию, счетнократный лебеговский спектр и является перемешиванием всех степеней. Что касается спектра, то новым здесь было утверждение о его бесконечной кратности (для К-автоморфизмов аналогичный результат доказывается легко и был отмечен уже в [36]). Для потоков же пришлось применить изощренную технику теории меры и спектральной теории операторов, в частности специальные представления потоков – абстрактный вариант секущей поверхности и функции последования Пуанкаре. А наличие или отсутствие кратного перемешивания не определяется ни спектром, ни энтропией, поэтому для К-систем его надо было доказывать отдельно. В работе [61], ставшей естественным продолжением [57], найдены весьма общие условия, при которых динамическая система является К-системой. Эти условия формулируются в терминах введенных в [61] трансверсальных полей. Метод трансверсальных полей оказался весьма эффективным при исследовании гладких динамических систем на многообразиях, в частности, систем Аносова, но в [61] результаты сформулированы для гораздо более общей ситуации. Заметим, что еще за несколько лет до этого Я. Г. Синай доказал, что К-потоками являются геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны, причем в двумерном случае постоянство кривизны заменяется ее ограниченностью (см. [55], [56], [58]). А в случае постоянной кривизны он впервые вычислил энтропию геодезического потока, выразив ее через кривизну (заметим, что в работе А. Н. Колмогорова [36] содержится довольно искусственный пример, специально построенный для того, чтобы продемонстрировать К-поток с конечной энтропией).

Следующий пример показывает, насколько результаты Я. Г. Синая должны были казаться неожиданными большинству физиков, да и математиков тоже. Рассмотрим геодезический поток $\{S_t\}$ на поверхности M постоянной отрицательной кривизны. Его фазовое пространство X состоит из единичных касательных векторов к M и, следовательно, имеет размерность три. Тогда можно подобрать $\Delta > 0$ и разбить X на два борелевских множества A и B таким образом, что если для точки $x \in X$ писать a при $S_{\Delta t} \in A$ и b при $S_{\Delta t} \in B$, то никакие статистические тесты не позволят отличить полученную для почти каждой точки x последовательность символов a и b от аналогичной последовательности, описывающей результаты простейших испытаний Бернулли, т. е. бросаний симметричной монеты. Таким образом, вероятностные закономерности возникают в недрах гладких динамических систем с малым числом степеней свободы, а согласно устоявшимся к тому времени представлениям подобный эффект возможен лишь при стремлении числа степеней свободы к бесконечности. Вот почему открытия Я. Г. Синая в энтропийной теории имели, можно сказать, мировоззренческий характер.

Гиперболические системы. Теория гиперболических систем возникла после работы Д. В. Аносова, который ввел такие системы в 1963 г. под именем У-систем и доказал их структурную устойчивость (теперь их называют равномерно гиперболическими или системами Аносова). Главным инструментом изучения систем Аносова служат устойчивое и неустойчивое слоения в их фазовом пространстве. Я. Г. Синай показал, что наличие гладкой структуры не обязательно для полного выяснения

эргодических свойств динамических систем гиперболического типа: достаточно, чтобы существовали введенные в [61] трансверсальные поля, обобщающие устойчивое и неустойчивое слоения.

Большое значение имел неожиданный результат Я. Г. Синая [62], [63], касавшийся символической динамики систем Аносова. Хотя символическая динамика являлась одним из признанных методов изучения различных классов динамических систем, было понятно, что этот метод успешно работает лишь в том случае, когда символическая модель рассматриваемой системы достаточно проста. Наиболее простая символическая система – это сдвиг в пространстве всех бесконечных последовательностей, образованных конечным числом символов (называемый также полным сдвигом и символическим сдвигом Бернулли). Но такая модель имеет очень ограниченную область применения. Р. Адлер и Б. Вейсс заметили, что для алгебраического автоморфизма двумерного тора существует марковская символическая модель – сдвиг в пространстве всех последовательностей, в которых нигде не встречаются рядом символы из некоторого фиксированного набора упорядоченных пар. Уже это позволило им доказать, что в классе эргодических автоморфизмов двумерного тора энтропия является полным инвариантом (теория Орнштейна, из которой это также следует, тогда еще не существовала). Я. Г. Синай первым понял, что Адлер и Вейсс обнаружили не частную, а типичную для систем Аносова ситуацию, но его конструкция марковской символической динамики для общего случая по необходимости оказалась гораздо более сложной. Вскоре Р. Боуэн обобщил и усовершенствовал эту конструкцию; с тех пор марковские символические модели с конечным, а затем и счетным алфавитом были построены для многих классов динамических систем, в том или ином смысле гиперболических, а это, в свою очередь, дало возможность весьма полно изучить их эргодические свойства.

Я. Г. Синай первым понял перспективы, которые открывает использование в теории динамических систем идей статистической физики (о его работах в области собственно статистической физики будет сказано ниже). После того как в конце 60-х годов прошлого века в математических методах статистической физики произошел прорыв, связанный с появлением определения гиббсовской меры на множествах конфигураций в бесконечном пространстве в терминах семейства условных распределений этой меры, отвечающих “внутренности сосуда” при условии “внешности” (уравнение Добрушина–Лэнфорда–Рюэля), Я. Г. Синай предложил альтернативный подход к этому понятию, более приспособленный к теории динамических систем [65]. При этом подходе гиббсовская мера определяется как слабая предельная точка последовательности вероятностных мер, имеющих плотность φ_n относительно некоторой фиксированной меры μ_0 (обычно это мера с максимальной энтропией для преобразования T), причем $\varphi_n = c_n \exp \sum_i T^i \circ f$, где f – некоторая функция, имеющая смысл потенциала взаимодействия, а c_n – нормирующий множитель. Аналогичная конструкция применима и к системам с непрерывным временем. С помощью этой конструкции Я. Г. Синай определил, сначала для марковских символических моделей систем Аносова, а затем и для самих этих систем (для транзитивных диффеоморфизмов – в общем случае, для потоков – при некоторых ограничениях), обширный класс гиббсовских инвариантных мер. При этом оказалось, что для достаточно регулярных функций f гиббсовская мера единственна и обладает сильными эргодическими свойствами. Особую роль играют две гиббсовские меры: одна из них, μ^s , естественным образом порождает на каждом устойчивом многообразии меру, абсолютно непрерывную относительно риманова объема; другая, μ^u , обладает аналогичным свойством по отношению к неустойчивым многообразиям. Для этих мер роль потенциала играет соответственно логарифм коэффициента сжатия риманова объема вдоль устойчивого

многообразия и логарифм коэффициента растяжения вдоль неустойчивого многообразия. Аналог меры μ^u можно определить и в случае, когда система не является гиперболической, но имеет гиперболический аттрактор. Тогда μ^u сосредоточена на аттракторе, и для почти каждой (в смысле меры Лебега) точки x временное среднее всякой непрерывной функции существует и совпадает со средним по мере μ^u , т. е. x является типичной по отношению к μ^u точкой. Это свойство позволяет считать меру μ^u “естественной” инвариантной мерой. В дальнейшем аналоги меры μ^u рассматривались Р. Боуэном и Д. Рюэлем. Сейчас эти меры принято называть мерами Синая–Боуэна–Рюэля. Они также играют важную роль при изучении малых случайных возмущений гиперболических диффеоморфизмов и потоков, что было начато уже в [65].

Таким образом, в работах [62], [63], [65] Я. Г. Синай положил начало и предложил программу развития эргодической теории гиперболических и близких к ним систем. В реализации этой программы принял участие он сам, а также ряд его учеников и коллег (см. обзор [48]). При этом некоторые подходы обобщались и уточнялись, но влияние работ [62], [63], [65] остается несомненным. В частности, работа [65] стала одним из главных источников так называемого термодинамического формализма как части теории динамических систем (термин принадлежит Рюэлю, который, впрочем, его не изобрел, а только переосмыслил уже существовавший в статистической физике).

Особый класс гиперболических систем образуют рассеивающие билиарды, или билиарды Синая. Они описывают равномерное и прямолинейное движение билиардного шара (точнее, луча света) внутри компактной области в $\mathbb{R}^n$ с упругими отражениями от границы, которая образована конечным числом строго выпуклых внутрь гладких многообразий коразмерности один. Такая система уже является неравномерно гиперболической, и главное следствие этого отличия состоит в том, что устойчивое и неустойчивое многообразия проходят уже не через каждую, а только через почти каждую точку и являются не гладкими, а только кусочно гладкими. Поэтому исследование таких систем требует преодоления новых весьма существенных трудностей. В [64] Я. Г. Синай определил рассеивающие билиарды в двумерном случае, ввел наиболее важные инструменты для их исследования и доказал эргодичность. Изучение эргодических свойств билиардов было продолжено им в [69] и в ряде совместных работ с его учениками Л. А. Бунимовичем и Н. И. Черновым.

Необходимо упомянуть также о полурассеивающих билиардах, в которых выпуклые компоненты границы области являются строго выпуклыми в одних направлениях и плоскими в других. Важность таких билиардов объясняется тем, что к ним сводится модель газа твердых шаров в кубе, упруго отталкивающихся от стенок и друг от друга, а между столкновениями движущихся по инерции. Изучение эргодических свойств полурассеивающих билиардов оказалось очень содержательной задачей. Ее решение было инициировано Я. Г. Синаем в самом начале его научной деятельности и продолжается до сих пор.

Динамические системы с бесконечным числом степеней свободы. Простейшей системой с бесконечным числом степеней свободы является модель идеального газа. Она описывает движение бесконечного числа независимо движущихся точечных частиц в пространстве $\mathbb{R}^n$. В совместной работе со своим учеником К. Л. Волковским [82] Я. Г. Синай показал, что эта система (поток) не только эргодична, но и является К-системой. Этот результат кажется противоречащим принятым физическим представлениям: ведь в системе нет взаимодействия и, скажем, скорость отдельной частицы сохраняется, т. е. является инвариантной функцией. Но дело в том, что такой функции на фазовом пространстве нет, так как динамика определена на

множестве симметризованных конфигураций координат и скоростей и отдельную частицу выделить нельзя. Правда, аналогичная аргументация применима и к конечным системам, но в последнем случае все же существуют полноценные инвариантные функции, например сумма скоростей всех частиц. Таким образом, сильными эргодическими свойствами идеальный газ обязан симметричности, т.е. неразличимости частиц, и бесконечности числа степеней свободы.

Следующий шаг был сделан Я. Г. Синаем в [66], где рассматривается система твердых шаров (стержней) на прямой, которые движутся по инерции и сталкиваются друг с другом по закону упругого удара. Как и в случае идеального газа, предполагается, что центры шаров образуют пуассоновское поле (с учетом того, что сами шары не пересекаются), а скорости при фиксированных координатах условно независимы и распределены нормально. В отличие от идеального газа здесь нельзя строить динамику на множестве, где столкновений нет – это множество имеет нулевую меру. Однако построение и исследование динамики все же в определенном смысле свелось к аналогичным действиям для идеального газа, но для этого автору потребовалось существенно дополнить результаты работы [82]. А основная теорема, как и в [82], утверждает, что рассматриваемая динамическая система является К-поток.

Тот же результат получен Я. Г. Синаем вместе с несколькими соавторами в [9], где они впервые на математическом уровне строгости изучили бесконечную систему точечных частиц на полупрямой $\mathbb{R}_+$ в предположении, что одна из частиц (тяжелая) имеет массу M , а остальные (легкие) – массу $m < M$. При этом тяжелая частица упруго отталкивается от конца полупрямой, постоянно оставаясь ближайшей к нему частицей, и таким же образом сталкивается с легкими частицами (обменивается импульсами), которые друг с другом не взаимодействуют. За этой работой последовал ряд других на близкую тему, среди которых работа Я. Г. Синая и его ученика М. Р. Соловейчика [76], где они, в частности, доказали существование предельного распределения у нормированного положения тяжелой частицы.

Другой популярной статфизической модели, так называемому газу Лоренца, посвящена работа Я. Г. Синая [70]. Газ Лоренца отличается от идеального газа тем, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется бесконечное множество неподвижных шаров (рассеивателей) и каждая из свободно движущихся точечных частиц отражается от них по закону “угол падения равен углу отражения”. Предполагается, что координаты частиц образуют конфигурацию пуассоновского поля в области, свободной от рассеивателей, и что при фиксированных координатах скорости условно независимы и равномерно распределены на единичной сфере (возможна и более общая ситуация, когда расположение рассеивателей тоже случайно). Ранее случай периодического расположения рассеивателей был изучен в [23]. Я. Г. Синай рассматривает гораздо более общий (и трудный) случай, формулируя достаточные условия на расположение рассеивателей в $\mathbb{R}^2$, при которых газ Лоренца оказывается К-системой. С технической точки зрения эту работу можно было бы отнести к теории рассеивающих бильярдов, так как в ней применяются по существу те же методы.

Во всех описанных выше работах Я. Г. Синая по системам с бесконечным числом степеней свободы в основном исследовались их эргодические свойства, построение же самой динамики особых трудностей не представляло. Совершенно иначе обстоит дело, когда имеется нетривиальное взаимодействие между частицами. Первым к этому вопросу обратился О. Лэнфорд [39], рассмотрев бесконечную систему частиц на прямой, взаимодействие между которыми определяется парным потенциалом U , который предполагается ограниченной финитной C^2 -функцией расстояния между частицами, для которой $U'(0+) = U''(0+) = 0$. Пользуясь этими несколько искусственными с физической точки зрения ограничениями, Лэнфорд описал подмножество фазового пространства, на котором существует и единственно решение соответствующей бес-

конечной системы уравнений Гамильтона, причем на этом множестве сосредоточены вероятностные меры из достаточно широкого класса, в частности мера Гиббса с потенциалом U и произвольными значениями температуры и плотности, причем при $U > 0$ эта мера инвариантна относительно построенной динамики.

Я. Г. Синай поставил перед собой задачу построить динамику при более естественных условиях на взаимодействие. В [67] он рассмотрел одномерную систему с финитным парным потенциалом U класса C^1 , который равен бесконечности на отрезке от нуля до r ($r \leq 0$ – радиус твердой сердцевины) и стремится к бесконечности при подходе к r справа (последнее условие соответствует сильному отталкиванию на малых расстояниях между частицами, что часто предполагается в физических моделях). Основной результат состоит в том, что на некотором подмножестве фазового пространства бесконечной системы, имеющем полную меру относительно распределения Гиббса с потенциалом U и произвольными значениями температуры и плотности, можно построить динамику. Эта динамика сохраняет упомянутую меру Гиббса, которую по этой причине иногда называют равновесной. А поскольку множество, где строится динамика, может, вообще говоря, зависеть от U , саму динамику также стали называть равновесной. Я. Г. Синай обнаружил важное свойство построенной им динамики – ее кластерный характер: для всякого $T > 0$ все бесконечное множество частиц можно разбить на конечные подмножества (кластеры) так, что на отрезке времени от нуля до T частицы из разных кластеров не взаимодействуют. Собственно говоря, на кластерности конечночастичных динамик, аппроксимирующих бесконечночастичную, и основано построение последней. Эти результаты Я. Г. Синай частично обобщил в [68] на многомерный случай, наложив дополнительные условия на потенциал и условие малости на плотность. Работы [67] и [68] оказали существенное влияние на дальнейшие исследования в этой области, выполненные учеником Я. Г. Синая А. Н. Земляковым, группой итальянских математиков и, наконец, Р. Л. Добрушиным и Й. Фритцем, построившими неравновесную динамику в размерностях 1 и 2.

В заключение этого раздела упомянем еще совместную работу Я. Г. Синая и его учеников Б. М. Гуревича и Ю. М. Сухова [26], в которой был сделан первый шаг на пути строгого обоснования естественности появления гиббсовской меры как инвариантной меры бесконечночастичной динамики. Эта работа вызвала к жизни большой цикл дальнейших исследований.

Теория чисел. Работы Я. Г. Синая по теории чисел включены в наш обзор потому, что в них явно присутствуют связи между этой теорией и такими разделами математики, как теория вероятностей, статистическая механика, теория динамических систем. Здесь отразился общий подход Якова Григорьевича к математике как к науке с множеством взаимосвязей между различными ее областями.

В работе [16] Я. Г. Синай и его ученик Е. И. Динабург исследовали статистические свойства целочисленных решений уравнения $|ax - by| = 1$. Частное решение этого уравнения можно найти, рассматривая разложение в цепную дробь числа $\frac{a}{b}$: если $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_s}{q_s} = \frac{a}{b}$ – подходящие дроби для $\frac{a}{b}$, то пара (q_{s-1}, p_{s-1}) является решением уравнения $|ax - by| = 1$. Авторы исследуют статистику отношений q_{s-1}/b , когда a, b удовлетворяют неравенствам $\alpha_1 N < a < \beta_1 N$, $\alpha_2 N < b < \beta_2 N$, где $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < 1$ и N – натуральное число. Оказывается, что при $N \rightarrow \infty$ распределение на отрезке $[0, 1]$ отношения q_{s-1}/b в некотором смысле стремится к равномерному. Ключевое соображение, примененное авторами, заключается в перефразировке проблемы в терминах подходящим образом сконструированного специального потока над естественным расширением отображения Гаусса; функция высоты для потока получается из обращения разложения a/b в цепную дробь. Равнораспределенность тогда следует из свойства перемешивания у этого специального

потока. Как не раз уже бывало в задачах о перемешивании, здесь оказалось легче доказать более сильное утверждение: рассматриваемый поток обладает К-свойством. Красивый метод вывода теоретико-числовых результатов из эргодических свойств потока стал весьма популярен и позволил продвинуться в решении нескольких проблем. Так, Я. Г. Синай и его ученица К. Ульчиграи использовали этот метод в [79] для изучения статистических свойств последовательности знаменателей q_n подходящих дробей разложения в цепную дробь типичного действительного числа α . Поскольку целочисленная последовательность q_n возрастает, можно определить номер первого ее члена, скажем, n_L , для которого $q_{n_L} > L$. Возникает естественный вопрос – насколько большим может быть q_{n_L} по сравнению с L при больших L ? Оказывается, что если α выбрано случайно, то отношение q_{n_L}/L имеет при $L \rightarrow \infty$ предельное распределение на $(0, \infty)$. Этот результат получил развитие в работах других математиков. В частности, А. В. Устинов [80] указал явную формулу для предельного распределения.

Другое применение метода из [16] имеется во второй работе Я. Г. Синай и К. Ульчиграи [78]. Классический результат Харди и Литтлвуда утверждает, что если α – квадратическая иррациональность, то частичные суммы тригонометрического ряда $\sum_{n=1}^N \sin(n\pi\alpha)^{-1}$ равномерно ограничены. В [78] для похожих сумм $\sum_{n=0}^{N-1} (1 - e^{2\pi i(n\alpha+x)})^{-1}$ было доказано, что если выбрать точку (α, x) случайным образом в единичном квадрате, то после деления на N эти суммы будут иметь при $N \rightarrow \infty$ предельное распределение на комплексной плоскости. Это следует из более общей теоремы о распределении нормированных эргодических сумм неинтегрируемых функций над поворотом окружности (т. е. отображением $R_\alpha(x) = x + \alpha \bmod 1$). Класс функций, рассмотренный в [78], характеризуется симметричными логарифмическими особенностями. А. В. Кочергин [35] доказал, что специальные потоки над поворотом R_α , построенные по таким функциям, не перемешивают, каково бы ни было α . С другой стороны, в случае функций с асимметричными логарифмическими особенностями, как доказали Я. Г. Синай и его ученик К. М. Ханин [75], специальный поток над поворотом окружности перемешивает, если α удовлетворяет условию диофантовости. Это условие выполняется для множества полной меры значений α , так что эта работа дает положительный ответ на вопрос, поставленный В. И. Арнольдом в [3]. Сюда примыкают также совместные работы Я. Г. Синай с его учениками А. И. Буфетовым и К. Ульчиграи [11], [77] о спектре перекладываний.

Результаты статей [79] и [80] были использованы еще в двух работах – Ж. Бургейна и Я. Г. Синай [10] и Я. Г. Синай, В. Щура и А. В. Устинова [53]. В этих работах рассматривается классическая проблема Фробениуса, известная также как задача о размене монет: каково для данных взаимно простых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ наибольшее целое число, не представимое в виде $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ с неотрицательными целыми x_j ? Это число называют числом Фробениуса и обозначают $F(a_1, \dots, a_n)$. В 1884 г. Дж. Дж. Сильвестр ответил на этот вопрос при $n = 2$, указав формулу $F(a_1, a_2) = a_1 a_2 - a_1 - a_2$. При $n \geq 3$ формулы для числа Фробениуса неизвестны. Однако, если выбрать тройку (a_1, a_2, a_3) с $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1$ и $a_i \leq N$ случайным образом (с равномерным распределением на этом множестве), то нормированное число Фробениуса $N^{-3/2} F(a_1, a_2, a_3)$ будет иметь при $N \rightarrow \infty$ предельное распределение. Это утверждение было доказано в [10] и [53] вместе с некоторыми частичными результатами для $n > 3$. Явная формула для предельного распределения в случае $n = 3$ была получена А. В. Устиновым [81], а Й. Марклоф [41] нашел связь предельных распределений при всех $n \geq 3$ с некоторыми потоками в пространствах решеток.

Совместные работы Я. Г. Синай [12]–[14], [4], [5] с его учениками Ф. Челларози и М. Авдеевой и с Д. Ли посвящены статистическим свойствам знаменитой функции Мёбиуса μ (напомним, что $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат какого-нибудь целого

числа > 1 , и $\mu(n) = (-1)^{s(n)}$, где $s(n)$ – число простых делителей, входящих в разложение n , – в противном случае). В [12] и [14] обсуждается вероятностная модель для чисел, свободных от квадратов, основанная на идеях статистической механики. Если множество Ω_n всех свободных от квадратов чисел вида $n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_m^{\nu_m}$, где $\nu_i \in \{0, 1\}$, снабдить вероятностной мерой $P_m(\{n\}) = c_m/n$ с надлежащим образом подобранной константой c_m , то можно поставить естественный вопрос, как выглядит типичное число из Ω_m при $m \rightarrow \infty$. Оказывается, что если положить $n = p_m^{\xi_m(n)}$, то ξ_m будет иметь при $m \rightarrow \infty$ предельное распределение на $(0, \infty)$. Это распределение является безгранично делимым и имеет непрерывную плотность, довольно необычную с точки зрения теории вероятностей: она постоянна на интервале $(0, 1]$, а справа от него стремится к нулю быстрее любой экспоненты. Эта плотность ранее появлялась (в явном или неявном виде) в работах по теории чисел и комбинаторике (см. обзор [25]). В [12] также доказано, что в ансамбле Ω_m число различных простых делителей числа n (т. е. $\Omega(n) = \sum_{j=1}^m \nu_j$) удовлетворяет центральной предельной теореме Эрдёша–Каца с математическим ожиданием и дисперсией, равными $\log \log m$. В самое последнее время Я. Г. Синай и его ученики продолжили эти исследования и получили новые замечательные результаты.

Хотя в общем случае поведение автокорреляций последовательности $\mu(n)$ неизвестно (о них говорит так называемая гипотеза Чоулы), этот вопрос решен для $\mu^2(n)$. В 2013 г. Ф. Челларози и Я. Г. Синай [13] рассмотрели r -точечные корреляционные функции для $\mu^2(n)$ (т. е. пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n \leq N} \mu^2(n + a_1) \mu^2(n + a_2) \cdots \mu^2(n + a_r)$), которые были впервые исследованы Л. Мирским в 1949 г. С их помощью авторы построили на пространстве двоичных последовательностей вероятностную меру, которая инвариантна относительно сдвига и содержит всю информацию о статистике μ^2 . Сдвиг с этой инвариантной мерой имеет чисто точечный спектр и, значит, нулевую энтропию. Этот результат показывает, что сильная хаотичность последовательности Мёбиуса $\mu(n)$ (имеется гипотеза, что $\sum_{n \leq N} \mu(n) \mu(n+1) = o(N)$ при $N \rightarrow \infty$) возникает не вследствие хаотического расположения в ней нулей, а связана лишь с четностью числа простых делителей у чисел n , свободных от квадратов.

Интересно отметить, что символическая динамическая система, полученная с помощью замыкания орбиты последовательности $\mu^2(n)$, имеет положительную топологическую энтропию и для нее существует единственная мера с максимальной энтропией (эти результаты получили Р. Пекнер [47] и в более общей ситуации – И. Кувага-Пжимус, М. Леманчик и Б. Вейсс [38]). Более того, как доказано в [47], ограничение меры с максимальной энтропией на сигма-алгебру Пинскера совпадает с мерой, построенной Ф. Челларози и Я. Г. Синаем в [13]. Таким образом, динамическая система, рассмотренная в [13], является фундаментальным структурным элементом при изучении символической динамики, связанной с $\mu^2(n)$.

Статистическая физика. С конца 1960-х годов статистическая физика становится одним из главных направлений исследований Я. Г. Синая. Семинар по статистической физике, которым в течении многих лет Яков Григорьевич руководил совместно с рядом коллег, был одним из основных мировых центров развития математических методов этой науки. Можно сказать, что многие разделы этой, тогда еще совсем молодой области создавались участниками семинара. Истории этого семинара посвящен специальный выпуск журнала “The European Physical Journal H” (2012, v. 37, № 4), содержащий ряд статей его участников с общим предисловием Я. Г. Синая.

Одной из первых работ Я. Г. Синая в области равновесной статистической физики был цикл совместных статей с Р. А. Минлосом, в которых изучалось явление разделения фаз [44], [45]. Основным результатом, часто называемый теоремой о капле, состоял

в описании структуры типичных конфигураций системы, находящейся в $+$ -фазе и содержащей при этом большую компоненту отрицательных спинов. Оказалось, что при низких температурах в системе имеется большой контур, разделяющий области преобладания положительных и отрицательных спинов и приближенно имеющий форму квадрата. Необходимо отметить, что в конце 1980-х – начале 1990-х годов Р. Л. Добрушин, Р. Котецкий и С. Б. Шлосман [17] существенно уточнили эти результаты.

Сложная техника, развитая в [44], [45] и основанная на изучении статистики контуров, послужила толчком к созданию замечательной общей теории низкотемпературных фазовых переходов, построенной Я. Г. Синаем совместно с его учеником С. А. Пироговым. Теория Пирогова–Синая [49], [50] является выдающимся достижением, в известном смысле окончательным в теории низкотемпературных фазовых переходов. Основной результат может быть сформулирован следующим образом. Рассмотрим систему статистической механики на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$, с трансляционно инвариантным гамильтонианом H_0 . Предполагается, что спин принимает конечное число значений и что у H_0 имеется конечное число k периодических основных состояний, т. е. периодических конфигураций спинов, отвечающих минимуму гамильтониана. Предположим также, что эти k основных состояний удовлетворяют некоторому условию регулярности (так называемому условию устойчивости по Пайерлсу), легко проверяемому для конкретных моделей. Классическим примером такой системы является ферромагнитная модель Изинга, где имеется два основных состояния, отвечающих конфигурациям спинов $+1$ и -1 соответственно. Рассмотрим теперь $(k-1)$ -параметрическое семейство периодических гамильтонианов

$$H_\mu = H_0 + \mu_1 H_1 + \dots + \mu_{k-1} H_{k-1},$$

снимающее вырождение основных состояний. Это означает, что любое подмножество множества основных состояний может быть реализовано для подходящего $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{k-1})$ из шара $|\mu| \leq \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Тогда для больших значений обратной температуры $\beta > 0$, т. е. для низких температур локально по параметру μ имеется полная стратификация множества чистых фаз, т. е. эргодических предельных распределений Гиббса. А именно, имеется точка $\mu(\beta)$, в которой ровно k чистых фаз, отвечающих k основным состояниям. Из этой точки выходят k кривых γ_i , $1 \leq i \leq k$, на каждой из которых имеется $k-1$ чистая фаза, причём на кривой γ_i отсутствует чистая фаза, отвечающая i -му основному состоянию; каждые две кривые γ_i, γ_j соединены гладкой двумерной поверхностью $\gamma_{i,j}$ такой, что для $\mu \in \gamma_{i,j}$ число чистых фаз равно $k-2$ (они отвечают всем основным состояниям, кроме i -го и j -го), и так далее. Описанная стратификация гладко зависит от параметра β . Иными словами, отвечающая $\beta = \infty$ линейная структура основных состояний, зависящая от параметра μ , хотя и перестает быть линейной, но сохраняется и переносится на пространство гиббсовских состояний. Технически работа основана на развитом авторами методе контурных разложений, далеко обобщающем подход Пайерлса, примененный им к очень специальному случаю модели Изинга. Стоит отметить, что методы Пирогова и Синая были перенесены на случай непрерывного спина в работах Р. Л. Добрушина и М. Заградника.

Необходимо остановиться на еще одном важном цикле работ Я. Г. Синая по статистической физике, это работы о ренормализационной группе. Идеи масштабной инвариантности и ренормгруппы возникли в теоретической физике и стали играть исключительно важную роль в статистической физике с середины 1960-х годов. Здесь можно назвать имена таких физиков, как М. Фишер, Л. Каданов, К. Вильсон, А. Е. Паташинский, В. Л. Покровский, А. М. Поляков, А. А. Мигдал и многие другие. Методы ренормгруппы стали одним из основных инструментов в исследовании критических явлений. Кульминацией стало присуждение К. Вильсону Нобелевской премии за разработку методов ε -разложений. В то же время, строгое обоснование идей ренормгруппы представляло и все еще представляет чрезвычайно трудную задачу. В цикле

совместных работ Я. Г. Синая и его ученика П. М. Блехера [7], [8] была построена математически полная теория ренормгруппы для так называемой иерархической модели Дайсона. Хотя с точки зрения статистической физики иерархические модели Дайсона являются упрощенными, их ренормгрупповое поведение оказывается крайне нетривиальным, и построение математически строгой теории было очень важным достижением.

Спектр оператора Шрёдингера. Перейдем теперь к другим исследованиям Я. Г. Синая в области математической физики. Начнем с работ по спектральной теории одномерного оператора Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом. Две работы Я. Г. Синая, посвященные этому направлению, сыграли очень важную роль в его развитии. Первая из них – это совместная работа с Е. И. Динабургом [15], в которой впервые были построены собственные функции непрерывного спектра при малых константах связи, т. е. для малых квазипериодических потенциалов. Во второй работе [72], написанной более чем через 10 лет, рассмотрен противоположный случай больших констант связи и доказано существование чисто точечного спектра с локализованными собственными функциями. Это означает, что для больших квазипериодических потенциалов имеется локализация Андерсона, т. е. оператор Шрёдингера ведет себя так же, как при случайном потенциале. Хотя в [15] рассматривается оператор Шрёдингера $-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi$, мы обсуждаем ниже результаты в эквивалентной дискретной формулировке для оператора

$$(H_{\theta}^{\alpha,\gamma}\psi)_n = -\psi_{n+1} - \psi_{n-1} + \lambda V(\theta + n\alpha)\psi_n,$$

действующего как самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z})$. Потенциал $V(x)$ предполагается гладкой (аналитической) функцией на единичной окружности S^1 . Основной (и наиболее изученный) случай отвечает потенциалу $V(x) = \cos 2\pi x$. Иногда в этом случае оператор называют “почти Матье”. При рациональных $\alpha = p/q$ оператор Шрёдингера является периодическим. Хорошо известно, что в этом случае спектр абсолютно непрерывен и имеет зонную структуру, анализ здесь восходит к работам Флоке и Блоха. Е. И. Динабург и Я. Г. Синай доказали, что в случае диофантова иррационального числа α и малой константы связи λ имеется множество положительной меры энергий E , отвечающих блоховским собственным функциям вида $\psi_{\alpha,E}(n) = a_{\alpha,E}(n\alpha)e^{ik(\alpha,E)n}$. Эти собственные функции удовлетворяют уравнению $H_{\theta}^{\alpha,\gamma}\psi_{\alpha,E} = E\psi_{\alpha,E}$. Из доказанного утверждения вытекает существование абсолютно непрерывного спектра. Одним из наиболее интересных аспектов работы [15] является привлечение методов теории КАМ, которые применяются для преодоления главной трудности, связанной с присутствием малых знаменателей. Чтобы пояснить, каким образом теория КАМ возникает в задаче о спектре оператора Шрёдингера, рассмотрим уравнение на собственную функцию

$$(H_{\theta}^{\alpha,\gamma}\psi)_n = -\psi_{n+1} - \psi_{n-1} + \lambda V(\theta + n\alpha)\psi_n = E\psi_n.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda V(\theta + n\alpha) - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Введя

$$S_E(\theta) = \begin{pmatrix} \lambda V(\theta) - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}),$$

мы получаем

$$\begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} = S_E(\theta + (n-1)\alpha) \cdots S_E(\theta + \alpha) S_E(\theta) \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix}.$$

Возникающая структура называется шрёдингеровским коциклом, и задача сводится к изучению произведения значений гладкой матричнозначной функции $S_E(\theta)$ вдоль траектории поворота единичной окружности на угол α . Удобно считать, что над единичной окружностью имеется расслоение на двумерные плоскости $\mathbb{R}^2$ и матрица $S_E(\theta)$ представляет линейный оператор, действующий из плоскости над точкой θ в плоскость над $\theta + \alpha \pmod{1}$. Если мы теперь в каждом слое сделаем линейную замену координат, задаваемую матрицей $B(\theta)$, которая гладко зависит от слоя θ , то исходный коцикл в новых координатах будет выглядеть следующим образом: $\bar{S}_E(\theta) = B^{-1}(\theta + \alpha)S_E(\theta)B(\theta)$. Ситуация становится особенно простой, если с помощью описанной выше процедуры можно получить постоянный коцикл, т. е. $\bar{S}_E(\theta)$ не зависит от θ . Такие коциклы называются приводимыми. Основное утверждение теоремы Динабурга–Синая состоит в том, что шрёдингеровский коцикл приводим для множества значений E , имеющего положительную меру. Позже Х. Элиассон показал, что в случае малых констант связи λ приводимость имеет место для почти всех E . Отсюда следует, что спектр является чисто абсолютно непрерывным.

В противоположном случае больших констант связи λ спектр является чисто точечным. Чтобы это доказать, необходимо построить базис в $l^2(\mathbb{Z})$, состоящий из собственных функций для оператора $H_\theta^{\alpha, \gamma}$. Это было сделано Я. Г. Синаем [72] и независимо Фрёлихом, Спенсером и Виттвером [21] для более специального класса потенциалов. Я. Г. Синай доказал, что для диофантовых α и типичных θ в случае больших λ спектр является чисто точечным. При этом собственные функции убывают экспоненциально, т. е. имеется локализация Андерсона. В терминах коцикла случай больших λ отвечает гиперболическому поведению с одним положительным и одним отрицательным показателями Ляпунова. Следовательно, при каждом E существует единственный устойчивый вектор $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix}$, для которого $S_E^n(\theta) \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ экспоненциально быстро. Здесь $S_E^n(\theta) = S_E(\theta + (n-1)\alpha) \cdots S_E(\theta + \alpha)S_E(\theta)$. Также имеется единственный неустойчивый вектор, который сжимается в обратном направлении: $(S_E^n(\theta - n\alpha))^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_0 \\ \bar{\psi}_{-1} \end{pmatrix} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ с экспоненциальной скоростью. Собственные значения отвечают таким значениям E , при которых два вектора совпадают: $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_0 \\ \bar{\psi}_{-1} \end{pmatrix}$. Доказательство того, что такие E существуют, а соответствующие собственные функции образуют базис, и составляет содержание теоремы Синая. Следует оговориться, что Я. Г. Синай не использует представления с помощью коцикла: доказательство основано на трудном анализе возникающих в задаче резонансов. Стоит привести высказывание самого Якова Григорьевича: “Локализация – это игра резонансов”. Работы Я. Г. Синая положили начало целой области, исключительно активно развивавшейся в последние 25 лет. Большой вклад в ее развитие внесли Авила, Аврон, Беллисард, Бургейн, Даманик, Элиассон, Фрёлих, Гольдштейн, Эрман, Житомирская, Крикорян, Ласт, Пуйг, Шлаг, Саймон, Спенсер. Заметим, что описанные выше результаты носят пертурбативный характер и относятся к асимптотическим режимам, отвечающим большим и малым значениям константы связи. Некоторые результаты, полученные в последнее время, позволяют изучать спектральное поведение для любых значений константы связи. В частности, большой прогресс был достигнут в понимании перехода от непрерывного спектра к чисто точечному для оператора “почти Матье”. Оказывается, что в этом случае спектр является абсолютно непрерывным для всех $\lambda \in [0, 2)$ и для любых α, θ . При $\lambda = 2$ спектр почти наверное непрерывен и сингулярен. “Почти наверное” означает, что для любых иррациональных λ может существовать исключительное не более чем счетное множество

значений θ , при которых имеются собственные функции из l^2 . Гипотетически таких исключительных значений нет, но этого пока доказать не удастся. При $\lambda > 2$ спектр почти наверное чисто точечный. Известно, что исключительные значения α, θ существуют, но имеют меру нуль. Большой вклад в развитие этой программы внесла ученица Я. Г. Синая Светлана Житомирская. В заключение отметим, что в самое последнее время Артур Авила развил глобальную теорию для общих гладких потенциалов. Присуждение Авиле Филдсовской медали в 2014 г. было во многом связано с его работами именно в этой области.

Случайные блуждания в случайной среде. В 1982 г. Я. Г. Синай опубликовал две работы, в которых изучаются одномерные случайные блуждания в случайной среде. В простейшем случае, когда частица может перескакивать только в один из ближайших узлов решетки $\mathbb{Z}^1$, случайная среда определяется набором независимых одинаково распределенных случайных величин $p(x)$, $x \in \mathbb{Z}^1$, задающих вероятность перехода из точки x в точку $x + 1$. Тогда вероятность скачка из x в $x - 1$ равна $q(x) = 1 - p(x)$. Дополнительно предполагается, что распределение вероятностей для $p(x)$ является невырожденным, т.е. оно отделено от 0 и 1. Такие случайные блуждания были впервые рассмотрены М. В. Козловым и Ф. Соломоном в начале 1970-х годов. Затем Х. Кестен, М. В. Козлов и Ф. Спитцер [31] показали, что блуждание возвратно для почти всех реализаций среды тогда и только тогда, когда $E \log(p/q) = 0$. Однако более детальная картина поведения блуждания в этом случае оставалась неясной. В 1982 г. Я. Г. Синай [71] решил эту задачу, открыв новое явление аномальной диффузии (теперь такие случайные блуждания называются блужданиями Синая). При обсуждении этих результатов удобно положить $p(x) = 1/2 + \varepsilon \xi(x)$, $q(x) = 1/2 - \varepsilon \xi(x)$, где $\{\xi(x), x \in \mathbb{Z}^1\}$ – последовательность независимых случайных величин с компактным носителем и с нулевым средним. Тогда при достаточно малых ε условие невырожденности для $p(x)$ будет выполнено. Можно дополнительно предположить, что распределение случайной величины ξ является четным. Это предположение гарантирует выполнение условия возвратности. При $\varepsilon = 0$ среда неслучайна и мы получаем обычное блуждание с диффузионным поведением. В частности, $x(n) \sim \sqrt{n}$, где $x(n)$ – положение блуждания в момент времени n , и распределение вероятностей для $x(n)/\sqrt{n}$ сходится к нормальному распределению $N(0, 1)$. Замечательный результат Я. Г. Синая состоит в том, что при сколь угодно малом ε имеет место асимптотика $x(n) \sim \log^2 n$. При этом распределение отношения $x(n)/\log^2 n$ сосредоточено при большом n в малой окрестности некоторой случайной точки m_n , зависящей от реализации среды $\{\xi(x), x \in \mathbb{Z}^1\}$, а распределение самой точки m_n как функции случайной среды имеет предел при $n \rightarrow \infty$. Такое поведение блуждания связано с тем, что из-за флуктуаций среды на решетке образуются специальные места (ловушки), из которых блужданию очень трудно выйти. Ловушки можно представлять себе как потенциальные ямы, они характеризуются временем, в течение которого они представляют преграду для блуждания. Находясь в ловушке, блуждающая частица постепенно “накапливает” флуктуацию, позволяющую ей покинуть яму. При этом частица вскоре попадает в другую яму, отвечающую большему масштабу времени. Вблизи дна ямы положение частицы локализовано: как показал А. О. Голосов [24], ученик Я. Г. Синая, у положения частицы вблизи дна ямы имеется предельное распределение.

Работа [71] обобщалась в нескольких направлениях. Одно из них связано с рассмотрением одномерных случайных блужданий со случайными вероятностями перехода, отличными от нуля не только для соседних точек. Интересные результаты в этой области были получены за последние 10 лет в работах Е. Болтхаусена,

И. Я. Гольдшейда и Д. И. Долгопята. Важно отметить, что открытый Я. Г. Синаем механизм возникновения ловушек возможен только в размерности 1. В размерности 3 и выше при малых ε поведение блуждания будет диффузионным. Вопрос о возможности замедления диффузии для не малых ε является открытым. В размерности 2 ожидается логарифмическое замедление диффузии с гауссовским предельным поведением. Однако строгих результатов в этой области в настоящее время нет.

Другая важная работа Я. Г. Синая в той же области [1], совместная с его учениками В. В. Аншелевичем и К. М. Ханиным, относится к так называемым симметричным случайным блужданиям. В этом случае случайные вероятности перехода зависят только от ребра решетки, но не от направления перескока вдоль этого ребра. Наиболее проста постановка задачи в случае блужданий с непрерывным временем на решетке $\mathbb{Z}^d$. На каждом ребре задается случайная интенсивность перехода по этому ребру. Вследствие симметричности описанные выше ловушки не возникают, и блуждающая частица ведет себя диффузионным образом, причем эффективная матрица ковариаций неслучайна. В отличие от предыдущего случая, этот результат верен для любой размерности.

Близкая задача активно изучалась с конца 1970-х годов, в основном в контексте теории усреднения для параболических операторов со случайными коэффициентами. Основные результаты, касающиеся эффективного диффузионного поведения и самоусреднения, были получены В. В. Жиковым, С. М. Козловым, О. А. Олейник, Г. Папаниколау и С. Вараданом. Подход, предложенный в [1], основан на других идеях. Этот подход позволил не только доказать существование эффективной матрицы диффузии, но и получить явное выражение для нее в виде сходящегося ряда.

Метод ренормгруппы в теории динамических систем. Выше мы уже отмечали работы Я. Г. Синая по теории ренормгруппы и масштабной инвариантности, относящиеся к статистической физике. Начиная с конца 1970-х годов метод ренормгруппы проникает в область динамических систем и становится одним из основных инструментов изучения асимптотического поведения сложных систем. Начало этому процессу положили работы М. Фейгенбаума об универсальном механизме стохастизации, связанном с бесконечными последовательностями бифуркаций удвоения периода. В 1984 г. Я. Г. Синай в совместной работе с Е. Б. Вул и К. М. Ханиным [83] развил термодинамический формализм для описания метрических свойств универсального аттрактора Фейгенбаума. Работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие данной области. Отметим также, что аттрактор Фейгенбаума, используя современную терминологию, можно назвать мультифрактальным объектом. В этом контексте работа [83] представляет собой первый пример развития мультифрактального анализа.

Другой цикл работ, основанный на идеологии ренормгруппы, связан с задачей о линеаризации нелинейных диффеоморфизмов окружности. В 1961 г. В. И. Арнольд [2] в рамках теории КАМ доказал локальную теорему об аналитической линеаризации аналитических диффеоморфизмов окружности, близких к линейным, при условии типичности чисел вращения. Глобальная теория была развита М. Эрманом [27] в середине 1970-х годов. Эрман доказал, что для типичных чисел вращения сопряжение является гладким в случае диффеоморфизмов класса гладкости выше C^3 . В 1987 г. Я. Г. Синай и К. М. Ханин [33] предложили новый подход к теории Эрмана. С его помощью им удалось доказать гладкость сопряжения для диффеоморфизмов класса $C^{2+\varepsilon}$. Важно отметить, что этот результат по существу неулучшаем, поскольку для C^2 -диффеоморфизмов и типичных чисел вращения гладкость сопряжений, вообще говоря, отсутствует. Двумя годами позже в другой совместной работе Я. Г. Синая

и К. М. Ханина [74] был получен намного более точный результат. Предположим, что T – диффеоморфизм окружности класса $C^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, а его число вращения ρ принадлежит к диофантову классу D_δ , т. е. существует такое $c(\rho)$, что $|q\rho - p| \geq c(\rho)q^{-1-\delta}$ для любых $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Тогда сопряжение с поворотом будет $C^{1+\varepsilon-\delta}$ -гладким при условии, что $\varepsilon > \delta$. Более простой подход к доказательству этой теоремы был недавно предложен в работе А. Ю. Теплинского и К. М. Ханина [34]. Отметим, что также в конце 1980-х годов другой подход к теории Эрмана был независимо предложен в работе И. Кацнельсона и Д. Орнштейна [30].

Завершая обсуждение работ Я. Г. Синая, относящихся к динамическим ренормализациям, отметим еще работу [32], где ренормгруппа применяется к построению инвариантных кривых теории КАМ для двумерных сохраняющих площадь отображений цилиндра, и совместную работу с А. И. Гольбергом и К. М. Ханиным [22], в которой были численно обнаружены универсальные свойства бифуркаций семейств комплексных отображений. Комплексная универсальность является обобщением универсальности Фейгенбаума. Интересно, что до сегодняшнего дня не удается получить строгого математического обоснования этого явления.

Гидродинамика. Я. Г. Синай всегда с большим интересом следил за развитием этой области науки, что, впрочем, неудивительно для ученика А. Н. Колмогорова. Первая гидродинамическая работа Я. Г. Синая, совместная с Л. Д. Мешалкиным [43], была опубликована еще в 1961 г. В этой работе изучалась устойчивость так называемого течения Колмогорова. Затем наступил длительный перерыв. С конца 1980-х и по настоящее время гидродинамика и связанные с ней проблемы являются одним из основных направлений исследований Я. Г. Синая. Мы начнем их обзор с работ, посвященных уравнению Бюргерса. Изначально уравнение Бюргерса было предложено как модельное нелинейное уравнение гидродинамического типа:

$$u_t + (u \cdot \nabla)u = \nu u_{xx} + f(x, t),$$

где $\nu > 0$ – вязкость, а $f(t, x)$ – внешняя сила, действующая на систему. Формальное отличие от уравнения Навье–Стокса состоит в отсутствии давления. Это связано с тем, что уравнение Бюргерса отвечает динамике сжимаемой среды. Иногда, говоря об уравнении Бюргерса, употребляют даже термин “гидродинамика без давления”. В действительности движение, описываемое уравнением Бюргерса, имеет очень мало общего с “настоящей” гидродинамикой. Тем не менее интерес к нему отнюдь не иссяк. Оказалось, что оно применимо к широкому классу явлений, возникающих в неравновесной статфизике. Примерами могут служить космологические модели крупномасштабных структур во Вселенной, восходящие к работам Я. Б. Зельдовича, динамика границ раздела, описываемая так называемым уравнением Кадара–Паризи–Занга, и многое другое. Наиболее интересные задачи возникают в неупорядоченной ситуации, когда в системе присутствует случайный элемент. Обычно рассматривают или ситуацию со случайными начальными данными – тогда говорят об убывающей турбулентности (decaying turbulence), – или ситуацию со случайной силой. В обоих случаях наибольший интерес представляет “невязкое” уравнение Бюргерса. Тогда в системе возникают ударные волны, которые в процессе динамики сливаются друг с другом. Это приводит к диссипации энергии, несмотря даже на то, что вязкость равна нулю. Работы Я. Г. Синая относятся к обоим упомянутым случаям. В первой работе [73], посвященной одномерному невязкому уравнению Бюргерса, Я. Г. Синай изучил случай, когда начальные данные задаются реализацией винеровского процесса. Ему удалось построить очень точное описание структуры ударных волн. В одномерной ситуации ударные волны задаются изолированными точками. Оказалось, что при сколь

угодно малом времени t ударные волны образуют множество хаусдорфовой размерности $1/2$. Этот важный результат породил большую литературу, в которой изучаются различные статистические модели, используемые в качестве начальных данных для уравнения Бюргерса.

Второе направление работ Я. Г. Синая связано с уравнением Бюргерса, в котором присутствует случайная внешняя сила $f^\omega(x, t)$. Поскольку внешняя сила порождает постоянный приток энергии, компенсирующий диссипацию, связанную со слиянием ударных волн, в такой системе можно ожидать стационарного статистического поведения. В физической работе А. М. Полякова [51] к изучению этого стационарного режима применялись методы квантовой теории поля. При этом делались определенные предсказания об асимптотическом поведении стационарного распределения некоторых наблюдаемых (случайных) величин. Так, распределение случайной величины $\xi = u_x$ имеет плотность $p(z)$, которая, разумеется, не является универсальной и зависит от статистики случайной силы $f^\omega(x, t)$. В то же время, естественно предположить, что асимптотическое поведение хвостов $p(z)$ в пределе $z \rightarrow \pm\infty$ является универсальным. Довольно легко понять, что хвосты несимметричны: большие положительные значения ξ крайне маловероятны, и можно показать, что $-\log p(z) \sim z^3$ при $z \rightarrow +\infty$. С другой стороны, отрицательный хвост $p(z)$ при $z \rightarrow -\infty$ должен вести себя, как $|z|^\alpha$ для некоторого отрицательного α . Из теории Полякова следовало, что $\alpha = -5/2$. Этот вывод был опровергнут в совместных работах Вейнана И, К. М. Ханина, А. Е. Мазеля и Я. Г. Синая [19], [18], причем в периодическом случае была построена теория стационарных решений. Уравнение Бюргерса естественным образом связано со случайными лагранжевыми системами. При этом оказывается, что с вероятностью 1 в системе имеется единственный глобальный минимайзер, который является гиперболической траекторией для случайного лагранжева потока, и единственное глобальное (стационарное) решение уравнения Бюргерса отвечает неустойчивому многообразию глобального минимайзера. Отсюда вытекает, что стационарное решение является кусочно гладким, и, следовательно, в системе в каждый момент времени имеется конечное число ударных волн. Поэтому основной вклад в распределение ξ при больших отрицательных значениях ξ вносят точки, отвечающие моментам возникновения новых ударных волн. Вклад таких точек легко оценить, что приводит к правильному значению $\alpha = -7/2$. Работы [18], [19] сыграли важную роль в развитии теории случайного уравнения Бюргерса. В дальнейшем результаты были перенесены на многомерный случай в работах Р. Итурриага, К. Ханина и К. Занга. Очень интересной представляется задача о стационарном поведении в неперiodическом (некомпактном) случае. Первые результаты в этом направлении были получены недавно в совместной работе Ю. Ю. Бахтина, Е. Катора и К. М. Ханина [6].

Обратимся теперь к работам Я. Г. Синая, посвященным уравнению Навье–Стокса

$$u_t + (u \cdot \nabla)u = \nu u_{xx} - \nabla p + f(x, t), \quad \text{Div } u = 0.$$

Слагаемое $-\nabla p$ обеспечивает выполнение условия несжимаемости $\text{Div } u = 0$. Хорошо известно, что в двумерном случае существуют глобальные сильные решения. Поэтому можно ставить вопрос об асимптотическом поведении решения при $t \rightarrow \infty$. Здесь, как и для уравнения Бюргерса, при наличии стационарной по времени случайной силы, действующей на систему, можно ожидать сходимости к стационарному распределению при $t \rightarrow \infty$. Такой стационарный режим должен отвечать статистическому равновесию между накачкой, связанной со случайной силой, и вязкостной диссипацией. В первой работе Я. Г. Синая, совместной с его учеником Дж. Мэттингли [42], предложен новый подход к доказательству существования гладких глобальных решений уравнения Навье–Стокса в двумерном случае. Новизна этого подхода состоит

в использовании идеологии, заимствованной из теории динамических систем. Именно этот метод позволил вскоре доказать существование единственного стационарного распределения в периодическом случае [20]. Важную роль здесь сыграла редукция к конечномерной задаче. Оказалось, что моды Фурье можно разбить на два множества, одно из которых конечно. При этом моды из бесконечного множества в известном смысле определяются единственным образом, если известно динамическое поведение мод из конечного. Иными словами, моды из бесконечного множества “подчинены” конечномерной динамической системе, отвечающей динамике мод из конечного множества. Следует сказать, что это важное направление активно развивалось в конце 1990-х и начале 2000-х годов в работах С.Б. Куксина и А.Р. Ширикяна, Ж.-П. Экмана и М. Хайрера, Ж. Брикмона, А. Купиайнена и Р. Лефевра, Н. Масмоуди и Л.-С. Янг. Эта активность была во многом стимулирована работой [20], оказавшей большое влияние на развитие данной области.

Несомненно, что центральной задачей математической гидродинамики является вопрос о существовании сильных глобальных решений уравнения Навье–Стокса в трехмерном случае. Несмотря на огромные усилия, вопрос остается открытым. Среди физиков преобладает мнение, что сингулярности в уравнении Навье–Стокса не возникают, а возможны они только в невязком уравнении Эйлера. Напротив, многие математики считают, что возможность возникновения сингулярностей исключить нельзя. Неоднократно высказывалось мнение, что сингулярности возможны для некоторых начальных данных, образующих подмногообразие большой коразмерности. Современные методы не позволяют ответить на эти вопросы. В этой связи большой интерес представляет работа Я. Г. Синая и Д. Ли [40] о существовании сингулярностей у комплексных решений уравнения Навье–Стокса. В этой работе рассматриваются начальные данные, для которых гармоники Фурье сосредоточены в шаре, расположенном на значительном расстоянии от начала координат. В решении уравнения Навье–Стокса возникают выражения типа свертки. Оказывается, что можно так подобрать параметры, задающие начальное данное, что гармоники Фурье решения за конечное время будут иметь схожий вид, они будут сосредоточены в шаре, находящемся на еще большем расстоянии от начала координат. Этот итеративный процесс построения решения на увеличивающихся интервалах времени можно продолжить, и удастся доказать, что для специально подобранных начальных данных у решений возникают сингулярности за конечное время. Замечательно, что исследование в [40] основано на методе ренормгруппы, который играет важную роль во многих работах Я. Г. Синая, относящихся к самым разным областям. Хотя механизм, описанный выше, и не применим к вещественным решениям, в настоящее время предпринимаются попытки численных экспериментов, основанных на близких идеях.

Выше мы постарались по мере наших возможностей представить наиболее важные направления исследований Я. Г. Синая. Задача эта оказалась совершенно непосильной. Разнообразие идей, методов, направлений в его работах настолько велико, что для сколько-нибудь полного их анализа потребовались бы усилия гораздо большего числа авторов. Многие замечательные работы Якова Григорьевича остались вне нашего обсуждения. Но оглянуться назад и постараться осветить творческий путь Якова Григорьевича было нам не только приятно, но и чрезвычайно полезно. Авторам этой статьи очень повезло – все мы в разное время были учениками Я. Г. Синая, и наша дальнейшая научная жизнь во многом определилась в результате общения с ним. Мы еще раз поздравляем Якова Григорьевича с присуждением ему премии

Абе́ля и наде́мся, что он еще много лет будет радовать нас своими новыми замечательными результатами.

А. И. Буфетов, Б. М. Гуревич, К. М. Ханин, Ф. Челларози

Список литературы

- [1] V. V. Anshelevich, K. M. Khanin, Ya. G. Sinai, “Symmetric random walks in random environments”, *Comm. Math. Phys.*, **85**:3 (1982), 449–470.
- [2] В. И. Арнольд, “Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **25**:1 (1961), 21–86; англ. пер.: V. I. Arnol’d, “Small denominators. I. Mappings of the circumference onto itself”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965, 213–284.
- [3] В. И. Арнольд, “Топологические и эргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами”, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:2 (1991), 1–12; англ. пер.: V. I. Arnol’d, “Topological and ergodic properties of closed 1-forms with incommensurable periods”, *Funct. Anal. Appl.*, **25**:2 (1991), 81–90.
- [4] M. Avdeeva, D. Li, Ya. G. Sinai, “New Erdős–Kac type theorems for signed measures on square-free integers”, *J. Statist. Phys.*, **154**:1-2 (2014), 327–333.
- [5] M. Avdeeva, D. Li, Ya. G. Sinai, “New limiting distributions for the Möbius function”, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **4**:1 (2014), 3–51.
- [6] Yu. Bakhtin, E. Cator, K. Khanin, “Space-time stationary solutions for the Burgers equation”, *J. Amer. Math. Soc.*, **27**:1 (2014), 193–238.
- [7] P. M. Bleher, Ja. G. Sinai, “Investigation of the critical point in models of the type of Dyson’s hierarchical models”, *Comm. Math. Phys.*, **33**:1 (1973), 23–42.
- [8] P. M. Bleher, Ya. G. Sinai, “Critical indices for Dyson’s asymptotically-hierarchical models”, *Comm. Math. Phys.*, **45**:3 (1975), 247–278.
- [9] C. Boldrighini, A. Pellegrinotti, E. Presutti, Ya. G. Sinai, M. R. Soloveichik, “Ergodic properties of a semi-infinite one-dimensional system of statistical mechanics”, *Comm. Math. Phys.*, **101**:3 (1985), 363–382.
- [10] Ж. Бургейн, Я. Г. Синай, “Предельное поведение больших чисел Фробениуса”, *УМН*, **62**:4(376) (2007), 77–90; англ. пер.: J. Bourgain, Ya. G. Sinai, “Limit behaviour of large Frobenius numbers”, *Russian Math. Surveys*, **62**:4 (2007), 713–725.
- [11] A. Bufetov, Ya. G. Sinai, C. Ulcigrai, “A condition for continuous spectrum of an interval exchange transformation”, *Representation theory, dynamical systems, and asymptotic combinatorics* (St. Petersburg, June 8–13, 2004), *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **217**, eds. V. Kaimanovich, A. Lodkin, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 23–35.
- [12] F. Cellarosi, Ya. G. Sinai, “The Möbius function and statistical mechanics”, *Bull. Math. Sci.*, **1**:2 (2011), 245–275.
- [13] F. Cellarosi, Ya. G. Sinai, “Ergodic properties of square-free numbers”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **15**:4 (2013), 1343–1374.
- [14] F. Cellarosi, Ya. G. Sinai, “Non-standard limit theorems in number theory”, *Prokhorov and contemporary probability theory*, Springer Proc. Math. Statist., **33**, Springer, Heidelberg, 2013, 197–213.
- [15] Е. И. Динабург, Я. Г. Синай, “Об одномерном уравнении Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:4 (1975), 8–21; англ. пер.: E. I. Dinaburg, Ya. G. Sinai, “The one-dimensional Schrödinger equation with a quasiperiodic potential”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:4 (1975), 279–289.

- [16] Е. И. Динабург, Я. Г. Синай, “Статистика решений целочисленного уравнения $ax - by = \pm 1$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **24**:3 (1990), 1–8; англ. пер.: E. I. Dinaburg, Ya. G. Sinai, “Statistics of solutions of the integral equation $ax - by = \pm 1$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **24**:3 (1990), 165–171.
- [17] R. Dobrushin, R. Kotecký, S. Shlosman, *Wulff construction. A global shape from local interaction*, Transl. Math. Monogr., **104**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, x+204 pp.
- [18] W. E, K. Khanin, A. Mazel, Y. Sinai, “Probability distribution functions for the random forced Burgers equation”, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:10 (1997), 1904–1907.
- [19] W. E, K. Khanin, A. Mazel, Ya. Sinai, “Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing”, *Ann. of Math. (2)*, **151**:3 (2000), 877–960.
- [20] W. E, J. C. Mattingly, Ya. Sinai, “Gibbsian dynamics and ergodicity for the stochastically forced Navier–Stokes equation”, *Comm. Math. Phys.*, **224**:1 (2001), 83–106.
- [21] J. Fröhlich, T. Spencer, P. Wittwer, “Localization for a class of one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators”, *Comm. Math. Phys.*, **132**:1 (1990), 5–25.
- [22] А. И. Гольберг, Я. Г. Синай, К. М. Ханин, “Универсальные свойства для последовательностей бифуркаций утроения периода”, *УМН*, **38**:1(229) (1983), 159–160; англ. пер.: A. I. Gol’berg, Ya. G. Sinai, K. M. Khanin, “Universal properties for sequences of bifurcations of period three”, *Russian Math. Surveys*, **38**:1 (1983), 187–188.
- [23] Sh. Goldstein, J. L. Lebowitz, M. Aizenman, “Ergodic properties of infinite systems”, *Dynamical systems, theory and applications* (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, WA, 1974), Lecture Notes in Phys., **38**, Springer, Berlin, 1975, 112–143.
- [24] A. O. Golosov, “Localization of random walks in one-dimensional random environments”, *Comm. Math. Phys.*, **92**:4 (1984), 491–506.
- [25] A. Granville, “Smooth numbers: computational number theory and beyond”, *Algorithmic number theory: lattices, number fields, curves and cryptography*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 267–323.
- [26] Б. М. Гуревич, Я. Г. Синай, Ю. М. Сухов, “Об инвариантных мерах динамических систем одномерной статистической механики”, *УМН*, **28**:5(173) (1973), 45–82; англ. пер.: B. M. Gurevich, Ya. G. Sinai, Yu. M. Sukhov, “On invariant measures of dynamical systems of one-dimensional statistical mechanics”, *Russian Math. Surveys*, **28**:5 (1973), 49–86.
- [27] M. R. Herman, “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **49**:1 (1979), 5–233.
- [28] H. Holden, R. Piene (eds.), *The Abel prize 2003–2007. The first five years*, Springer-Verlag, Berlin, 2010, xii+326 pp.
- [29] H. Holden, R. Piene (eds.), *The Abel prize 2008–2012*, Springer, Heidelberg, 2014, xviii+571 pp.
- [30] Y. Katznelson, D. Ornstein, “The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **9**:4 (1989), 643–680.
- [31] H. Kesten, M. V. Kozlov, F. Spitzer, “A limit law for random walk in a random environment”, *Compos. Math.*, **30**:2 (1975), 145–168.
- [32] K. M. Khanin, Ya. G. Sinai, “Renormalization group method and the KAM theory”, *Nonlinear phenomena in plasma physics and hydrodynamics*, ed. R. Z. Sagdeev, Mir, M., 1986, 31–64.
- [33] K. M. Khanin, Ya. G. Sinai, “A new proof of M. Herman’s theorem”, *Comm. Math. Phys.*, **112**:1 (1987), 89–101.
- [34] K. Khanin, A. Teplinsky, “Herman’s theory revisited”, *Invent. Math.*, **178**:2 (2009), 333–344.

- [35] А. В. Кочергин, “Невырожденные седла и отсутствие перемешивания в потоках на поверхностях”, *Динамические системы и оптимизация*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 252–266; англ. пер.: A. V. Kochergin, “Nondegenerate saddle points and the absence of mixing in flows on surfaces”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256** (2007), 238–252.
- [36] А. Н. Колмогоров, “Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега”, *Докл. АН СССР*, **119**:5 (1958), 861–864.
- [37] А. Н. Колмогоров, “Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов”, *Докл. АН СССР*, **124**:4 (1959), 754–755.
- [38] J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, B. Weiss, *On invariant measures for $\mathcal{B}$ -free systems*, 2014, 45 pp., arXiv: 1406.3745.
- [39] О. Е. Lanford, III, “The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles. I. An existence theorem”, *Comm. Math. Phys.*, **9**:3 (1968), 176–191.
- [40] D. Li, Ya. G. Sinai, “Blow ups of complex solutions of the 3D Navier–Stokes system and renormalization group method”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **10**:2 (2008), 267–313.
- [41] J. Marklof, “The asymptotic distribution of Frobenius numbers”, *Invent. Math.*, **181**:1 (2010), 179–207.
- [42] J. C. Mattingly, Ya. G. Sinai, “An elementary proof of the existence and uniqueness theorem for the Navier–Stokes equations”, *Commun. Contemp. Math.*, **1**:4 (1999), 497–516.
- [43] Л. Д. Мешалкин, Я. Г. Синай, “Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости”, *Прикл. матем. и мех.*, **25**:6 (1961), 1140–1143; англ. пер.: L. D. Meshalkin, Ya. G. Sinai, “Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous liquid”, *J. Appl. Math. Mech.*, **25**:6 (1961), 1700–1705.
- [44] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, “Явление ‘разделения фаз’ при низких температурах в некоторых решетчатых моделях газа. I”, *Матем. сб.*, **73(115)**:3 (1967), 375–448; англ. пер.: R. A. Minlos, Ya. G. Sinai, “The phenomenon of ‘phase separation’ at low temperatures in some lattice models of a gas. I”, *Math. USSR-Sb.*, **2**:3 (1967), 335–395.
- [45] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, “Явление ‘разделения фаз’ при низких температурах в некоторых решетчатых моделях газа. II”, Тр. ММО, **19**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1968, 113–178.
- [46] С. П. Новиков, Л. А. Бунимович, А. М. Вершик, Б. М. Гуревич, Е. И. Динабург, Г. А. Маргулис, В. И. Оселедец, С. А. Пирогов, К. М. Ханин, Н. Н. Ченцова, “Яков Григорьевич Синай (к шестидесятилетию со дня рождения)”, *УМН*, **51**:4(310) (1996), 179–191; англ. пер.: S. P. Novikov, L. A. Bunimovich, A. M. Vershik, B. M. Gurevich, E. I. Dinaburg, G. A. Margulis, V. I. Oseledets, S. A. Pirogov, K. M. Khanin, N. N. Chentsova, “Yakov Grigor’evich Sinai (on his sixtieth birthday)”, *Russian Math. Surveys*, **51**:4 (1996), 765–778.
- [47] R. Peckner, “Uniqueness of the measure of maximal entropy for the squarefree flow”, *Israel J. Math.* (to appear); 2012 (v8 – 2014), 18 pp., arXiv: 1205.2905.
- [48] Я. Б. Песин, “Эргодическая теория гладких динамических систем. Гл. 7: Общая теория гладких гиперболических динамических систем”, *Динамические системы – 2*, Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр., **2**, ВИНТИ, М., 1985, 123–173; англ. пер.: Ya. B. Pesin, “General theory of smooth dynamical systems”, *Dynamical systems. II. Ergodic theory with applications*

- to dynamical systems and statistical mechanics*, Encyclopaedia Math. Sci., **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 99–206.
- [49] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай, “Фазовые диаграммы классических решетчатых систем”, *ТМФ*, **25**:3 (1975), 358–369; англ. пер.: S. A. Pirogov, Ya. G. Sinai, “Phase diagrams of classical lattice systems”, *Theoret. Math. Phys.*, **25**:3 (1975), 1185–1192.
 - [50] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай, “Фазовые диаграммы классических решетчатых систем. (Продолжение)”, *ТМФ*, **26**:1 (1976), 61–76; англ. пер.: S. A. Pirogov, Ya. G. Sinai, “Phase diagrams of classical lattice systems. (Continuation)”, *Theoret. Math. Phys.*, **26**:1 (1976), 39–49.
 - [51] А. М. Polyakov, “Turbulence without pressure”, *Phys. Rev. E* (3), **52**:6 (1995), 6183–6188.
 - [52] В. А. Рохлин, Я. Г. Синай, “Построение и свойства инвариантных измеримых разбиений”, *Докл. АН СССР*, **141**:5 (1961), 1038–1041; англ. пер.: V. A. Rokhlin, Ya. G. Sinai, “Construction and properties of invariant measurable partitions”, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 1611–1614.
 - [53] V. Shchur, Ya. Sinai, A. Ustinov, “Limiting distribution of Frobenius numbers for $n = 3$ ”, *J. Number Theory*, **129**:11 (2009), 2778–2789.
 - [54] Я. Г. Синай, “О понятии энтропии динамической системы”, *Докл. АН СССР*, **124**:4 (1959), 768–771.
 - [55] Я. Г. Синай, “Геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **131**:4 (1960), 752–755; англ. пер.: Ja. G. Sinai, “Geodesic flows on manifolds of negative constant curvature”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 335–339.
 - [56] Я. Г. Синай, “Центральная предельная теорема для геодезических потоков на многообразиях постоянной отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **133**:6 (1960), 1303–1306; англ. пер.: Ja. G. Sinai, “The central limit theorem for geodesic flows on manifolds of constant negative curvature”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 983–987.
 - [57] Я. Г. Синай, “Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **25**:6 (1961), 899–924; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Dynamical systems with countably-multiple Lebesgue spectrum. I”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964, 83–110.
 - [58] Я. Г. Синай, “Геодезические потоки на компактных поверхностях отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **136**:3 (1961), 549–552; англ. пер.: Ja. G. Sinai, “Geodesic flows on compact surfaces of negative curvature”, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 106–109.
 - [59] Я. Г. Синай, “Слабый изоморфизм преобразований с инвариантной мерой”, *Докл. АН СССР*, **147**:4 (1962), 797–800; англ. пер.: Ja. G. Sinai, “Weak isomorphism of transformations with an invariant measure”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1963), 1725–1729.
 - [60] Я. Г. Синай, “О слабом изоморфизме преобразований с инвариантной мерой”, *Матем. сб.*, **63(105)**:1 (1964), 23–42.
 - [61] Я. Г. Синай, “Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30**:1 (1966), 15–68; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Classical dynamical systems with countably-multiple Lebesgue spectrum. II”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **68**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968, 34–38.
 - [62] Я. Г. Синай, “Марковские разбиения и U -диффеоморфизмы”, *Функц. анализ и его прил.*, **2**:1 (1968), 64–89; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Markov partitions and C -diffeomorphisms”, *Funct. Anal. Appl.*, **2**:1 (1968), 61–82.

- [63] Я. Г. Синай, “Построение марковских разбиений”, *Функц. анализ и его прил.*, **2**:3 (1968), 70–80; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Construction of Markov partitions”, *Funct. Anal. Appl.*, **2**:3 (1968), 245–253.
- [64] Я. Г. Синай, “Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов”, *УМН*, **25**:2(152) (1970), 141–192; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards”, *Russian Math. Surveys*, **25**:2 (1970), 137–189.
- [65] Я. Г. Синай, “Гиббсовские меры в эргодической теории”, *УМН*, **27**:4(166) (1972), 21–64; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Gibbs measures in ergodic theory”, *Russian Math. Surveys*, **27**:4 (1972), 21–69.
- [66] Я. Г. Синай, “Эргодические свойства газа одномерных твердых шариков с бесконечным числом степеней свободы”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:1 (1972), 41–50; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Ergodic properties of a gas of one-dimensional hard rods with an infinite number of degrees of freedom”, *Funct. Anal. Appl.*, **6**:1 (1972), 35–43.
- [67] Я. Г. Синай, “Построение динамики в одномерных системах статистической механики”, *ТМФ*, **11**:2 (1972), 248–258; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Construction of dynamics in one-dimensional systems of statistical mechanics”, *Theoret. Math. Phys.*, **11**:2 (1972), 487–494.
- [68] Я. Г. Синай, “Построение кластерной динамики для динамических систем статистической механики”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **29**:1 (1974), 152–158; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Construction of a cluster dynamic for the dynamical systems of statistical mechanics”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **29**:1 (1974), 124–129.
- [69] Я. Г. Синай, “Стохастичность динамических систем”, *Нелинейные волны*, Наука, М., 1979, 192–212.
- [70] Я. Г. Синай, “Эргодические свойства газа Лоренца”, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:3 (1979), 46–59; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Ergodic properties of the Lorentz gas”, *Funct. Anal. Appl.*, **13**:3 (1979), 192–202.
- [71] Я. Г. Синай, “Предельное поведение одномерного случайного блуждания в случайной среде”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **27**:2 (1982), 247–258; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium”, *Theory Probab. Appl.*, **27**:2 (1983), 256–268.
- [72] Ya. G. Sinai, “Anderson localization for one-dimensional difference Schrödinger operator with quasiperiodic potential”, *J. Statist. Phys.*, **46**:5-6 (1987), 861–909.
- [73] Ya. G. Sinai, “Statistics of shocks in solutions of inviscid Burgers equation”, *Comm. Math. Phys.*, **148**:3 (1992), 601–621.
- [74] Я. Г. Синай, К. М. Ханин, “Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами”, *УМН*, **44**:1(265) (1989), 57–82; англ. пер.: Ya. G. Sinai, К. М. Khanin, “Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations”, *Russian Math. Surveys*, **44**:1 (1989), 69–99.
- [75] Я. Г. Синай, К. М. Ханин, “Перемешивание некоторых классов специальных потоков над поворотом окружности”, *Функц. анализ и его прил.*, **26**:3 (1992), 1–21; англ. пер.: Ya. G. Sinai, К. М. Khanin, “Mixing for some classes of special flows over rotations of the circle”, *Funct. Anal. Appl.*, **26**:3 (1992), 155–169.
- [76] Ya. G. Sinai, M. R. Solovëichik, “One-dimensional classical massive particle in the ideal gas”, *Comm. Math. Phys.*, **104**:3 (1986), 423–443.
- [77] Ya. G. Sinai, C. Ulcigrai, “Weak mixing in interval exchange transformations of periodic type”, *Lett. Math. Phys.*, **74**:2 (2005), 111–133.
- [78] Ya. G. Sinai, C. Ulcigrai, “A limit theorem for Birkhoff sums of non-integrable functions over rotations”, *Geometric and probabilistic structures in dynamics*, Contemp. Math., **469**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 317–340.

- [79] Ya. G. Sinai, C. Ulcigrai, “Renewal-type limit theorem for the Gauss map and continued fractions”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **28**:2 (2008), 643–655.
- [80] А. В. Устинов, “О статистических свойствах элементов цепных дробей”, *Докл. РАН*, **424**:4 (2009), 459–461; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the statistical properties of elements of continued fractions”, *Dokl. Math.*, **79**:1 (2009), 87–89.
- [81] А. В. Устинов, “О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:5 (2010), 145–170; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the distribution of Frobenius numbers with three arguments”, *Izv. Math.*, **74**:5 (2010), 1023–1049.
- [82] К. Л. Волковынский, Я. Г. Синай, “Эргодические свойства идеального газа с бесконечным числом степеней свободы”, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:3 (1971), 19–21; англ. пер.: K. L. Volkovysskii, Ya. G. Sinai, “Ergodic properties of an ideal gas with an infinite number of degrees of freedom”, *Funct. Anal. Appl.*, **5**:3 (1971), 185–187.
- [83] Е. Б. Вул, Я. Г. Синай, К. М. Ханин, “Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм”, *УМН*, **39**:3(237) (1984), 3–37; англ. пер.: E. B. Vul, Ya. G. Sinai, K. M. Khanin, “Feigenbaum universality and the thermodynamic formalism”, *Russian Math. Surveys*, **39**:3 (1984), 1–40.