Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Жуковский, А. М. Райгородский, Случайные графы: модели и предельные характеристики, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 1, 35–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:13:44

УДК 519.175.4

Посвящается Валерию Васильевичу Козлову

Случайные графы: модели и предельные характеристики

М. Е. Жуковский, А. М. Райгородский

В настоящей статье представлен обзор известных результатов в области предельного поведения вероятностей свойств первого порядка случайных графов. Совокупность результатов, приведенных в статье, относится к законам нуля или единицы для свойств случайных графов. Мы сконцентрируемся на модели Эрдёша–Реньи случайного графа и рассмотрим также некоторые обобщения этой модели, мотивированные задачами теории кодирования и комбинаторной геометрии.

Библиография: 65 названий.

Ключевые слова: случайные графы, дистанционные графы, предельные теоремы, законы нуля или единицы, свойства первого порядка.

DOI: 10.4213/rm9626

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	35
2. Случайные графы в модели Эрдёша–Реньи и их простейшие свойства.....	36
3. Язык первого порядка.....	40
4. Закон нуля или единицы для $G(N, p)$ при $p = \text{const}$	46
5. Законы нуля или единицы для $G(N, p)$ при $p \neq \text{const}$	49
6. Некоторые обобщения результатов из разделов 4 и 5.....	57
7. Ограничение кванторной глубины.....	59
8. Дистанционные графы.....	79
Список литературы.....	84

1. Введение

Понятие о случайном графе является сейчас одним из центральных в дискретной математике. Однако до середины 50-х годов XX в. систематической теории случайных графов не было. Были лишь разрозненные работы, в которых случайные графы так или иначе возникали в качестве инструмента (см.,

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00612, 15-01-00350), грантов Президента РФ МД-6277.2013.1, МК-2184.2014.1 и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-2519.2012.1).

например, [1]–[3]). И лишь классические статьи [4]–[6] П. Эрдёша и А. Реньи, опубликованные на рубеже 50-х и 60-х годов, заложили основы современной науки о случайных графах. За прошедшие полвека теория случайных графов выросла в мощную и бурно развивающуюся дисциплину, богатую как фундаментальными результатами, так и приложениями в различных областях математики, информатики, биологии и т. д.

В широком смысле этого слова случайный граф – это случайный элемент, принимающий значения в некотором множестве графов и имеющий заданное распределение. К настоящему времени глубоко исследован целый ряд моделей случайного графа – от классической модели Эрдёша–Реньи и ее естественных обобщений до моделей веб-графов, социальных, биологических сетей и т. д. (см. [7]–[16]).

В настоящем обзоре мы сконцентрируемся на модели Эрдёша–Реньи случайного графа. Также мы рассмотрим некоторые обобщения этой модели, мотивированные задачами теории кодирования и комбинаторной геометрии. При этом мы, разумеется, не станем обсуждать все многообразие результатов, полученных в области за пять десятилетий, но рассмотрим исключительно важный специальный пласт фактов, совокупность которых правильнее всего характеризовать выражением “законы нуля или единицы для свойств случайных графов”.

В последующих разделах мы раскроем смысл всех терминов, которые мы пока что употребляли без точных определений.

2. Случайные графы в модели Эрдёша–Реньи и их простейшие свойства

Прежде всего напомним определение случайного графа в биномиальной модели Эрдёша–Реньи. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 1$. Рассмотрим множество $\Omega_N = \{G = (V_N, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_N = \{1, \dots, N\}$. *Случайный граф в модели Эрдёша–Реньи* – это случайный элемент $G(N, p)$ со значениями в множестве Ω_N и распределением $P_{N,p}$ на $\mathcal{F}_N = 2^{\Omega_N}$, определенным формулой

$$P_{N,p}(G) = p^{|E|} (1-p)^{C_N^2 - |E|}.$$

Иными словами, любые две различные вершины графа $G(N, p)$ соединены ребром с вероятностью p независимо от всех остальных пар вершин. В дальнейшем мы будем рассматривать модели, в которых вероятность p зависит от количества вершин N (в этом случае для вероятностной меры мы по-прежнему будем использовать обозначение $P_{N,p}$ вместо $P_{N,p(N)}$), причем нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятностей свойств случайных графов при $N \rightarrow \infty$.

Случайный граф Эрдёша–Реньи является частным случаем более общей модели, называемой *случайным подграфом* (см., например, [8]–[11]). Пусть $H = (V, E)$ – произвольный граф без петель и кратных ребер, $0 \leq p \leq 1$. Рассмотрим множество $\Omega_H = \{\tilde{H} = (V, \tilde{E}), \tilde{E} \subseteq E\}$ всех остовных подграфов графа H . *Случайным подграфом графа H* называется случайный элемент $\mathcal{G}(H, p)$

со значениями в множестве Ω_H и распределением $P_{H,p}$ на $\mathcal{F}_H = 2^{\Omega_H}$, определенным формулой

$$P_{H,p}(\tilde{H}) = p^{|\tilde{E}|}(1-p)^{|E|-|\tilde{E}|}.$$

Очевидно, что если H – полный граф на N вершинах, то $\mathcal{G}(H, p) = G(N, p)$.

Именно Эрдёш и Реньи установили, что свойства случайного графа $G(N, p)$, рассматриваемые ими в первых работах по случайным графам, “возникают” в каком-то смысле внезапно. Например, для каждого из свойств “содержать клику фиксированного размера”, “быть связным”, “содержать ‘гигантскую’ компоненту” (т.е. компоненту связности, количество вершин в которой не меньше cN с одной и той же константой c для каждого N) найдется функция $p_0 = p_0(N)$, для которой это свойство не выполнено с вероятностью, стремящейся к 1 при $N \rightarrow \infty$, если $p = o(p_0)$ при $N \rightarrow \infty$, и выполнено с вероятностью, стремящейся к 1 при $N \rightarrow \infty$, если, напротив, $p_0 = o(p)$ при $N \rightarrow \infty$. Разумеется, для некоторых свойств имеют место и симметричные ситуации: при $p = o(p_0)$ свойство выполнено с предельной вероятностью 1, а при $p_0 = o(p)$ – не выполнено с аналогичной вероятностью. В любом случае такая функция p_0 называется *пороговой* для данного свойства. Скажем, для свойства “содержать гигантскую компоненту” функция $1/N$ является пороговой (см. [8]–[11]).

Здесь важно заметить, что все перечисленные свойства графов являются монотонными. Свойство называется *монотонным*, если выполнено одно из двух утверждений:

- для любых графов $H \subseteq G$ из того, что граф H обладает этим свойством, следует, что граф G также обладает этим свойством (в этом случае свойство называется *возрастающим*);
- для любых графов $H \subseteq G$ из того, что граф G обладает этим свойством, следует, что граф H также обладает этим свойством (в этом случае свойство называется *убывающим*).

Б. Боллобаш и А. Томасон в 1987 г. доказали, что у каждого монотонного свойства существует пороговая функция. Более того, если выше речь шла лишь о графах $G(N, p)$, то в теореме, которую мы приводим ниже, рассматриваются случайные подграфы $\mathcal{G}(G_n, p)$ графов G_n из практически произвольной последовательности $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

ТЕОРЕМА 1 (Б. Боллобаш, А. Томасон, 1987, [17]). *Пусть L – некоторое возрастающее свойство графов. Пусть, кроме того, $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – такая последовательность графов, что $|V(G_n)| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда существует такая функция $p_0 = p_0(n)$, что если $p = o(p_0)$, то $P_{G_n, p}(L) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, а если $p_0 = o(p)$, то $P_{G_n, p}(L) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$.*

Аналогичный результат верен и для убывающих свойств (асимптотические вероятности 0 и 1 меняются местами). Иными словами, теорема 1 дает весьма общий признак существования пороговых функций для свойств случайных подграфов $\mathcal{G}(G_n, p)$.

Теорема 1 делает заведомо непустым следующее общее рассуждение. Пусть $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – некоторая последовательность графов, а $\mathcal{C}$ – некоторый класс свойств, для которых у случайных подграфов $\mathcal{G}(G_n, p)$ существуют пороговые функции.

Пусть, кроме того, $\mathcal{P}^0$ – класс всех пороговых функций этих свойств. Тогда если $p = p(n)$ – такая функция, что

$$\forall p_0 \in \mathcal{P}^0 \quad (p = o(p_0)) \vee (p_0 = o(p)),$$

то для графа $\mathcal{G}(G_n, p)$ справедлив закон нуля или единицы для класса свойств $\mathcal{C}$, т. е. для любого свойства из $\mathcal{C}$ вероятность того, что случайный граф $\mathcal{G}(G_n, p)$ обладает этим свойством, стремится либо к 0, либо к 1. Этот факт заставил многих авторов заняться поиском для различных последовательностей графов $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и различных классов свойств $\mathcal{C}$ таких множеств функций $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$, что для любого $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ случайный граф $\mathcal{G}(G_n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы. Именно такого рода задачам мы посвятим основную часть обзора. Однако, желая дать дополнительную мотивировку нашему исследованию, мы продолжим ниже обсуждение пороговых функций для случайного графа $G(N, p)$.

Итак, вернемся к случайному графу $G(N, p)$. В 1960 г. П. Эрдёш и А. Реньи доказали теорему о существовании пороговой функции для свойства “ $G(N, p)$ содержит копию данного сбалансированного графа” (определение сбалансированного графа дано ниже в этом абзаце), которая позже была обобщена А. Ручинским и А. Винсом на случай произвольного (не обязательно сбалансированного) графа. Рассмотрим произвольный граф G . В дальнейшем мы будем обозначать $v(G)$ количество вершин графа G и $e(G)$ количество его ребер. Назовем отношение $\rho(G) = e(G)/v(G)$ *плотностью графа G* . Граф G называется *сбалансированным*, если для каждого его подграфа H выполнено неравенство $\rho(H) \leq \rho(G)$.

ТЕОРЕМА 2 (П. Эрдёш, А. Реньи, 1960, [5]). *Пусть G – сбалансированный граф. Тогда функция $p = N^{-1/\rho(G)}$ является пороговой для графа $G(N, p)$ и свойства содержать копию графа G .*

Пусть теперь G – произвольный граф. Положим

$$\rho^{\max}(G) = \max_{H \subseteq G} \rho(H).$$

ТЕОРЕМА 3 (А. Ручински, А. Винс, 1985, [18]). *Функция $p = N^{-1/\rho^{\max}(G)}$ является пороговой для графа $G(N, p)$ и свойства содержать копию графа G .*

Кроме того, в 1981 г. Б. Боллобаш нашел асимптотическое распределение количества копий в $G(N, p)$ фиксированного строго сбалансированного графа в случае, когда вероятность проведения ребра равна пороговой вероятности появления копии рассматриваемого графа (напомним, что *строго сбалансированным графом* называется сбалансированный граф, плотность которого строго больше плотностей всех его собственных подграфов). Здесь и далее для произвольного графа G мы будем обозначать N_G количество копий G в случайном графе $G(N, p)$ (с точностью до перенумерации вершин). Пусть G – строго сбалансированный граф.

ТЕОРЕМА 4 (Б. Боллобаш, 1981, [19]). Пусть a – количество автоморфизмов графа G , $p = N^{-1/\rho(G)}$. Тогда

$$N_G \xrightarrow{d} \text{Pois}(1/a), \quad N \rightarrow \infty.$$

Здесь $\text{Pois}(1/a)$ – пуассоновская случайная величина со средним $1/a$.

Обозначим $L_G = \{N_G > 0\}$ свойство содержать копию графа G . Пусть функции p и $1-p$ меняются медленнее, чем любая степенная. Иными словами, для любого положительного α имеем

$$\min\{p, 1-p\}N^\alpha \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Положим

$$\mathcal{L}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{G \in \Omega_n} \{L_G, \overline{L_G}\}.$$

Тогда из теоремы 3 следует, что для любого $L \in \mathcal{L}_0$ либо $P_{N,p}(L) \rightarrow 1$, $N \rightarrow \infty$, либо $P_{N,p}(L) \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Иными словами, для класса свойств $\mathcal{L}_0$ случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы. Очевидно, тот же вывод можно сделать и для $p = N^{-\alpha}$, где α – положительное иррациональное число. В то же время несложно доказать (см., например, [20]), что для любого рационального числа $\alpha \in (0, 1]$ существует строго сбалансированный граф с плотностью $1/\alpha$. Поэтому в силу теоремы 4 случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств $\mathcal{L}_0$ при $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Рассмотренные свойства могут быть записаны с помощью логических формул. Например, пусть G – полный граф на трех вершинах. Тогда свойство L_G может быть выражено формулой

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \quad (x_1 \sim x_2) \wedge (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3).$$

Эта формула является формулой первого порядка, определение которой мы напомним в следующем разделе. Оказывается, законы нуля или единицы для класса $\mathcal{L}_0$ могут быть обобщены на класс всех свойств, выражаемых формулами первого порядка.

В настоящей работе мы также рассматриваем один специальный случай модели случайных подграфов – так называемый *случайный дистанционный граф*. Рассмотрение дистанционных графов мотивировано классической задачей комбинаторной геометрии о хроматическом числе пространства (см. [21]–[28]). Впервые полный дистанционный граф, определение которого сформулировано ниже и свойства которого изучаются в данной работе, в геометрическом контексте рассмотрели в 1981 г. П. Франкл и Р. М. Уилсон. С помощью этого графа они показали, что хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$ растет экспоненциально (см. [29]). В 1991 г. Дж. Кан и Г. Калаи применили результаты Франкла и Уилсона для опровержения классической гипотезы Борсука о том, что всякое ограниченное неодноточечное множество в $\mathbb{R}^n$ может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра (см. [21] и [30]). Таким образом, изучение внутренней структуры дистанционного графа и его подграфов играет исключительно

важную роль. Наши результаты показывают, в частности, что любой подграф либо содержится в почти всех дистанционных графах, полученных из полного дистанционного графа удалением ребер, либо не содержится в почти всех таких дистанционных графах. Сейчас с исследованием дистанционных графов связаны одни из самых широко изучаемых разделов комбинаторной геометрии (см. [21]–[28], [31]). Отметим, что в то же время некоторые из этих графов изучаются и в теории кодирования (см. [32]–[34]).

Напомним определение случайного дистанционного графа (см. [35]–[45]). Пусть M – произвольное конечное множество целых чисел, $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Пусть, кроме того, функции $a_m: \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Z}_+$, $m \in M$, таковы, что при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнено равенство $\sum_{m \in M} a_m(n) = n$. Пусть также задана функция $c: \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Z}$. При всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ определим *дистанционный граф* $G_n = (V_n, E_n)$ с множеством вершин V_n , состоящим из всех n -мерных векторов, которые имеют по $a_m(n)$ координат, равных m для каждого $m \in M$, т. е.

$$V_n = \{\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n): \forall i \in \{1, \dots, n\} v^i \in M; \\ \forall m \in M |\{i \in \{1, \dots, n\}: v^i = m\}| = a_m(n)\},$$

и множеством ребер

$$E_n = \{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in V_n \times V_n: \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c(n)\},$$

где $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ – евклидово скалярное произведение. Пусть $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$. *Случайным дистанционным графом* называется случайный подграф $\mathcal{G}(G_n, p)$ графа G_n .

В простейшем случае *симметричного $\{0, 1\}$ -дистанционного графа*, т. е. при $n_i = 4i$, $M = \{0, 1\}$, $a_0 = a_1 = n/2$, $c = n/4$, известны пороговые вероятности для свойств из класса $\mathcal{L}_0$. Пусть $\{G_n\}_{n \in 4\mathbb{N}}$ – последовательность симметричных $\{0, 1\}$ -дистанционных графов. Для каждого $n \in 4\mathbb{N}$ обозначим $N = N(n)$ количество вершин графа G_n , т. е. $N = C_n^{n/2}$. Пусть G – произвольный строго сбалансированный граф.

ТЕОРЕМА 5 (М. Е. Жуковский, 2012, [41]). *Функция $p = N^{-1/\rho(G)} \sqrt{\log N}$ является пороговой для графа $\mathcal{G}(G_{4i}, p)$ и свойства содержать копию графа G .*

Ввиду аналогичных результатов для случайного графа Эрдёша–Реньи эта теорема мотивирует следующий вопрос. Если функция p при любом $\alpha > 0$ удовлетворяет условию (1), то подчиняется ли рассматриваемый случайный дистанционный граф закону нуля или единицы для класса свойств, выражаемых формулами первого порядка? Ответ на этот вопрос мы даем в разделе 8.

3. Язык первого порядка

Формулы первого порядка (применительно к свойствам графов) строятся с помощью символов отношения $\sim$, $=$, логических связок $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, переменных $x, y, x_1, \dots$ (переменные – это вершины графа), кванторов $\forall, \exists$. Символ отношения “ $\sim$ ” выражает свойство двух вершин быть соединенными ребром.

Опишем построение формул подробнее (см. [46], [47]). Введем для этого понятие *атома*. Это объект, который либо имеет вид $(x \sim y)$, либо имеет вид $(x = y)$, где x, y – переменные. Атом является формулой. Все входящие в атом переменные являются *свободными*. Ниже мы даем определение связанных и свободных переменных и вместе с этим дальнейшее определение формул первого порядка. Пусть G – некоторый граф (не обязательно конечный). Рассмотрим произвольные вершины i_1, i_2 этого графа. Если $i_1 \sim i_2$, то будем говорить, что формула $(x \sim y)$ *истинна* для графа G на наборе (i_1, i_2) . В противном случае будем говорить, что формула *ложна*. Формула $(x = y)$ истинна только на наборах, состоящих из двух одинаковых вершин, т. е. на наборах (i, i) . Иными словами, формула истинна на некотором наборе вершин, если предикат, выражаемый этой формулой, принимает значение 1 на этом наборе. Пусть ϕ, ϕ_1, ϕ_2 – формулы, X, X_1, X_2 и Y, Y_1, Y_2 – соответствующие множества свободных и связанных переменных, переменная x принадлежит X . Конструкции $\neg\phi, (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \Rightarrow \phi_2), (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2), (\forall x \phi), (\exists x \phi)$ являются формулами. При этом $X \setminus \{x\}$ – множество свободных переменных формул $(\forall x \phi), (\exists x \phi)$, а $Y \cup \{x\}$ – множество связанных переменных этих формул, $X_1 \cup X_2$ – множество свободных переменных формул $(\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \Rightarrow \phi_2), (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$, $Y_1 \cup Y_2$ – множество связанных переменных этих формул, X – множество свободных переменных формулы $(\neg\phi)$, Y – множество связанных переменных этой формулы. Так же как и в случае атома, формула является истинной на некотором наборе вершин, если предикат, выражаемый этой формулой, принимает значение 1 на этом наборе. *Замкнутыми* называются формулы, не содержащие свободных переменных. Замкнутая формула либо всегда истинна для графа G , либо всегда ложна.

Определим *кванторную глубину формулы*. Глубина атома равна нулю. Глубина формул $(\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2), (\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$ равна максимуму глубин формул ϕ_1 и ϕ_2 . Глубина формулы $(\neg\phi)$ равна глубине формулы ϕ . Глубина формул $(\forall x \phi)$ и $(\exists x \phi)$ на единицу больше глубины ϕ . Замкнутые формулы называются *эквивалентными*, если они одновременно истинны или одновременно ложны для любого графа G .

Приведем примеры формул первого порядка. Формула

$$\forall x \forall y [(\neg(x = y)) \Rightarrow (x \sim y)]$$

является замкнутой (обе переменные связанные) и выражает свойство графа быть полным, ее кванторная глубина равна 2. Глубина незамкнутой формулы

$$[\exists x_3 ([x_1 \sim x_3] \wedge [x_2 \sim x_3])] \vee [\forall y_1 \forall y_2 ([y_1 \sim y_2] \Rightarrow [(y_1 \sim x_1) \wedge (y_2 \sim x_2)])]$$

также равна 2, переменные x_1, x_2 являются свободными, остальные – связанными.

В дальнейшем мы будем рассматривать только замкнутые формулы. Если замкнутая формула ϕ первого порядка истинна для графа G , то будем говорить, что граф G *обладает свойством первого порядка L* , которое определено формулой ϕ . Под свойством мы подразумеваем множество графов, которые этим свойством обладают. В этой связи множество графов из Ω_N , для которых

истинна формула ϕ , мы будем обозначать L^N или просто L , если из контекста ясно, о каком именно количестве вершин идет речь. В дальнейшем, если выполнено равенство $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(L) = 1$, то будем говорить, что случайный граф *с асимптотической вероятностью 1* обладает свойством L . Обозначим $\mathcal{L}$ класс свойств графов, выражаемых формулами первого порядка.

При доказательстве законов нуля или единицы для класса свойств первого порядка используется теорема Эрэнфойхта. Перед тем как сформулировать ее, напомним некоторые определения. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Два графа G и H называются *k -элементарно эквивалентными*, если для любого свойства первого порядка L , выражаемого формулой, кванторная глубина которой не превосходит числа k , либо $G \in L$, $H \in L$, либо $G \notin L$, $H \notin L$. Два графа G и H называются *элементарно эквивалентными*, если они являются k -элементарно эквивалентными для любого натурального числа k .

Определим игру Эрэнфойхта $\text{EHR}(G, H, k)$ на двух графах G, H , не обязательно конечных, с двумя игроками (Новатором и Консерватором) и с фиксированным числом раундов k (см. [8], [10], [35]–[40], [46], [48]–[50]). Пусть $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $V(H) = \{y_1, \dots, y_m\}$. На ν -м ходу ($1 \leq \nu \leq k$) Новатор выбирает вершину из любого графа (он выбирает либо $x_{j_\nu} \in V(G)$, либо $y_{j'_\nu} \in V(H)$). Затем Консерватор выбирает вершину из оставшегося графа. Если Новатор выбирает на μ -м ходу, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu = j_\nu$ ($\nu < \mu$), то Консерватор должен выбрать $y_{j'_\mu} \in V(H)$. Если же на этом ходу Новатор выбирает, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu \notin \{j_1, \dots, j_{\mu-1}\}$, то и Консерватор должен выбрать такую вершину $y_{j'_\mu} \in V(H)$, что $j'_\mu \notin \{j'_1, \dots, j'_{\mu-1}\}$. Если он не может этого сделать, то игру выигрывает Новатор. К концу игры выбраны вершины $x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \in V(G)$, а также вершины $y_{j'_1}, \dots, y_{j'_k} \in V(H)$. Некоторые из этих вершин могут совпадать. Выберем из них только различные: $x_{h_1}, \dots, x_{h_l}$; $y_{h'_1}, \dots, y_{h'_l}$, $l \leq k$. Консерватор побеждает тогда и только тогда, когда соответствующие подграфы изоморфны:

$$G|_{\{x_{h_1}, \dots, x_{h_l}\}} \cong H|_{\{y_{h'_1}, \dots, y_{h'_l}\}}.$$

Сформулируем, наконец, теорему Эрэнфойхта о связи между элементарной эквивалентностью и игрой Эрэнфойхта.

ТЕОРЕМА 6 (А. Эрэнфойхт, 1960, [48]). *Пусть G, H – два графа, k – натуральное число. Графы G, H являются k -элементарно эквивалентными тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G, H, k)$.*

Из этой теоремы, очевидно, следует, что два графа являются элементарно эквивалентными тогда и только тогда, когда для любого $k \in \mathbb{N}$ у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G, H, k)$.

Для того чтобы продемонстрировать, для каких задач оказывается полезна теорема Эрэнфойхта, докажем с ее помощью, что свойство связности нельзя записать на языке первого порядка. Предположим противное. Пусть k – глубина формулы первого порядка, с помощью которой можно записать свойство связности. Рассмотрим связный граф G , являющийся бесконечной цепью,

и несвязный граф $H = H_1 \sqcup H_2$, являющийся объединением двух бесконечных цепей H_1 и H_2 . Такие графы не являются k -элементарно эквивалентными в силу предположения. Тогда по теореме 6 у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\text{ENR}(G, H, k)$. Докажем, что это не так.

Введем обозначение, которое мы будем использовать в дальнейшем. Пусть X – произвольный граф, A и B – два его подграфа, $x \in V(A)$, $y \in V(B)$. Обозначим $d_X(x, y)$ наименьшее среди количеств ребер в цепях, являющихся подграфами в X и соединяющих вершины x и y . Положим

$$d_X(x, B) = d_X(B, x) = \min_{\tilde{y} \in V(B)} d_X(x, \tilde{y}),$$

$$d_X(A, B) = \min_{\tilde{x} \in V(A)} d_X(\tilde{x}, B).$$

Заметим, что если граф X несвязный, то цепи, соединяющей вершины x и y , может и не существовать. Если цепи не существует, то положим $d_X(x, y) = \infty$. Для любого натурального числа n мы считаем, что $n < \infty$.

Предположим, что выбранные в первых i раундах, $1 \leq i \leq k-1$, вершины $x_1, \dots, x_i \in V(G)$, $y_1, \dots, y_i \in V(H)$ обладают свойством i -отделимости, определенным ниже.

Пусть $y_{j_1}, \dots, y_{j_u} \in V(H_1)$, $y_{j_{u+1}}, \dots, y_{j_i} \in V(H_2)$, где $j_1 < \dots < j_u$, $j_{u+1} < \dots < j_i$ – попарно различные числа. Пусть, кроме того, σ – такая перестановка на множестве $\{1, \dots, i\}$, что вершины $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}$ в цепи G следуют подряд (т.е. для любого $j \in \{1, \dots, i-1\}$ между вершинами $x_{\sigma(j)}$ и $x_{\sigma(j+1)}$ в цепи G не лежит ни одной из вершин $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(j-1)}, x_{\sigma(j+2)}, \dots, x_{\sigma(i)}$ и для любого $j \in \{1, \dots, i-2\}$ в цепи G между вершинами $x_{\sigma(j)}$ и $x_{\sigma(j+2)}$ находится вершина $x_{\sigma(j+1)}$). Будем говорить, что вершины $x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i$ обладают свойством i -отделимости, если

- для любых $\nu_1 \in \{1, \dots, i-1\}$, $\nu_2 \in \{\nu_1 + 1, \dots, i\}$ выполнено

$$d_G(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}) < 2^{k-i+1} \Leftrightarrow d_H(y_{\nu_1}, y_{\nu_2}) < 2^{k-i+1}$$

и, более того, если $d_G(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}) < 2^{k-i+1}$, то

$$d_G(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}) = d_H(y_{\nu_1}, y_{\nu_2});$$

- вершины $y_{\sigma(h_1)}, \dots, y_{\sigma(h_u)}$ следуют подряд в цепи H_1 , вершины $y_{\sigma(h_{u+1})}, \dots, y_{\sigma(h_i)}$ следуют подряд в цепи H_2 , где $h_1 < \dots < h_u$, $h_{u+1} < \dots < h_i$ – попарно различные числа, отображение σ на множестве $\{h_1, \dots, h_u\}$ принимает значения $j_1, \dots, j_u$, а на множестве $\{h_{u+1}, \dots, h_i\}$ – значения $j_{u+1}, \dots, j_i$.

Сделанное нами предположение, очевидно, верно при $i = 1$. Далее действуем по индукции и разбираем возможные случаи.

Пусть в $(i+1)$ -м раунде Новатором выбрана вершина x_{i+1} в графе G . Докажем, что Консерватор сможет выбрать такую вершину $y_{i+1} \in V(H)$, что вершины $x_1, \dots, x_{i+1}, y_1, \dots, y_{i+1}$ обладают свойством $(i+1)$ -отделимости.

Найдем “ближайшие” к вершине x_{i+1} вершины среди $x_1, \dots, x_i$. Если вершина x_{i+1} в цепи G лежит между вершинами x_ν и x_μ для некоторых $\nu, \mu \in \{1, \dots, i\}$, то Консерватор должен руководствоваться следующей стратегией. Если вершины y_ν и y_μ принадлежат одной цепи, то в силу свойства i -отделимости вершин $x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i$ Консерватор в графе H сможет выбрать такую вершину y_{i+1} , что

$$d_G(x_\nu, x_{i+1}) = d_H(y_\nu, y_{i+1})I(d_H(y_\nu, y_{i+1}) < 2^{k-i}) + d_1I(d_H(y_\nu, y_{i+1}) \geq 2^{k-i}), \quad (2)$$

$$d_G(x_\mu, x_{i+1}) = d_H(y_\mu, y_{i+1})I(d_H(y_\mu, y_{i+1}) < 2^{k-i}) + d_2I(d_H(y_\mu, y_{i+1}) \geq 2^{k-i}) \quad (3)$$

при некоторых $d_1, d_2 \geq 2^{k-i}$. Если же вершины y_ν и y_μ принадлежат разным цепям, то хотя бы одно из чисел $d_G(x_{i+1}, x_\nu)$, $d_G(x_{i+1}, x_\mu)$ не меньше, чем 2^{k-i} . Будем для определенности считать, что $\sigma^{-1}(\nu) < \sigma^{-1}(\mu)$. И пусть, например, $d_G(x_{i+1}, x_\nu) < 2^{k-i}$. Тогда Консерватор выберет такую вершину y_{i+1} , что $d_H(y_{i+1}, y_\nu) = d_G(x_{i+1}, x_\nu)$ и ближайшая к y_{i+1} вершина среди $y_1, \dots, y_i$ в H , не считая y_ν , находится на расстоянии от нее, не меньшем 2^{k-i} . Очевидно, что вершины $x_1, \dots, x_{i+1}, y_1, \dots, y_{i+1}$ обладают свойством $(i+1)$ -отделимости. Если же $d_G(x_{i+1}, x_\nu) \geq 2^{k-i}$, $d_G(x_{i+1}, x_\mu) \geq 2^{k-i}$, то в силу свойства i -отделимости вершин $x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i$ выполнено неравенство $d_H(y_{\sigma^{-1}(\nu)}, y_{\sigma^{-1}(\nu+\chi)}) \geq 2^{k-i+1}$, где χ – наименьшее такое натуральное число, что вершина $y_{\sigma^{-1}(\nu+\chi)}$ принадлежит той же цепи, что и вершина $y_{\sigma^{-1}(\nu)}$, если такая вершина имеется. В этом случае (существует конечное число χ) Консерватор сможет выбрать в той же цепи такую вершину y_{i+1} , что

$$d_H(y_{\sigma^{-1}(\nu)}, y_{i+1}) \geq 2^{k-i}, \quad d_H(y_{\sigma^{-1}(\nu+\chi)}, y_{i+1}) \geq 2^{k-i}.$$

В противном случае Консерватор сможет выбрать такую вершину y_{i+1} , что

$$\min_{j \in \{1, \dots, i\}} d_H(y_j, y_{i+1}) = d_H(y_{\sigma^{-1}(\nu)}, y_{i+1}) \geq 2^{k-i}.$$

Очевидно, что вершины $x_1, \dots, x_{i+1}, y_1, \dots, y_{i+1}$ обладают свойством $(i+1)$ -отделимости.

Если, наконец, вершина x_{i+1} в цепи G является “крайней” и $i > 1$, т. е. либо

$$d_G(x_{i+1}, x_{\sigma(i-1)}) = d_G(x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(i-1)}) + d_G(x_{i+1}, x_{\sigma(i)}), \quad (4)$$

либо

$$d_G(x_{i+1}, x_{\sigma(2)}) = d_G(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) + d_G(x_{i+1}, x_{\sigma(1)}), \quad (5)$$

то Консерватор выберет такую новую “крайнюю вершину” y_{i+1} , принадлежащую цепи, которой принадлежит вершина $y_{\sigma(i)}$ (если выполнено равенство (4)) или вершина $y_{\sigma(1)}$ (если выполнено равенство (5)), что

$$d_H(y_{\sigma(i)}, y_{i+1}) = d_G(x_{\sigma(i)}, x_{i+1}),$$

если выполнено (4), и

$$d_H(y_{\sigma(1)}, y_{i+1}) = d_G(x_{\sigma(1)}, x_{i+1}),$$

если выполнено (5). Очевидно, что вершины $x_1, \dots, x_{i+1}, y_1, \dots, y_{i+1}$ и в этом случае обладают свойством $(i+1)$ -отделимости. В случае $i = 1$ стратегия Консерватора очевидна.

Пусть в $(i+1)$ -м раунде Новатором выбрана вершина y_{i+1} в графе H_1 (без ограничения общности выбираем одну из цепей графа H). Докажем, что Консерватор сможет выбрать такую вершину $x_{i+1} \in V(G)$, что вершины $x_1, \dots, x_{i+1}, y_1, \dots, y_{i+1}$ обладают свойством $(i+1)$ -отделимости. Найдем “ближайшие” к вершине y_{i+1} вершины среди $y_1, \dots, y_i$ в цепи H_1 . Пусть вершина y_{i+1} в цепи H_1 лежит между вершинами y_ν и y_μ для некоторых $\nu, \mu \in \{1, \dots, i\}$. Если $|\sigma^{-1}(\nu) - \sigma^{-1}(\mu)| = 1$, то в силу свойства i -отделимости вершин $x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i$ Консерватор в графе G сможет выбрать такую вершину x_{i+1} , что равенства (1), (2) выполнены для некоторых $d_1, d_2 \geq 2^{k-i}$. Если $|\sigma^{-1}(\nu) - \sigma^{-1}(\mu)| > 1$, то в силу свойства i -отделимости вершин $x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i$ выполнены неравенства

$$d_{H_1}(y_\nu, y_\mu) \geq 2^{k-i+1}, \quad d_G(x_\nu, x_{\sigma(\sigma^{-1}(\nu)+1)}) \geq 2^{k-i+1}, \\ d_G(x_\mu, x_{\sigma(\sigma^{-1}(\mu)-1)}) \geq 2^{k-i+1}$$

(для определенности будем считать, что $\sigma^{-1}(\nu) < \sigma^{-1}(\mu)$). Если, например, $d_{H_1}(y_\nu, y_{i+1}) < 2^{k-i}$, то Консерватор сможет выбрать такую вершину x_{i+1} , что

$$d_G(x_\nu, x_{i+1}) = d_{H_1}(y_\nu, y_{i+1}), \quad d_G(x_{i+1}, x_{\sigma(\sigma^{-1}(\nu)+1)}) \geq 2^{k-i}.$$

Если, наконец, $\min\{d_{H_1}(y_\nu, y_{i+1}), d_{H_1}(y_\mu, y_{i+1})\} \geq 2^{k-i}$, то Консерватор выберет такую вершину x_{i+1} , что $d_G(x_\nu, x_{i+1}) = 2^{k-i}$. Легко заметить, что во всех рассмотренных случаях вершины $x_1, \dots, x_{i+1}, y_1, \dots, y_{i+1}$ обладают свойством $(i+1)$ -отделимости. Случай “крайней” вершины y_{i+1} разбирается аналогичным образом.

Таким образом, если Консерватор будет руководствоваться описанной стратегией, то по прошествии k раундов выбранные вершины $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ будут обладать свойством k -отделимости и, следовательно, индуцированные подграфы $G|_{\{x_1, \dots, x_k\}}$ и $H|_{\{y_1, \dots, y_k\}}$ будут изоморфны. Поэтому Консерватор победит. Тем самым, мы доказали, что свойство связности нельзя выразить формулой первого порядка, а стало быть, формулами первого порядка не ограничиваются формальные записи всех возможных свойств. Свойство связности графа выразимо *формулой второго порядка*, т.е. формулой, в которой кванторы ставятся и по предикатам:

$$(\exists X \forall x \exists y [((X(x)) \Rightarrow ((\neg(X(y))) \wedge (x \sim y))) \wedge ((\neg(X(x))) \Rightarrow ((X(y)) \wedge (x \sim y)))]).$$

Это свойство означает, что множество вершин графа можно так разбить на два подмножества X и $\bar{X}$, что для любой вершины из X найдется вершина из $\bar{X}$, соединенная с ней ребром, и для любой вершины из $\bar{X}$ найдется вершина из X , соединенная с ней ребром (иными словами, граф связан).

4. Закон нуля или единицы для $G(N, p)$ при $p = \text{const}$

Определение закона нуля или единицы для случайного графа $\mathcal{G}(G_n, p)$ для класса свойств $\mathcal{C}$ было дано в разделе 2. Если $\mathcal{C}$ – класс всех свойств первого порядка, то мы будем просто говорить, что *случайный граф $\mathcal{G}(G_n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы*. Такое сокращение мотивировано тем, что, как мы покажем в этом разделе, случайный граф $G(N, p)$, где p – константа, подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств первого порядка и этот результат нельзя расширить до языка второго порядка.

Последнее обстоятельство совсем легко прояснить. Докажем, что, например, граф $G(N, 0.5)$ не подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств второго порядка. Рассмотрим формулу второго порядка

$$\begin{aligned} & (\exists X \forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 \exists y_2 ((x_1 \sim y_1) \Rightarrow ((X(x_1, y_1, x_2, y_2)) \wedge (x_2 \approx y_2) \\ & \wedge (\forall x \forall y (((x \neq x_2) \vee (y \neq y_2)) \Rightarrow (\neg(X(x_1, y_1, x, y)))))) \\ & \wedge (\forall x \forall y (((x \neq x_1) \vee (y \neq y_1)) \Rightarrow (\neg(X(x, y, x_2, y_2)))))))). \end{aligned}$$

Свойство, выраженное этой формулой, означает, что не более половины пар вершин в графе образует ребра. Вероятность того, что в графе $G(N, 0.5)$ количество ребер не превосходит $N(N-1)/4$, равна

$$\sum_{i=0}^{\lfloor N(N-1)/4 \rfloor} C_{N(N-1)/2}^i \left(\frac{1}{2}\right)^{N(N-1)/2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Таким образом, предел отличен от 0 и от 1, а следовательно, закон нуля или единицы для класса свойств второго порядка не выполнен.

Перейдем теперь к обсуждению справедливости закона нуля или единицы для $G(N, p)$ с постоянным p и класса свойств первого порядка. Дадим некий удобный критерий, верный при любых p , не только постоянных. Этот критерий будет следствием из теоремы 6 (см., например, [8]). Итак, обозначим $P_{N,M,p}$ декартово произведение мер $P_{N,p} \times P_{M,p}$. Тогда имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда для любого $k \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} P_{N, M, p}(\{(A, B) : \text{у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре } \text{EHR}(A, B, k)\}) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнен закон нуля или единицы. Предположим, что при некотором $k \in \mathbb{N}$ предел вероятности существования выигрышной стратегии Консерватора в игре с k раундами либо не существует, либо не равен 1. Тогда существует частичный предел, отличный от 1. Иными словами, найдутся такие возрастающие последовательности чисел $N_i \uparrow \infty$, $M_i \uparrow \infty$, что предел вероятности существования выигрышной стратегии Консерватора в игре $\text{EHR}(G(N_i, p(N_i)), G(M_i, p(M_i)), k)$ равен c , где $0 \leq c < 1$. Пусть $X_{N, M}$ – множество всех таких пар остовных подграфов A, B в полных графах K_N, K_M соответственно, что у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(A, B, k)$.

Тогда, очевидно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{N_i, M_i, p}(X_{N_i, M_i}) = 1 - c.$$

В силу теоремы 6 для любой пары $(A, B) \in X_{N, M}$ существует такое свойство первого порядка $L(A, B)$, кванторная глубина которого ограничена числом k , что либо $A \in L(A, B)$, $B \notin L(A, B)$, либо $A \notin L(A, B)$, $B \in L(A, B)$.

Заметим, что существует лишь конечное количество различных свойств, выражаемых формулами кванторной глубины k (см., например, [46]). Для любых $N, M \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathcal{U}(N, M)$ множество всех различных свойств среди $L(A, B)$, $(A, B) \in X_{N, M}$. Пусть $\mathcal{U}$ – множество всех различных свойств в $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{U}(N_i, M_i)$. Имеем

$$\begin{aligned} P_{N_i, M_i, p}(X_{N_i, M_i}) &= P_{N_i, M_i, p}\left(\bigcup_{L \in \mathcal{U}} ((L^{N_i} \times \overline{L^{M_i}}) \cup (\overline{L^{N_i}} \times L^{M_i}))\right) \\ &\leq \sum_{L \in \mathcal{U}} P_{N_i, M_i, p}((L^{N_i} \times \overline{L^{M_i}}) \cup (\overline{L^{N_i}} \times L^{M_i})). \end{aligned}$$

Пусть δ – такое положительное число, что $c + \delta < 1$. Тогда существует такое $i_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $i > i_0$ справедливо неравенство

$$P_{N_i, M_i, p}(X_{N_i, M_i}) > 1 - c - \delta.$$

Следовательно, для каждого $i > i_0$ существует такое $L = L(i) \in \mathcal{U}$, что

$$P_{N_i, M_i, p}((L^{N_i} \times \overline{L^{M_i}}) \cup (\overline{L^{N_i}} \times L^{M_i})) > \frac{1 - c - \delta}{|\mathcal{U}|}.$$

Поэтому существуют такие последовательность $\{i_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и свойство $L \in \mathcal{U}$, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$P_{N_{i_j}, M_{i_j}, p}((L^{N_{i_j}} \times \overline{L^{M_{i_j}}}) \cup (\overline{L^{N_{i_j}}} \times L^{M_{i_j}})) > \frac{1 - c - \delta}{|\mathcal{U}|}.$$

Значит,

$$\max\left\{P_{N_{i_j}, M_{i_j}, p}(L^{N_{i_j}} \times \overline{L^{M_{i_j}}}), P_{N_{i_j}, M_{i_j}, p}(\overline{L^{N_{i_j}}} \times L^{M_{i_j}})\right\} > \frac{1 - c - \delta}{2|\mathcal{U}|}.$$

Так как L – свойство первого порядка, выражаемое формулой с ограниченной числом k кванторной глубиной, то $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, p}(L) \in \{0, 1\}$. А стало быть, существуют сколь угодно большие N, M , при которых

$$P_{N, M, p}(L^N \times \overline{L^M}) > \frac{1 - c - \delta}{2|\mathcal{U}|}.$$

Получили противоречие.

Зафиксируем теперь произвольное $k \in \mathbb{N}$ и предположим, что предел вероятности того, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре с k раундами, равен 1. Докажем, что утверждение теоремы верно для любой формулы, кванторная глубина которой ограничена числом k . Предположим, что

найдется такая формула первого порядка глубины k , что либо предела вероятности обладания соответствующим свойством L не существует и все частичные пределы принадлежат множеству $\{0, 1\}$, либо существует (частичный) предел, отличный от нуля и единицы.

В первом случае пусть $N_i \uparrow \infty$, $M_i \uparrow \infty$ – такие последовательности, что $\lim_{i \rightarrow \infty} P_{N_i, p}(L) = 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} P_{M_i, p}(L) = 1$. Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{N_i, M_i, p}(\overline{L^{N_i}} \times L^{M_i}) = 1.$$

В силу теоремы 6 для любого $i \in \mathbb{N}$ и любой пары $(A, B) \in \overline{L^{N_i}} \times L^{M_i}$ у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(A, B, k)$. Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{N_i, M_i, p}(\{(A, B) : \text{у Новатора есть выигрышная стратегия в игре } \text{EHR}(A, B, k)\}) = 1.$$

Получили противоречие.

Во втором случае существует частичный предел, отличный от 0 и 1. Пусть $N_i \uparrow \infty$ – такая последовательность, что $\lim_{i \rightarrow \infty} P_{N_i, p}(L) = c \in (0, 1)$. Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{N_i, N_{i+1}, p}(\overline{L^{N_i}} \times L^{N_{i+1}}) = (1 - c)c.$$

В силу теоремы 6 для любого $i \in \mathbb{N}$ и любой пары $(A, B) \in \overline{L^{N_i}} \times L^{N_{i+1}}$ у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(A, B, k)$. Следовательно, при достаточно больших i имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{N_i, N_{i+1}, p}(\{(A, B) : \text{у Новатора есть выигрышная стратегия в игре } \text{EHR}(A, B, k)\}) > \frac{(1 - c)c}{2}.$$

Снова получили противоречие. Теорема доказана.

В 1969 г. Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиогонький и В. А. Таланов (и независимо в 1976 г. Р. Фагин) доказали, что случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если p не зависит от N .

ТЕОРЕМА 8 (Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиогонький и В. А. Таланов, 1969, [51]; Р. Фагин, 1976, [52]). *Случайный граф $G(N, p)$ при фиксированном p подчиняется закону нуля или единицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $p \in \{0, 1\}$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $p \in (0, 1)$. В силу теоремы 7 для доказательства теоремы достаточно предъявить стратегию Консерватора, которая является выигрышной с вероятностью, стремящейся к 1. Эта стратегия опирается на свойство графов, определенное ниже, которое мы будем использовать и в следующих разделах. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что граф H обладает *свойством полного расширения уровня s* (которое мы будем обозначать S_s), если для любых целых неотрицательных чисел a, b , удовлетворяющих неравенству $a + b \leq s$, и для любых вершин $v_1, \dots, v_a, u_1, \dots, u_b \in V(H)$ найдется такая вершина $z \in V(H)$, что для любых

$i \in \{1, \dots, a\}$, $j \in \{1, \dots, b\}$ вершины v_i , z соединены ребром в H , а вершины u_j , z не соединены ребром в H . Легко заметить, что если графы A , B обладают свойством полного расширения уровня s , то у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\text{ENR}(A, B, s)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что для любого $s \in \mathbb{N}$ случайный граф $G(N, p)$ обладает свойством S_s с вероятностью, стремящейся к 1. Пусть $v_1, \dots, v_a$, $u_1, \dots, u_b \in V_N$ для некоторых чисел a и b . Обозначим $\overline{U}_{v_1, \dots, v_a}^{u_1, \dots, u_b}$ множество всех таких графов из Ω_N , что существует вершина $z \in V_N$, соединенная ребром с каждой вершиной из $v_1, \dots, v_a$ и не соединенная ни с одной из $u_1, \dots, u_b$. Заметим, что

$$P_{N,p}(\overline{U}_{v_1, \dots, v_a}^{u_1, \dots, u_b}) = (1 - p^a(1 - p)^b)^{N-a-b} \leq (1 - \min\{p, 1 - p\}^s)^{N-s}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P_{N,p}(\overline{S}_s) &= P_{N,p}\left(\bigcup_{a=0}^s \bigcup_{b=0}^{s-a} \bigcup_{v_1, \dots, v_a, u_1, \dots, u_b \in V_N} \overline{U}_{v_1, \dots, v_a}^{u_1, \dots, u_b}\right) \\ &\leq s^2 N^s (1 - \min\{p, 1 - p\}^s)^{N-s} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В следующем разделе мы сформулируем и докажем законы нуля или единицы для случайного графа $G(N, p)$, где p – различные функции от количества вершин N .

5. Законы нуля или единицы для $G(N, p)$ при $p \neq \text{const}$

Доказательство теоремы 8 не изменится, если в рассуждениях заменить константу p на функцию $p = p(N)$, которая при каждом $\alpha > 0$ обладает свойством (1). Поэтому для таких функций p также справедлив закон нуля или единицы.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ – функция, которая при каждом $\alpha > 0$ обладает свойством (1). Тогда случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

В разделе 2 мы доказали, что из существования для любого рационального $\alpha \in (0, 1]$ строго сбалансированного графа с плотностью $1/\alpha$ следует отсутствие закона нуля или единицы для случайного графа $G(N, N^{-\alpha})$. Более того, справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 10 (Дж. Спенсер, С. Шела, 1988, [50]; А. Ручински, А. Винс, 1986, [20]). Пусть $\alpha > 0$ – рациональное число. Если $\alpha > 2$ или $\alpha \in (1 + 1/(l + 1), 1 + 1/l)$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, то случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы. Во всех остальных случаях случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ закону нуля или единицы не подчиняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем рассуждение на три части. В первой части мы дадим набросок доказательства того, что при $\alpha \in (0, 1]$ закона нуля или единицы нет. Во второй части мы обсудим отсутствие этого закона при $\alpha = 1 + 1/l$, $l \in \mathbb{N}$, и при $\alpha > 2$. А третью часть посвятим доказательству этого закона при $\alpha \in (1 + 1/(l + 1), 1 + 1/l)$.

СЛУЧАЙ 1: $\alpha \in (0, 1]$. Как уже было сказано выше, случай $\alpha \in (0, 1]$ следует из теоремы 4 и существования строго сбалансированного графа с плотностью $1/\alpha$, которое доказано в [20]. В настоящей работе мы не приводим ни доказательства первого факта, ни полного доказательства последнего факта. Однако последний факт мы все же частично обоснуем. А именно, мы предполагаем, что утверждение о существовании строго сбалансированного графа доказано для $\alpha \in (2/3, 1]$, и затем для любого $\alpha \leq 2/3$ приводим конструкцию строго сбалансированного графа с плотностью $1/\alpha$. Итак, во-первых, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть G – строго сбалансированный граф с плотностью ρ . Тогда существует строго сбалансированный граф с плотностью $1/2 + \rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_1, G_2 – графы, изоморфные G и не имеющие общих вершин. Пусть, кроме того, $V(G_1) = \{x_1^1, \dots, x_n^1\}$, $V(G_2) = \{x_1^2, \dots, x_n^2\}$, причем существует такой изоморфизм $f: G_1 \rightarrow G_2$, что $f(x_i^1) = x_i^2$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Определим граф H следующим образом:

$$V(H) = V(G_1) \cup V(G_2), \quad E(H) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{x_1^1, x_1^2\}, \dots, \{x_n^1, x_n^2\}\}.$$

Очевидно, что плотность графа H равна $1/2 + \rho$. Докажем, что он строго сбалансированный. Пусть K – некоторый подграф графа H . Положим $K \cap G_1 = K_1$, $K \cap G_2 = K_2$. Обозначим $e = e(K) - e(K_1) - e(K_2)$. Так как G – строго сбалансированный граф и $e \leq \min\{v(K_1), v(K_2)\}$, имеем

$$\begin{aligned} \rho(K) &= \frac{e(K_1) + e(K_2) + e}{v(K_1) + v(K_2)} < \frac{v(K_1)\rho + v(K_2)\rho + e}{v(K_1) + v(K_2)} \\ &= \rho + \frac{e}{v(K_1) + v(K_2)} \leq \rho + \frac{1}{2} = \rho(H). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь предположим, что для любого $\alpha \in (2/3, 1]$ существование строго сбалансированного графа с плотностью $1/\alpha$ доказано. Докажем, что существует строго сбалансированный граф с плотностью ρ , где $\rho \geq 3/2$ – произвольное число. Число ρ допускает единственное представление в виде

$$\rho = \frac{1}{2}n + \rho_0, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, \quad \rho_0 \in \left[1, \frac{3}{2}\right).$$

Так как строго сбалансированный граф с плотностью ρ_0 существует, то по лемме 1 существует и строго сбалансированный граф с плотностью ρ .

В случае 1 доказательство теоремы завершено.

СЛУЧАЙ 2: $\alpha = 1 + 1/l$, $l \in \mathbb{N}$, или $\alpha > 2$. Отсутствие закона нуля или единицы при $\alpha = 1 + 1/l$, где $l \in \mathbb{N}$, следует из того, что для любого $l \in \mathbb{N}$ существует дерево (которое, очевидно, является строго сбалансированным графом) с плотностью $l/(l+1)$. Если $\alpha > 2$, то с вероятностью $(1 - N^{-\alpha})^{C_N^2}$, стремящейся к 1, в графе $G(N, N^{-\alpha})$ нет ребер, а следовательно, случайный граф подчиняется закону нуля или единицы.

В случае 2 доказательство теоремы завершено.

СЛУЧАЙ 3: $\alpha \in (1 + 1/(l+1), 1 + 1/l)$. Пусть, наконец, $l \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (1 + 1/(l+1), 1 + 1/l)$. Пусть, кроме того, $k \in \mathbb{N}$ – произвольное число. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ обозначим $\tilde{\Omega}_N$ множество всех графов в Ω_N , обладающих следующим свойством. Граф G принадлежит $\tilde{\Omega}_N$ тогда и только тогда, когда любой его подграф на $l+2$ вершинах не является связным, любой его связный подграф является деревом, для любого дерева H на не более чем $l+1$ вершинах в G существует не менее k компонент, являющихся копиями H . Из теоремы 2 следует, что с вероятностью, стремящейся к 1, в случайном графе $G(N, N^{-\alpha})$ любой подграф на $l+2$ вершинах не является связным, любой связный подграф является деревом, существует копия любого дерева H на не более чем $l+1$ вершинах. Докажем, что более сильное утверждение $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha}}(\tilde{\Omega}_N) = 1$ следует из сформулированного ниже результата. Обозначим $\tilde{N}_G$ случайную величину, равную наибольшему количеству копий графа G в случайном графе $G(N, p)$, не пересекающихся по вершинам.

ТЕОРЕМА 11 (Б. Кройтер, 1996, [53]). Пусть $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ – произвольная функция, G – произвольный граф. Обозначим

$$\Phi_G(N) = \min_{\emptyset \subset H \subseteq G} \{N^{v(H)} p^{e(H)}\}.$$

Если $\Phi_G(N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, то для некоторых чисел $c, C > 0$

$$P_{N,p}(c\Phi_G(N) \leq \tilde{N}_G \leq N_G \leq C\Phi_G(N)) \rightarrow 1.$$

Пусть $G_1 \subset G_2$ – два дерева, $v(G_2) \leq l+1$. Тогда, очевидно,

$$\Phi_{G_1}(N) = N^{v(G_1) - \alpha(v(G_1) - 1)} = N^{\alpha - (\alpha - 1)v(G_1)} > N^{\alpha - (\alpha - 1)v(G_2)} = \Phi_{G_2}(N).$$

Поэтому в силу теоремы 11 с вероятностью, стремящейся к 1, количество компонент, являющихся копиями G_1 , в случайном графе $G(N, N^{-\alpha})$ стремится к бесконечности. Следовательно, действительно, $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha}}(\tilde{\Omega}_N) = 1$.

Пусть $N, M \in \mathbb{N}$, $A \in \tilde{\Omega}_N$, $B \in \tilde{\Omega}_M$. Докажем, что в этом случае у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(A, B, k)$ (а стало быть, по доказанному вероятность того, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k)$, стремится к 1 при $N, M \rightarrow \infty$). В первом раунде Новатор выбирает некоторую вершину x_1 в одном из графов (например, в A). Пусть X_1 – древесная компонента в A , содержащая x_1 . Тогда, так как $B \in \tilde{\Omega}_M$, в B найдется компонента Y_1 , изоморфная X_1 . Пусть при соответствующем изоморфизме вершина x_1 переходит в вершину y_1 . Эту вершину и выберет Консерватор в первом раунде. Пусть сыграно i раундов,

$1 \leq i < k$. Пусть, кроме того, в графе A выбраны вершины $x_1, \dots, x_i$ и компоненты $X_1, \dots, X_j$, $j \leq i$, в графе B выбраны вершины $y_1, \dots, y_i$ и компоненты $Y_1, \dots, Y_j$ и при этом выполнены следующие свойства.

(i.1) Существует изоморфизм $f: X_1 \cup \dots \cup X_j \rightarrow Y_1 \cup \dots \cup Y_j$, переводящий граф X_r в граф Y_r для каждого $r \in \{1, \dots, j\}$.

(i.2) Вершины $x_1, \dots, x_i$ принадлежат графу $X_1 \cup \dots \cup X_j$, вершины $y_1, \dots, y_i$ принадлежат графу $Y_1 \cup \dots \cup Y_j$.

Пусть в $(i+1)$ -м раунде Новатор выбирает вершину y_{i+1} , например, в графе B . Если $y_{i+1} \in V(Y_1 \cup \dots \cup Y_j)$, то Консерватор выберет вершину $x_{i+1} = f^{-1}(y_{i+1})$. Таким образом, выбранные в $(i+1)$ -м раунде в графе A вершины $x_1, \dots, x_{i+1}$ и компоненты $X_1, \dots, X_j$ и выбранные тогда же в графе B вершины $y_1, \dots, y_{i+1}$ и компоненты $Y_1, \dots, Y_j$ обладают свойствами (i+1.1) и (i+1.2). Если же $y_{i+1} \notin V(Y_1 \cup \dots \cup Y_j)$, то найдем компоненту Y_{j+1} в графе B , содержащую вершину y_{i+1} . Так как $A \in \tilde{\Omega}_N$, то в A найдется компонента X_{j+1} , изоморфная Y_{j+1} . Пусть при соответствующем изоморфизме вершина y_{j+1} переходит в вершину x_{j+1} . Эту вершину и выберет Консерватор в $(i+1)$ -м раунде. Таким образом, и в этом случае выбранные в $(i+1)$ -м раунде в графе A вершины $x_1, \dots, x_{i+1}$ и компоненты $X_1, \dots, X_{j+1}$ и выбранные тогда же в графе B вершины $y_1, \dots, y_{i+1}$ и компоненты $Y_1, \dots, Y_{j+1}$ обладают свойствами (i+1.1) и (i+1.2). Поэтому в последнем раунде Консерватор одержит победу, ведь компоненты, содержащие выбранные обоими игроками вершины, окажутся изоморфными. В силу теоремы 7 случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы.

Рассмотрение случая 3 завершено, и теорема 10 доказана.

В 1988 г. в той же работе [50] Дж. Спенсер и С. Шела доказали, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы при любом иррациональном $\alpha > 0$. Прежде чем сформулировать и доказать теорему, проведем построение необходимых для этого конструкций.

Рассмотрим такие графы $H, G, \tilde{H}, \tilde{G}$, что

$$\begin{aligned} V(H) &= \{x_1, \dots, x_k\}, & V(G) &= \{x_1, \dots, x_l\}, \\ V(\tilde{H}) &= \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}, & V(\tilde{G}) &= \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}, \end{aligned}$$

причем $H \subset G$, $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ (тем самым, $k < l$). Граф $\tilde{G}$ называется (G, H) -расширением графа $\tilde{H}$, когда

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \Rightarrow \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}).$$

Если выполняется соотношение

$$\{x_{i_1}, x_{i_1}\} \in E(G) \setminus E(H) \Leftrightarrow \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}),$$

то $\tilde{G}$ называется *точным расширением*, а пары (G, H) и $(\tilde{G}, \tilde{H})$ считаются *изоморфными*. Зафиксируем число $\alpha > 0$. Положим

$$\begin{aligned} v(G, H) &= |V(G) \setminus V(H)|, & e(G, H) &= |E(G) \setminus E(H)|, \\ f_\alpha(G, H) &= v(G, H) - \alpha e(G, H). \end{aligned}$$

Если для любого такого графа S , что $H \subset S \subseteq G$, выполнено неравенство $f_\alpha(S, H) > 0$, то пара (G, H) называется α -надежной (см. [8], [10]). Если же для любого такого S , что $H \subseteq S \subset G$, выполнено неравенство $f_\alpha(G, S) < 0$, то пара (G, H) называется α -жесткой. Введем, наконец, понятие максимальной пары. Пусть $\tilde{H} \subset \tilde{G} \subset \Gamma$ и $T \subset K$, причем $|V(T)| \leq |V(\tilde{G})|$. Пару $(\tilde{G}, \tilde{H})$ назовем (K, T) -максимальной в Γ , если у любого такого подграфа $\tilde{T}$ графа $\tilde{G}$, что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$ и $\tilde{T} \cap \tilde{H} \neq \tilde{T}$, не существует такого точного (K, T) -расширения $\tilde{K}$ в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$. Граф $\tilde{G}$ называется (K, T) -максимальным в Γ , если у любого такого подграфа $\tilde{T}$ графа $\tilde{G}$, что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$, не существует такого точного (K, T) -расширения $\tilde{K}$ в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$.

Обратимся теперь к случайному графу $G(N, p)$. Пусть $\alpha > 0$, $p = N^{-\alpha}$. Пусть, кроме того, пара (G, H) является α -надежной и

$$V(H) = \{x_1, \dots, x_k\}, \quad V(G) = \{x_1, \dots, x_l\}.$$

Рассмотрим произвольные вершины $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in V_N$ и случайную величину $N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ на вероятностном пространстве $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_{N, p})$, которая каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_N ставит в соответствие количество (G, H) -расширений подграфа в $\mathcal{G}$, индуцированного на $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ (граф X является подграфом графа Y , индуцированным на множество $S \subset V(Y)$, если $V(X) = S$ и для любых вершин $x, y \in S$ справедливо $\{x, y\} \in E(X) \Leftrightarrow \{x, y\} \in E(Y)$). Иными словами, пусть $W \subset V_N \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ – множество, мощность $|W|$ которого равна $l - k$. Если можно так занумеровать элементы множества W числами $k + 1, k + 2, \dots, l$, что граф $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}}$ является (G, H) -расширением графа $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, то положим $I_W(\mathcal{G}) = 1$. В противном случае $I_W(\mathcal{G}) = 0$. Случайная величина $N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ определяется следующим равенством:

$$N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \sum_{W \subset V_N \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}, |W|=l-k} I_W.$$

Обозначим $E_{N, p}$ математическое ожидание по мере $P_{N, p}$.

ТЕОРЕМА 12 (Дж. Спенсер, 1990, [54]). *С вероятностью, стремящейся к 1, для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_0 , что для любого натурального $N > N_0$ справедливо соотношение*

$$(1 - \varepsilon)E_{N, p}N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \leq N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \leq (1 + \varepsilon)E_{N, p}N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k).$$

При этом

$$E_{N, p}N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(N^{f_\alpha(G, H)}).$$

В дальнейшем для двух функций $f = f(N)$ и $g = g(N)$, стремящихся к бесконечности при $N \rightarrow \infty$, мы будем использовать обозначение $f \sim g$, если для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших N выполнено соотношение $(1 - \varepsilon)f(N) \leq g(N) \leq (1 + \varepsilon)f(N)$.

Помимо теоремы 12 Дж. Спенсер и С. Шела (см. [8], [50]) для исследования законов нуля или единицы доказали теорему о количестве максимальных расширений подграфов в случайном графе (для случая “запрещенных” жестких пар). Более формально, пусть случайная величина $N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ ставит в соответствие каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_N количество таких точных (G, H) -расширений $\tilde{G}$ графа $\tilde{H} = \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K, T) -максимальной в $\mathcal{G}$. Сформулируем теорему, доказанную в работе [50], об асимптотическом поведении этой случайной величины.

ТЕОРЕМА 13 (Дж. Спенсер, С. Шела, 1988, [50]). *Пусть пара (K, T) является α -жесткой. Тогда с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнено*

$$\begin{aligned} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\sim N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &\sim E_{N,p} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(N^{f_\alpha(G,H)}). \end{aligned}$$

Сформулируем, наконец, утверждение об ограниченности количества α -жестких расширений в случайном графе. Пусть $r, t \in \mathbb{N}$ – произвольные числа. Последовательность графов $H_1, G_1, \dots, H_i, G_i$ называется α -жесткой (r, t) -цепью, если она удовлетворяет следующим условиям: $H_1 \subset G_1$, пары (G_j, H_j) являются α -жесткими, $v(G_j, H_j) \leq t$ для всех $j \in \{1, \dots, i\}$, $H_j \subset G_1 \cup \dots \cup G_{j-1}$, $G_j \cap (G_1 \cup \dots \cup G_{j-1}) = H_j$ для всех $j \in \{2, \dots, i\}$, $v(H_1) = r$. Также рассматривается “вырожденный” случай $t = 0$. В этом случае $i = 1$ и $H_1 = G_1$ (хотя в основном определении включение $H_1 \subset G_1$ предполагалось строгим).

ЛЕММА 2 (Дж. Спенсер, С. Шела, 1988, [50]). *Существует число $K_t(r)$ такое, что с вероятностью, стремящейся к 1, для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r \in V_N$ выполнено следующее свойство. Если $H_1, G_1, \dots, H_i, G_i$ – такая α -жесткая (r, t) -цепь, что в графе $\mathcal{G} \in \Omega_N$ существует точное $(G_1 \cup \dots \cup G_i, H_1)$ -расширение графа $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r\}}$, то $v(G_1 \cup \dots \cup G_i, H_1) \leq K_t(r)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m – такое натуральное число, что $[(1/\alpha)v] + 1 > (1/\alpha)v + 1/m$ для любого $v \in \{1, \dots, t\}$. Пусть, кроме того, $\tilde{\Omega}_N$ – множество всех таких графов из Ω_N , что в каждом из них не существует подграфа с плотностью, большей $1/\alpha$, количество вершин которого не превосходит $2mt^2r + r$. По теореме 3 имеем $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(\tilde{\Omega}_N) = 1$.

Пусть $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_N$, $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r \in V_N$, а $i \in \mathbb{N}$ – некоторое количество пар (G_j, H_j) , $H_j \subset G_j \subset \mathcal{G}$, удовлетворяющих условию леммы. Тогда

$$\rho(G_1 \cup \dots \cup G_i) \geq \frac{[(1/\alpha)v_1] + 1 + \dots + [(1/\alpha)v_i] + 1}{r + v_1 + \dots + v_i},$$

где $v_1, \dots, v_i \leq t$. Легко заметить, что при $i = 2mtr$ справедливы неравенства

$$v(G_1 \cup \dots \cup G_i) \leq 2mt^2r + r$$

и

$$\rho(G_1 \cup \dots \cup G_i) > \frac{1}{\alpha} - \frac{r}{r+i} + \frac{i/m}{r+ti} > \frac{1}{\alpha},$$

что противоречит определению множества $\tilde{\Omega}_N$. Следовательно, $i < 2mtr$. Поэтому в качестве $K_t(r)$ можно выбрать величину $2mt^2r$. Лемма доказана.

Обратимся теперь к закону нуля или единицы для иррационального α .

ТЕОРЕМА 14 (Дж. Спенсер, С. Шела, 1988, [50]). *Пусть $\alpha > 0$ – иррациональное число. Тогда случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Положим $a_k = 0$, $a_j = j + 1 + K_{a_{j+1}}(j + 1)$ для всех $j \in \{0, \dots, k-1\}$, где $K_t(r)$ – величина, определенная в формулировке леммы 2. Для любого $N \in \mathbb{N}$ обозначим $\tilde{\Omega}_N$ множество всех графов X из Ω_N , которые обладают следующими свойствами.

- В X не существует подграфа с плотностью, большей $1/\alpha$, количество вершин которого не превосходит a_0 . Более того, для любого такого графа H , что $v(H) \leq a_0$, $\rho^{\max}(H) < 1/\alpha$, в X найдется копия H .

- Пусть (G, H) – α -надежная пара, причем $v(G) \leq a_0 + a_1$. Тогда в графе X для любого подграфа $\tilde{H}$ на $v(H)$ вершинах найдется такое точное (G, H) -расширение $\tilde{G}$ графа $\tilde{H}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K, T) -максимальной для любой α -жесткой пары (K, T) с $v(K) \leq a_1 + 1$.

- Для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ и любой α -жесткой (j, a_j) -цепи $H_1, G_1, \dots, H_i, G_i$ в X выполнено неравенство $v(G_1 \cup \dots \cup G_i) \leq a_{j-1}$.

По теореме 3, теореме 13 и лемме 2 выполнено $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(\tilde{\Omega}_N) = 1$. Пусть $N, M \in \mathbb{N}$, $A \in \tilde{\Omega}_N$, $B \in \tilde{\Omega}_M$. В силу теоремы 7 для доказательства теоремы 14 нам достаточно предъявить выигрышную стратегию Консерватора в игре $\text{ENR}(A, B, k)$. Вершину, выбранную в j -м раунде, $j \in \{1, \dots, k\}$, мы будем обозначать x_j , если эта вершина выбрана в графе A , и y_j , если эта вершина выбрана в графе B .

Пусть в первом раунде Новатор выбрал некоторую вершину, скажем, в графе A . Пусть, кроме того, $H_1, G_1, \dots, H_i, G_i$ – такая α -жесткая $(1, a_1)$ -цепь в A , где $H_1 = (\{x_1\}, \emptyset)$, что граф $G_1 \cup \dots \cup G_i$ является (K, T) -максимальным для любой α -жесткой пары (K, T) , удовлетворяющей условию $v(K, T) \leq a_1$. Выполнено неравенство

$$v(G_1 \cup \dots \cup G_i) \leq 1 + K_{a_1}(1) = a_0.$$

Так как $A \in \tilde{\Omega}_N$, то максимальная плотность графа $X_1 := G_1 \cup \dots \cup G_i$ меньше, чем $1/\alpha$. Поэтому в силу определения множества $\tilde{\Omega}_M$ в графе B существует подграф Y_1 , изоморфный графу X_1 , являющийся (K, T) -максимальным в B для любой такой пары (K, T) , что $v(K, T) \leq a_1$. Консерватор выберет вершину y_1 , являющуюся образом вершины x_1 при изоморфизме $X_1 \rightarrow Y_1$.

Пусть $j \in \{1, \dots, k-1\}$ – количество сыгранных раундов. Пусть, кроме того, в графах A и B выбраны подграфы X_j и Y_j соответственно, которые обладают следующими свойствами.

- (j.1) Вершины $x_1, \dots, x_j$ принадлежат графу X_j , вершины $y_1, \dots, y_j$ принадлежат графу Y_j .
- (j.2) Графы X_j и Y_j изоморфны, $v(X_j) = v(Y_j) \leq a_{j-1}$.
- (j.3) Графы X_j и Y_j являются (K, T) -максимальным в A и B соответственно для любой пары (K, T) , удовлетворяющей условию $v(K, T) \leq a_j$.

Очевидно, графы X_1 и Y_1 обладают свойствами (1.1), (1.2) и (1.3). Докажем, что, какую бы вершину (x_{j+1} или y_{j+1}) ни выбрал Новатор в $(j+1)$ -м раунде, Консерватор сможет найти такую вершину (y_{j+1} или x_{j+1}) и графы $X_{j+1} \subset A$, $Y_{j+1} \subset B$, что они обладают свойствами $(j+1.1)$, $(j+1.2)$ и $(j+1.3)$.

Если в $(j+1)$ -м раунде Новатор выбрал вершину, лежащую внутри графа X_j (графа Y_j), Консерватор сможет найти вершину, являющуюся ее образом при изоморфизме $X_j \rightarrow Y_j$ ($Y_j \rightarrow X_j$). В этом случае положим $X_{j+1} = X_j$, $Y_{j+1} = Y_j$.

Пусть в $(j+1)$ -м раунде Новатор выбрал некоторую вершину x_{j+1} вне графа X_j (без ограничения общности будем считать, что Новатор выбрал вершину в графе A). Пусть, кроме того, $H_1, G_1, \dots, H_i, G_i$ – такая α -жесткая $(j+1, a_{j+1})$ -цепь, что $H_1 = A|_{\{x_1, \dots, x_{j+1}\}}$ и граф $X_{j+1} := G_1 \cup \dots \cup G_i$ является (K, T) -максимальным для любой пары (K, T) , удовлетворяющей условию $v(K, T) \leq a_{j+1}$. Так как $A \in \tilde{\Omega}_N$, то $v(X_{j+1}) \leq a_j$.

Предположим, что в графе X_{j+1} существует такой подграф S , содержащий $A|_{\{x_1, \dots, x_j\}}$, что $f_\alpha(S \cup X_j, X_j) < 0$. Тогда без ограничения общности можно считать, что в S нет подграфов, обладающих тем же свойством. Иными словами, для любого подграфа $\tilde{S}$ в S , содержащего $A|_{\{x_1, \dots, x_j\}}$, выполнено неравенство $f_\alpha(\tilde{S} \cup X_j, X_j) > 0$ (неравенство строгое, так как α – иррациональное число). Поэтому $f_\alpha(S \cup X_j, \tilde{S} \cup X_j) < 0$. Таким образом, пара $(S \cup X_j, X_j)$ является α -жесткой. Получили противоречие со свойством (j.3) графа X_j . Следовательно, $f_\alpha(S \cup X_j, X_j) > 0$ для любого такого графа S , что $A|_{\{x_1, \dots, x_j\}} \subset S \subseteq X_{j+1}$, $S \cap X_{j+1} \neq S$, т. е. пара $(X_{j+1} \cup X_j, X_j)$ является α -надежной.

Так как $B \in \tilde{\Omega}_M$ и $v(X_j \cup X_{j+1}) \leq a_{j-1} + a_j \leq a_0 + a_1$, то в графе B найдется такое точное $(X_{j+1} \cup X_j, X_j)$ -расширение Y графа Y_j , что пара (Y, Y_j) является (K, T) -максимальной для любой пары (K, T) , удовлетворяющей условию $v(K, T) \leq a_{j+1}$. Тогда существуют такие граф $Y_{j+1} \subset Y$ и изоморфизм $f: X_{j+1} \cup X_j \rightarrow Y$, переводящий граф X_{j+1} в Y_{j+1} , что $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_j) = y_j$. Положим $y_{j+1} = f(x_{j+1})$. Так как граф Y_j обладает свойством (j.3) и $a_j < a_{j+1}$, то граф Y_j является (K, T) -максимальным для любой пары (K, T) , удовлетворяющей условию $v(K, T) \leq a_{j+1}$. Следовательно, граф Y также является (K, T) -максимальным для любой пары (K, T) , удовлетворяющей условию $v(K, T) \leq a_{j+1}$.

Чтобы доказать, что графы X_{j+1} и Y_{j+1} обладают свойствами $(j+1.1)$, $(j+1.2)$ и $(j+1.3)$, осталось обосновать (K, T) -максимальность графа Y_{j+1} для любой пары (K, T) , удовлетворяющей условию $v(K, T) \leq a_{j+1}$. Предположим

противное. Тогда существует такой граф Z на не более чем a_{j+1} вершинах, имеющий непустое пересечение с Y_j , что $Y_{j+1} \cap Z = \emptyset$ и пара $(Z \cup Y_{j+1}, Y_{j+1})$ является α -жесткой. Если граф Z не содержится целиком в Y , то пара $(Z \cup Y, Y)$ является α -жесткой и мы приходим к противоречию с максимальностью графа Y . Если же Z целиком содержится в Y , то обозначим $\tilde{Z}$ граф, являющийся образом графа Z при отображении f^{-1} . Так как пара $(\tilde{Z} \cup X_{j+1}, X_{j+1})$ является α -жесткой, то приходим к противоречию с максимальностью графа X_{j+1} . Таким образом, граф Y_{j+1} действительно является (K, T) -максимальным для любой пары (K, T) , удовлетворяющей условию $v(K, T) \leq a_{j+1}$.

К концу игры выбраны вершины $x_1, \dots, x_k \in V(A)$, $y_1, \dots, y_k \in V(B)$, а также такие графы $X_k \subset A$ и $Y_k \subset B$, что вершины $x_1, \dots, x_k$ принадлежат графу X_k , вершины $y_1, \dots, y_k$ принадлежат графу Y_k и графы X_k и Y_k изоморфны. Следовательно, Консерватор выигрывает игру. Теорема доказана.

6. Некоторые обобщения результатов из разделов 4 и 5

В данном разделе мы приводим (без доказательств) известные результаты, относящиеся к вероятностям свойств первого порядка случайных графов в различных моделях. Эти результаты обобщают и дополняют теоремы, сформулированные в предыдущих двух разделах.

В разделе 5 мы доказали, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы, если α – рациональное число из интервала $(0, 1)$. Возникает естественный вопрос: можно ли немного “сдвинуть” функцию $p = N^{-\alpha}$ таким образом, чтобы закон был выполнен? В 1991 г. Дж. Спенсер и Т. Лучак доказали, что для любого рационального $\alpha \in (0, 1)$ существует такая функция $p = N^{-\alpha+o(1)}$, что случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

ТЕОРЕМА 15 (Дж. Спенсер, Т. Лучак, 1991, [55]). Пусть a, b , $a < b$, – взаимно простые натуральные числа. Пусть, кроме того,

$$p_1(N) = ((b - a + 1)(\log N + \omega(N) \log \log N) N^{-a})^{1/b},$$

где ω – такая стремящаяся к бесконечности функция, что $p_1(N) = N^{-a/b+o(1)}$. Тогда случайный граф $G(N, p_1)$ подчиняется закону нуля или единицы. Более того, существует такая функция $p_2 = p_2(N)$, удовлетворяющая условиям $p_2(N) < N^{-a/b}$ и $p_2(N) = N^{-a/b+o(1)}$, что случайный граф $G(N, p_2)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Рассмотрим произвольное число $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ и случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$. Для всех ли свойств первого порядка существует предел вероятности этих свойств? Ответ на этот вопрос был получен в 1988 г. Дж. Спенсером и С. Шела.

ТЕОРЕМА 16 (Дж. Спенсер, С. Шела, 1988, [50]). Для любого $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ существует такое свойство первого порядка L , что последовательность $\{P_{N, N^{-\alpha}}(L)\}_{N \in \mathbb{N}}$ не сходится.

Более того, в этой работе доказано, что для любого $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ существуют такие стремящиеся к бесконечности функции $\beta_1(N)$ и $\beta_2(N)$ и такое свойство первого порядка L , что сходимость вероятности этого свойства отсутствует и при

$$N^{-\alpha}/\beta_1 < p < N^{-\alpha}\beta_2.$$

В 1992 г. Дж. Линч частично ответил на поставленный выше вопрос в случае $\alpha \geq 1$.

ТЕОРЕМА 17 (Дж. Линч, 1992, [56]). Пусть $l \in \mathbb{N}$, $\alpha = (l + 1)/l$. Тогда для любого свойства первого порядка L существует $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha}}(L)$. Если же $p = c/N$, где c – произвольное положительное число, то для любого свойства первого порядка L предел $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha}}(L)$ существует и может быть выражен функцией от c , использующей в своей записи само число c , сложение, умножение, деление и степени числа e .

Вернемся теперь к закону нуля или единицы и зададимся следующим вопросом. Будет ли случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняться закону нуля или единицы при ограничении кванторной глубины формул первого порядка для каких-нибудь рациональных α из интервала $(0, 1)$? Этот вопрос впервые был задан в работе М. Макартур, где был получен следующий результат.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, $\mathcal{L}_k^\infty$ – множество свойств первого порядка, записываемых с помощью формул, содержащих бесконечное количество логических связок, кванторная глубина которых ограничена числом k .

ТЕОРЕМА 18 (М. Макартур, 1997, [57]). Если $\alpha \in (0, 1/(k - 1))$, то для любого свойства $L \in \mathcal{L}_k^\infty$ предел $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha}}(L)$ равен либо 0, либо 1. При $\alpha = 1/(k - 1)$ этот закон нарушается.

Исследованию законов нуля или единицы для свойств, выражаемых конечными предложениями с ограниченной кванторной глубиной, посвящен следующий раздел нашей работы.

Другие работы, в которых изучалось предельное поведение вероятностей свойств первого порядка случайных графов, были посвящены в основном доказательству закона нуля или единицы в моделях, отличных от модели Эрдёша–Реньи. В 1987 г. Ф. Колайтис, Х. Прёмел, Б. Ротшилд доказали закон нуля или единицы для графов, свободных от полных графов K_{l+1} . Сформулируем этот результат. Пусть $\mathcal{G}_N$ – множество всех графов, не содержащих K_{l+1} , на множестве вершин $\{1, \dots, N\}$. На $(\mathcal{G}_N, 2^{\mathcal{G}_N})$ зададим равномерное распределение вероятностей P_N :

$$P_N(X) = \frac{|X|}{|\mathcal{G}_N|}, \quad X \subseteq \mathcal{G}_N.$$

ТЕОРЕМА 19 (Ф. Колайтис, Х. Прёмел, Б. Ротшилд, 1987, [58]). Для любого свойства первого порядка L выполнено

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(L) \in \{0, 1\}.$$

В 2007 г. Р. Гилман, Ю. Гуревич, А. Мясников доказали закон нуля или единицы для бесконечного графа. Пусть X – связный граф, множество вершин которого бесконечно. Для любого натурального числа n обозначим $B_n(X)$ индуцированный подграф в X на множестве вершин, до которых существует путь от вершины x длины, не превосходящей n . Будем говорить, что *граф X подчиняется закону нуля или единицы*, если этому закону для любого $x \in V(X)$ подчиняется случайный граф, имеющий равномерное распределение на множестве индуцированных подграфов в $B_n(X)$. Как доказали Гилман, Гуревич и Мясников, закон нуля или единицы верен, если граф X обладает двумя свойствами: ограниченной степенью и свойством дублированных подграфов. Определим эти свойства. Будем говорить, что граф X имеет *ограниченную степень*, если существует такое число K , что для любой вершины x графа X ее степень не превосходит K . Граф X обладает *свойством дублированных подграфов*, если для любого его конечного подграфа A существует такой подграф $B \subset X$, изоморфный A , что множества вершин графов A и B не пересекаются и между вершинами графа A и вершинами графа B нет ребер графа X .

ТЕОРЕМА 20 (Р. Гилман, Ю. Гуревич, А. Мясников, 2007, [59]). *Пусть X – бесконечный связный граф с ограниченной степенью, обладающий свойством дублированных подграфов. Тогда X подчиняется закону нуля или единицы.*

7. Ограничение кванторной глубины

Как мы доказали в разделе 5, случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы при рациональных α , принадлежащих интервалу $(0, 1]$. Оказывается, закон нуля или единицы становится выполнен и при некоторых рациональных α из интервала $(0, 1]$ при ограничении кванторной глубины формул первого порядка. Для любой последовательности графов G_n будем говорить, что случайный граф $\mathcal{G}(G_n, p)$ *подчиняется k -закону нуля или единицы*, если для любого свойства, выражаемого формулой первого порядка, кванторная глубина которой не превосходит k , вероятность того, что случайный граф $\mathcal{G}(G_n, p)$ обладает этим свойством, стремится либо к 0, либо к 1. Для доказательства k -законов нуля или единицы используется следствие из теоремы 6, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 7.

ТЕОРЕМА 21. *Случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} P_{N, M, p}(\{(A, B) : \text{у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре EHR}(A, B, k)\}) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет доказательство теоремы 7 с одним-единственным изменением: нужно рассматривать не произвольное k , а именно то значение k , для которого доказывается теорема.

В 2012 г. мы доказали, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы при рациональных α из интервала $(0, 1/(k-2))$.

ТЕОРЕМА 22 (М. Е. Жуковский, 2012, [60]). Пусть $p = N^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/(k-2)$. Тогда случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО мы приводим только для случая рациональных α , так как справедливость закона при иррациональных α утверждает теорема 14. Введем некоторые вспомогательные определения, которые мы будем использовать в доказательстве и далее в этом разделе.

Рассмотрим произвольные графы T, K . Пусть $T \subset K$, любая вершина графа T соединена с некоторой вершиной из $V(K) \setminus V(T)$ и для любого такого графа S , что $T \subset S \subset K$, справедливо неравенство $v(S, T) - \alpha \cdot e(S, T) > 0$, но $v(K, T) - \alpha \cdot e(K, T) = 0$. В этом случае пару (K, T) будем называть α -нейтральной. Рассмотрим произвольные вершины $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in V_N$. Для произвольной пары графов (G, H) , где $H \subset G$, рассмотрим случайную величину $\hat{N}_{(G, H)}^{(K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, которая ставит в соответствие каждому графу $\mathcal{G} \in \Omega_N$ количество таких точных (G, H) -расширений $\tilde{G}$ графа $\tilde{H} = \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K, T) -максимальной в $\mathcal{G}$. Для этих случайных величин выполнен результат, подобный теореме 13.

ТЕОРЕМА 23 (М. Е. Жуковский, 2012, [61]). Пусть пара (G, H) является α -надежной, пара (K, T) — α -нейтральной. Тогда с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнено

$$\hat{N}_{(G, H)}^{(K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim E_{N, p} \hat{N}_{(G, H)}^{(K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(N^{f_\alpha(G, H)}).$$

Рассмотрим множества

$$\left(0, \frac{1}{k-1}\right), \quad \left\{\frac{1}{k-1}\right\}, \quad \left(\frac{1}{k-1}, \frac{2}{2k-3}\right), \quad \left\{\frac{2}{2k-3}\right\}, \quad \left(\frac{2}{2k-3}, \frac{1}{k-2}\right).$$

В зависимости от того, какому из этих множеств принадлежит число α , доказательство теоремы 22 разобьется на случаи.

1) Пусть $\alpha < 1/(k-1)$. Пусть, кроме того, $\mathcal{E} \in \mathcal{F}_N$ — множество графов, обладающих свойством полного расширения уровня $k-1$ (см. раздел 4). Покажем, что $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, p}(\mathcal{E}) = 1$. Справедливы соотношения

$$P_{N, p}(\Omega_N \setminus \mathcal{E}) \leq (k-1)^2 N^{k-1} (1 - p^{k-1})^N \leq (k-1)^2 N^{k-1} \exp(-N^{1-(k-1)\alpha}) \rightarrow 0,$$

т. е. действительно $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, p}(\mathcal{E}) = 1$. Но раз с вероятностью, стремящейся к 1, выполнено свойство полного расширения уровня $k-1$, то, очевидно, с вероятностью $P_{N, M, p}$, стремящейся к 1, в игре $\text{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k)$ у Консерватора есть выигрышная стратегия. Следовательно, в силу теоремы 21 выполнен k -закон нуля или единицы.

2) Пусть $\alpha = 1/(k-1)$. Из предыдущего пункта, очевидно, следует, что с вероятностью, стремящейся к 1, выполнено свойство полного расширения уровня $k-2$. Тогда для $k-2$ ходов у Консерватора с вероятностью $P_{N,M,p}$, стремящейся к 1, есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k)$.

Заметим, что если $H \subset G$ и $v(G, H) = 1$, $v(H) = k-2$, то пара (G, H) является α -надежной. Действительно, $e(G, H) \leq k-2$ и $1 - \alpha(k-2) > 0$. Аналогично, если $v(G, H) = 2$, $v(H) = k-2$, то пара (G, H) также является α -надежной. Если же $v(G, H) = 1$, $v(H) = k-1$, то пара (G, H) является либо α -надежной, либо α -нейтральной. При этом α -нейтральной она является тогда и только тогда, когда $e(G, H) = k-1$. Рассмотрим такую α -нейтральную пару (K, T) .

Пусть графы A, B обладают следующим свойством. Для любой такой α -надежной пары (G, H) , что $v(G) \leq k$, и любых подграфов $\tilde{H}_A \subset A$, $\tilde{H}_B \subset B$ на $v(H)$ вершинах в графах A и B существуют такие (K, T) -максимальные точные (G, H) -расширения $\tilde{G}_A$ и $\tilde{G}_B$ графов $\tilde{H}_A$ и $\tilde{H}_B$ соответственно, что каждая из пар $(\tilde{G}_A, \tilde{H}_A)$ и $(\tilde{G}_B, \tilde{H}_B)$ является (K, T) -максимальной.

Пусть в игре $\text{EHR}(A, B, k)$ Новатором и Консерватором выбраны вершины $x_1, \dots, x_{k-2}$ в графе A и вершины $y_1, \dots, y_{k-2}$ в графе B . Пусть, кроме того, Консерватор одерживает победу, т.е. подграфы, индуцированные на множества выбранных вершин, изоморфны. В силу теорем 21 и 23, если независимо от выбора еще двух вершин Новатором Консерватор сможет победить, то случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Итак, пусть Новатор выбрал вершину x_{k-1} , например, в графе A . У выбранного графа $A|_{\{x_1, \dots, x_{k-1}\}}$ либо существует (K, T) -расширение в A , либо нет. Если оно существует (предположим, его образует вершина x_k), то пара $(A|_{\{x_1, \dots, x_k\}}, A|_{\{x_1, \dots, x_{k-2}\}})$ является α -надежной. Следовательно, Консерватор сможет найти такие вершины $y_{k-1}, y_k \in V(B)$, что граф $B|_{\{y_1, \dots, y_k\}}$ является точным $(A|_{\{x_1, \dots, x_k\}}, A|_{\{x_1, \dots, x_{k-2}\}})$ -расширением графа $B|_{\{y_1, \dots, y_{k-2}\}}$. Тогда на $(k-1)$ -м ходу Консерватор выбирает вершину y_{k-1} . Далее, если Новатор выберет вершину, соединенную с каждой из $k-1$ выбранных, то Консерватор сможет найти вершину, соединенную с каждой из выбранных в своем графе. Если же он выберет, скажем, вершину y , не соединенную с какой-нибудь из $y_1, \dots, y_{k-1}$, то пара $(B|_{\{y_1, \dots, y_{k-1}, y\}}, B|_{\{y_1, \dots, y_{k-1}\}})$ является α -надежной и Консерватор победит в силу определения графа A .

Если же (K, T) -расширения не существует, то Консерватор сможет выбрать такую *подходящую ему* вершину y_{k-1} (т.е. $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-2\} ((x_i \sim x_{k-1}) \Leftrightarrow (y_i \sim y_{k-1}))$), что у графа $B|_{\{y_1, \dots, y_{k-1}\}}$ не существует (K, T) -расширения в B . Дальнейшая выигрышная стратегия Консерватора очевидна.

3) Пусть $1/(k-1) < \alpha < 2/(2k-3)$. С вероятностью, стремящейся к 1, выполнено свойство полного расширения уровня $k-2$. Тогда для $k-2$ ходов у Консерватора с вероятностью $P_{N,M,p}$, стремящейся к 1, есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k)$.

Если для графа H выполнено равенство $v(H) = k - 2$, то для любого графа G на k вершинах, содержащего H , пара (G, H) является α -надежной и для любого графа G на $k - 1$ вершинах, содержащего H , пара (G, H) также является α -надежной. Если же $v(H) = k - 1$, то существует такой граф G на k вершинах, содержащий H , что пара (G, H) является α -жесткой (пара (G, H) будет α -жесткой тогда и только тогда, когда $e(G, H) = k - 1$). Обозначим такую пару (K, T) . В остальных случаях (при том же значении $v(H)$) пара (G, H) является α -надежной.

Пусть графы A, B обладают следующим свойством. Для любой такой α -надежной пары (G, H) , что $v(G) \leq k$, и любых подграфов $\tilde{H}_A \subset A$, $\tilde{H}_B \subset B$ на $v(H)$ вершинах в графах A и B существуют такие точные (G, H) -расширения $\tilde{G}_A$ и $\tilde{G}_B$ графов $\tilde{H}_A$ и $\tilde{H}_B$ соответственно, что каждая из пар $(\tilde{G}_A, \tilde{H}_A)$ и $(\tilde{G}_B, \tilde{H}_B)$ является (K, T) -максимальной.

Пусть в игре $\text{EHR}(A, B, k)$ Новатором и Консерватором выбраны вершины $x_1, \dots, x_{k-2}$ в графе A и вершины $y_1, \dots, y_{k-2}$ в графе B . Пусть, кроме того, Консерватор одерживает победу, т. е. подграфы, индуцированные на множества выбранных вершин, изоморфны. В силу теорем 13 и 21, если независимо от выбора еще двух вершин Новатором Консерватор сможет победить, то случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям из случая 2).

4) Пусть $\alpha = 2/(2k - 3)$. Аналогично предыдущим случаям для $k - 3$ ходов у Консерватора с вероятностью $P_{N,M,p}$, стремящейся к 1, есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k)$.

Если $v(H) = k - 2$, то для любого графа G на k вершинах, содержащего H , пара (G, H) является либо α -надежной, либо α -нейтральной (пара (G, H) будет α -нейтральной тогда и только тогда, когда $e(G, H) = 2k - 3$), для любого графа G на $k - 1$ вершинах, содержащего H , пара (G, H) является α -надежной. Если же $v(H) = k - 1$, а $v(G) = k$, то пара (G, H) является либо α -надежной, либо α -жесткой (пара (G, H) будет α -жесткой тогда и только тогда, когда $e(G, H) = k - 1$).

Определим графы T_1, T_2, K_1, K_2 . Пусть $T_1 \subset K_1, T_2 \subset K_2$. Пусть, кроме того, $v(T_1) = k - 2, v(K_1, T_1) = 2, v(T_2) = k - 1, v(K_2, T_2) = 1$ и пара (K_1, T_1) является α -нейтральной, а пара (K_2, T_2) — α -жесткой.

Пусть графы A, B обладают следующим свойством. Для любой такой α -надежной пары (G, H) , что $v(G) \leq k$, и любых подграфов $\tilde{H}_A \subset A, \tilde{H}_B \subset B$ на $v(H)$ вершинах в графах A и B существуют такие точные (G, H) -расширения $\tilde{G}_A$ и $\tilde{G}_B$ графов $\tilde{H}_A$ и $\tilde{H}_B$ соответственно, что каждая из пар $(\tilde{G}_A, \tilde{H}_A)$ и $(\tilde{G}_B, \tilde{H}_B)$ является (K_1, T_1) -максимальной и (K_2, T_2) -максимальной.

Пусть в игре $\text{EHR}(A, B, k)$ Новатором и Консерватором выбраны вершины $x_1, \dots, x_{k-3}$ в графе A и вершины $y_1, \dots, y_{k-3}$ в графе B . Пусть, кроме того, Консерватор одерживает победу, т. е. подграфы, индуцированные на множества выбранных вершин, изоморфны. В силу теорем 13, 21 и 23, если независимо от выбора еще трех вершин Новатором Консерватор сможет победить, то случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Предположим, что Новатор выбрал вершину x_{k-2} , например, в графе A . У графа $A|_{\{x_1, \dots, x_{k-2}\}}$ либо существует (K_1, T_1) -расширение в A , либо не существует. Если его не существует, то Консерватор сможет выбрать такую подходящую ему вершину y_{k-2} , что у графа $B|_{\{y_1, \dots, y_{k-2}\}}$ нет (K_1, T_1) -расширений в B . Далее Новатор выбирает $(k-1)$ -ю вершину. Если в соответствующем графе у подграфа, индуцированного на выбранные $k-1$ вершин, существует (K_2, T_2) -расширение, то выбранная $(k-1)$ -я вершина и расширяющая k -я вершина образуют вместе с $k-2$ выбранными вершинами α -надежную пару. Следовательно, Консерватор сможет найти нужную ему $(k-1)$ -ю вершину (для которой тоже существует (K_2, T_2) -расширение) и победит. Если (K_2, T_2) -расширения не существует, то Консерватор сможет выбрать нужную вершину, так как в соответствующем графе найдется необходимая (K_2, T_2) -максимальная α -надежная пара. Если для графа $A|_{\{x_1, \dots, x_{k-2}\}}$ существует (K_1, T_1) -расширение $A|_{\{x_1, \dots, x_k\}}$, то пара $(A|_{\{x_1, \dots, x_k\}}, A|_{\{x_1, \dots, x_{k-3}\}})$ является α -надежной. Следовательно, Консерватор сможет найти такие вершины y_{k-2}, y_{k-1}, y , что вершина y_{k-2} ведет его к победе (т.е. $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-3\} ((x_i \sim x_{k-2}) \Leftrightarrow (y_i \sim y_{k-2}))$), а пара $(B|_{\{y_1, \dots, y_k\}}, B|_{\{y_1, \dots, y_{k-2}\}})$ является α -нейтральной. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в случае, когда (K_1, T_1) -расширения не существует.

5) Пусть $2/(2k-3) < \alpha < 1/(k-2)$. Для $k-3$ ходов у Консерватора с вероятностью $P_{N,M,p}$, стремящейся к 1, есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k)$.

Если $v(H) = k-2$, то для любого графа G на k вершинах, содержащего H , пара (G, H) является либо α -надежной, либо α -жесткой (пара (G, H) будет α -жесткой тогда и только тогда, когда $e(G, H) = 2k-3$), для любого графа G на $k-1$ вершинах, содержащего H , пара (G, H) является α -надежной. Если же $v(H) = k-1$, а $v(G) = k$, то пара (G, H) является либо α -надежной, либо α -жесткой (пара (G, H) будет α -жесткой тогда и только тогда, когда $e(G, H) = k-1$). Рассмотрим T_1, T_2, K_1, K_2 и A, B – графы из пункта 4).

Пусть в игре $\text{EHR}(A, B, k)$ Новатором и Консерватором выбраны вершины $x_1, \dots, x_{k-3}$ в графе A и вершины $y_1, \dots, y_{k-3}$ в графе B . Пусть, кроме того, Консерватор одерживает победу, т.е. подграфы, индуцированные на множества выбранных вершин, изоморфны. В силу теоремы 13 и теоремы 21, если независимо от выбора еще трех вершин Новатором Консерватор сможет победить, то случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в случае 4). Теорема 22 доказана.

Мы также нашли ближайший к 1 интервал значений α , при которых случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

ТЕОРЕМА 24 (М. Е. Жуковский, 2013, [62]). Пусть $k > 3$ – произвольное натуральное число. Пусть, кроме того, $\mathcal{Q}$ – множество положительных дробей с числителем, не превосходящим числа 2^{k-1} . Случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы, если $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, $\beta \in (0, \infty) \setminus \mathcal{Q}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В этой теореме мы рассмотрели интервал $(1 - 2^{1-k}, 1)$ и получили множество рациональных чисел α , при которых k -закон справедлив. Так как любое число из $(1 - 2^{1-k}, 1)$ представляется в виде $1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, этот закон будет выполнен при любых α из

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^k}, 1\right) \cup \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1 - \frac{1}{2^k}\right) \cup \dots \\ & \cup \left(1 - \frac{1}{2^{k-1} + 2^{k-2}}, 1 - \frac{1}{2^{k-1} + 2^{k-2} + 1}\right) \\ & \cup \left(1 - \frac{1}{2^{k-1} + (2^{k-1} - 1)/2}, 1 - \frac{1}{2^{k-1} + 2^{k-2}}\right) \cup \dots \\ & \cup \left(1 - \frac{1}{2^{k-1} + 2^{k-1}/3}, 1 - \frac{1}{2^{k-1} + (2^{k-1} - [2^{k-1}/3])/2}\right) \cup \dots \end{aligned}$$

Длины интервалов уменьшаются при стремлении концов к $1 - 2^{1-k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 24. Пусть $m \in \mathbb{N}$ – произвольное натуральное число. Рассмотрим такую пару графов (G, H) , что $G \supset H$. Будем говорить, что граф G является m -расширением графа H первого типа, если $m \geq 3$ и выполнено следующее условие. Существует такая вершина x_1 графа G , что

$$\begin{aligned} V(G) \setminus V(H) &= \{y_1^1, \dots, y_{t_1}^1, y_1^2, \dots, y_{t_2}^2\}, \\ E(G) \setminus E(H) &= \{\{x_1, y_1^1\}, \{y_1^1, y_2^1\}, \dots, \{y_{t_1-1}^1, y_{t_1}^1\}, \{y_{t_1}^1, y_1^2\}, \\ & \quad \{y_1^2, y_2^2\}, \dots, \{y_{t_2-1}^2, y_{t_2}^2\}, \{y_{t_2}^2, y_{t_1}^1\}\}, \end{aligned}$$

где $t_1 + t_2 \leq m - 1$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 2$ и $\rho^{\max}(G) < m/(m - 1)$ (при $t_1 = 0$ вершина x_1 является смежной с вершинами $y_1^2, y_{t_2}^2$). Граф G мы называем m -расширением графа H второго типа, если $m \geq 2$ и выполнено следующее условие. Существуют две такие различные вершины x_1, x_2 графа G , что

$$G = (V(H) \sqcup \{y_1, \dots, y_t\}, E(H) \sqcup \{\{x_1, y_1\}, \{y_1, y_2\}, \dots, \{y_{t-1}, y_t\}, \{y_t, x_2\}\}),$$

где $t \leq m - 1$ и $\rho^{\max}(G) < m/(m - 1)$. Граф G является m -расширением графа H третьего типа, если $m \geq 2$, $V(H) = V(G)$, $E(H) \subset E(G)$ и $\rho^{\max}(G) < m/(m - 1)$.

Для произвольного натурального числа $m \geq 3$ определим множество графов $\mathcal{H}_m$. Пусть x – вершина. Граф без ребер на множестве вершин $\{x\}$ принадлежит $\mathcal{H}_m$. Далее, пусть $G \in \mathcal{H}_m$. Множество $\mathcal{H}_m$ содержит все попарно неизоморфные m -расширения первого, второго и третьего типов графа G .

Заметим, что любой граф G из $\mathcal{H}_m$, отличный от $(\{x\}, \emptyset)$, содержит в себе конечный набор таких вложенных графов $G_1, \dots, G_t$, $G_0 = (\{x\}, \emptyset) \subset G_1 \subset \dots \subset G_t \subseteq G$, что выполнены следующие свойства:

- $G_i \neq G_{i+1}$ для всех $i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$;
- граф G либо совпадает с G_t , либо является m -расширением третьего типа графа G_t , а графы G_i являются m -расширениями первого или второго типа графов G_{i-1} при $i \in \{0, 1, \dots, t\}$.

Такую последовательность графов $G_0, G_1, \dots, G_t, G$ будем называть m -разложением графа G .

Сформулируем утверждение о свойствах множества $\mathcal{H}_m$.

ЛЕММА 3. *Выполнены следующие свойства.*

1. Пусть G – граф из $\mathcal{H}_m$ и $G_0, G_1, \dots, G_t, G$ – его m -разложение, причем либо $t = 1$ и $G_t \neq G$, либо $t \geq 2$. Тогда найдутся такие натуральные числа a, b , что $b \leq m$ и $\rho^{\max}(G) = 1 + 1/(m - 1 + b/a)$.

2. Пусть $m \geq 2$ и $\rho \in (1, m/(m - 1))$ – произвольное число. Тогда существует такое число $\eta \in \mathbb{N}$, что для любого натурального $v > \eta$ и любого графа $G \in \mathcal{H}_m$ на v вершинах найдется подграф на не более чем η вершинах с плотностью, превосходящей ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ начнем со свойства 1. Если $t = 1$, то $\rho(G_1) = 1$, $v(G_1) \leq m$. Следовательно, $\rho(G) = (v(G_1) + e)/v(G_1)$, где $e \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\rho(G) = 1 + \frac{1}{1 + (v(G_1) - e)/e} < \frac{m}{m - 1}.$$

Если $e = 1$, то $v(G_1) = m$ и $\rho(G) = 1 + 1/(m - 1 + 1)$. Если $e > 1$, то неравенство $v(G_1) > (m - 1)e$ противоречит условию $v(G_1) \leq m$. Поэтому свойство 1 для рассмотренного случая доказано.

Пусть $t \geq 2$. Положим $v^{i+1} = v(G_{i+1}) - v(G_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, t - 1\}$. Докажем, что

$$\rho(G_t) = 1 + \frac{1}{m - 1 + b_1/(t - 1)} \quad \text{при некотором } b_1 \leq m.$$

Справедливы соотношения

$$\rho(G_t) = \frac{v^1 + \dots + v^t + t}{1 + v^1 + \dots + v^t} = 1 + \frac{t - 1}{1 + v^1 + \dots + v^t} < 1 + \frac{1}{m - 1}.$$

Так как $v^i \leq m - 1$, $i \in \{1, \dots, t\}$, то

$$m - 1 < \frac{1 + v^1 + \dots + v^t}{t - 1} \leq \frac{1 + t(m - 1)}{t - 1} = m - 1 + \frac{m}{t - 1}.$$

Таким образом,

$$1 + \frac{1}{m - 1 + m/(t - 1)} \leq \rho(G) < 1 + \frac{1}{m - 1},$$

при этом

$$\rho(G) = 1 + \frac{1}{m - 1 + b_1/(t - 1)},$$

где $b_1 = 1 + v^1 + \dots + v^t - (m - 1)(t - 1)$. Поэтому число b_1 не превосходит m .

Докажем теперь, что

$$\rho(G) = 1 + \frac{1}{m - 1 + b_2/(t + e_0 - 1)}, \quad \text{где } b_2 \leq m, \quad e_0 = e(G) - e(G_t).$$

Имеем

$$\rho(G) = \frac{m(t - 1) + b_1 + e_0}{(m - 1)(t - 1) + b_1} = 1 + \frac{1}{m - 1 + (b_1 - (m - 1)e_0)/(t - 1 + e_0)}.$$

Так как $\rho(G) < 1 + 1/(m - 1)$, то $0 < b_2 \leq b_1 \leq m$, где $b_2 = b_1 - (m - 1)e_0$.

Пусть, наконец, $H \subset G$, $\rho(G) < \rho(H) < m/(m-1)$. Тогда

$$\rho(H) = \frac{m(t-1) + b_1 + e_0 - y}{(m-1)(t-1) + b_1 - x}$$

для некоторых натуральных чисел x, y . Справедливо неравенство $y \geq x$, так как граф G – связный. Докажем, что

$$\rho(H) = 1 + \frac{1}{m-1 + b/(t+e_0-1+x-y)}, \quad \text{где } b \leq m.$$

Имеем

$$\rho(H) = 1 + \frac{1}{m-1 + (b_1 + y(m-1) - mx - (m-1)e_0)/(t-1 + e_0 + x-y)}.$$

Так как $\rho(H) > \rho(G)$, то

$$\frac{b_1 + y(m-1) - mx - (m-1)e_0}{t-1 + e_0 + x-y} < \frac{b_1 - (m-1)e_0}{t-1 + e_0}.$$

Но знаменатель первой дроби не больше, чем знаменатель второй. Следовательно,

$$b = b_1 + y(m-1) - mx - (m-1)e_0 < b_1 - (m-1)e_0 \leq m,$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству свойства 2. В силу определения m -расширений первого и второго типа если $G_0, G_1, \dots, G_t$, G есть m -разложение некоторого графа $G \in \mathcal{H}_m$, то $v(G_{i+1}) - v(G_i) \leq m-1$, $e(G_{i+1}) - e(G_i) = v(G_{i+1}) - v(G_i) + 1$ для всех $i \in \{0, \dots, t-1\}$. Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для любого графа $G \in \mathcal{H}_m$, количество вершин которого не меньше $(m-1)n + 1$, справедливо неравенство $\rho(G) \geq mn/((m-1)n + 1)$. Действительно, плотность любого графа из множества $\mathcal{H}_m$ меньше, чем $m/(m-1)$, поэтому при добавлении к нему его m -расширения первого или второго типа его плотность увеличивается. Кроме того, для любого $\rho \in (1, m/(m-1))$ найдется такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных $n \geq n_0$ выполнено неравенство $mn/((m-1)n + 1) > \rho$. Заметим, наконец, что в любом графе из $\mathcal{H}_m$ на более чем $(m-1)(n+1) + 1$ вершинах найдется подграф из $\mathcal{H}_m$, количество вершин которого находится в отрезке $[(m-1)n + 1, (m-1)(n+1) + 1]$. Поэтому, очевидно, для $\eta = (m-1)(n_0 + 1) + 1$ утверждение леммы выполнено. Лемма полностью доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы 24, обратимся к описанию стратегии в игре $\text{EHR}(G(N, N^{-\alpha}), G(M, M^{-\alpha}), k)$, являющейся выигрышной для Консерватора с вероятностью, стремящейся к 1. Всюду далее мы считаем, что в каждом раунде игроки выбирают вершины, отличные от уже выбранных. Такое предположение не ограничивает общности в силу того, что размеры графов в рассматриваемых случаях, а также утверждения, используемые в рассуждениях, позволяют выбирать вершины, отличные от уже выбранных. Сначала

мы опишем некоторые свойства графов A, B , благодаря которым Консерватор выигрывает в игре на этих графах, придерживаясь такой стратегии, а затем докажем, что случайный граф обладает этими свойствами с вероятностью, стремящейся к 1.

Пусть n_1, n_2, n_3, n_4 – некоторые натуральные числа, $n_2 \leq n_1, n_4 \leq n_3$, ρ – произвольное положительное число. Будем говорить, что граф G является $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$ -разреженным, если он обладает следующими свойствами.

- 1) Пусть K – граф, количество вершин которого не превосходит n_1 . Если $\rho^{\max}(K) < \rho$, то G содержит подграф, изоморфный K . Если $\rho^{\max}(K) > \rho$, то G не содержит подграфа, изоморфного K .
- 2) Пусть $\mathcal{H}$ – множество таких $1/\rho$ -надежных пар (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq n_1, v(H_2) \leq n_2$. Пусть $\mathcal{K}$ – множество таких $1/\rho$ -жестких пар (K_1, K_2) , что $v(K_1) \leq n_3, v(K_2) \leq n_4$. Тогда для любых пар $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}, (K_1, K_2) \in \mathcal{K}$ и для любого подграфа $G_2 \subset G$ на $v(H_2)$ вершинах в графе G найдется подграф G_1 , являющийся (K_1, K_2) -максимальным в G точным (H_1, H_2) -расширением графа G_2 .

Выигрышная стратегия Консерватора, описанная ниже, опирается именно на свойство $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$ -разреженности обоих графов, на которых играют Новатор и Консерватор (при некоторых значениях n_1, n_2, n_3, n_4, ρ).

Пусть $\rho = 1/\alpha$. Тогда с учетом условий доказываемой нами теоремы имеем

$$\rho \in \left(1, \frac{2^{k-1}}{2^{k-1} - 1}\right), \quad \rho \notin \left\{1 + \frac{1}{2^{k-1} - 1 + b/a}, a, b \in \mathbb{N}, b \leq 2^{k-1}\right\}.$$

Обозначим $\eta(\rho)$ число из формулировки леммы 3, т.е. такое число, что для любого натурального $v > \eta(\rho)$ у любого графа $G \in \mathcal{H}_{2^{k-1}}$ на v вершинах найдется подграф на не более чем $\eta(\rho)$ вершинах с плотностью, превосходящей ρ . Положим

$$n_1(\rho) = \eta(\rho) + k \left(\left\lceil \frac{1}{\rho - 1} \right\rceil + 1 \right), \quad n_2(\rho) = \eta(\rho) + (k - 2) \left(\left\lceil \frac{1}{\rho - 1} \right\rceil + 1 \right), \quad (6)$$

$$n_3 = 2^{k-2} + 1, \quad n_4 = 2. \quad (7)$$

Пусть графы A, B являются $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$ -разреженными. Сперва опишем стратегию Консерватора в игре $\text{EHR}(A, B, k)$, а позже докажем, что случайный граф с асимптотической вероятностью 1 является $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$ -разреженным. Это и завершит доказательство теоремы.

Итак, начнем со стратегии. Будем обозначать X_i граф, выбранный Новатором в i -м раунде. Оставшийся граф будем обозначать Y_i . Вершины, выбранные в графе X_i в первых i раундах, обозначим $x_i^1, \dots, x_i^i$, в графе Y_i – $y_i^1, \dots, y_i^i$. Итак, пусть в первом раунде Новатор выбрал вершину x_1^1 . В силу леммы 3 и свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$ -разреженности графа X_1 в нем не существует подграфа, изоморфного некоторому графу из $\mathcal{H}_{2^{k-1}}$ с количеством вершин, превосходящим $\eta(\rho)$. Обозначим $\tilde{X}_1^1$ подграф в X_1 , изоморфный некоторому графу из $\mathcal{H}_{2^{k-1}}$, содержащий вершину x_1^1 и обладающий следующим свойством максимальности. Если v_1 – число вершин в $\tilde{X}_1^1$, то в X_1

не существует подграфа, содержащего вершину x_1^1 и изоморфного некоторому графу из $\mathcal{H}_{2^{k-1}}$, количество вершин которого превосходит v_1 . Выполнены неравенства $v_1 \leq \eta(\rho) < n_1(\rho)$. Поэтому в силу леммы 3 и свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$ -разреженности графа X_1 плотность графа $\tilde{X}_1^1$ меньше, чем ρ . Следовательно, по свойству $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$ -разреженности графа Y_1 в нем найдется подграф $\tilde{Y}_1^1$, изоморфный $\tilde{X}_1^1$. Пусть при соответствующем изоморфизме $\varphi_1: \tilde{X}_1^1 \rightarrow \tilde{Y}_1^1$ вершина x_1^1 переходит в вершину y_1^1 , которую и выберет Консерватор в первом раунде.

Пусть сыграно i раундов, $1 \leq i < k$. Опишем стратегию Консерватора в $(i+1)$ -м раунде. Ниже мы определим ряд свойств подграфов в A , B (они обозначены (I), (II) и (III)). Мы предположим, что в A и B содержатся подграфы, обладающие этими свойствами. В соответствии со свойством (I) выбранные вершины $x_1^i, \dots, x_i^i, y_1^i, \dots, y_i^i$ должны принадлежать объединению этих подграфов. Затем мы докажем, что независимо от выбора Новатором вершины x_{i+1}^{i+1} Консерватор сможет найти такую вершину y_{i+1}^{i+1} , что вершины $x_1^{i+1}, \dots, x_{i+1}^{i+1}, y_1^{i+1}, \dots, y_{i+1}^{i+1}$ также будут содержаться в подграфах, обладающих свойствами (I), (II) и (III). Кроме того, станет очевидно, что вершины x_1^1, y_1^1 содержатся в подграфах, обладающих упомянутыми свойствами, откуда по индукции следует аналогичное утверждение для последнего раунда, т. е. для вершин $x_1^k, \dots, x_k^k, y_1^k, \dots, y_k^k$. В частности, из этих свойств мы выведем, что графы $X_k|_{\{x_1^k, \dots, x_k^k\}}$ и $Y_k|_{\{y_1^k, \dots, y_k^k\}}$ изоморфны.

Воспользуемся обозначением, которое мы ввели в разделе 3, а именно обозначением $d_Q(W_1, W_2)$, где Q – некоторый граф, а W_1, W_2 – некоторые его подграфы. Пусть r – произвольное натуральное число, не превосходящее i . Пусть, кроме того, $W_1, \dots, W_r$ – подграфы в Q . Будем говорить, что $W_1, \dots, W_r$ обладают (k, i, r) -свойством в Q , если

- любые два графа из $W_1, \dots, W_r$ не имеют общих вершин;
- для любых различных $j_1, j_2 \in \{1, \dots, r\}$ справедливо неравенство

$$d_Q(W_{j_1}, W_{j_2}) > 2^{k-i};$$

- для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ в графе Q не существует подграфа, являющегося 2^{k-i} -расширением графа W_j первого или второго типа;
- мощность множества $V(W_1 \cup \dots \cup W_r)$ не превосходит

$$\eta(\rho) + (i-1) \left(\left\lceil \frac{1}{\rho-1} \right\rceil + 1 \right).$$

Предположим, что для некоторого $r \in \{1, \dots, i\}$ графы X_i и Y_i содержат подграфы $\tilde{X}_i^1, \dots, \tilde{X}_i^r$ и $\tilde{Y}_i^1, \dots, \tilde{Y}_i^r$ соответственно, которые обладают следующими свойствами.

(I) Вершины $x_1^i, \dots, x_i^i$ принадлежат множеству $V(\tilde{X}_i^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_i^r)$, вершины $y_1^i, \dots, y_i^i$ принадлежат множеству $V(\tilde{Y}_i^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_i^r)$.

(II) Графы $\tilde{X}_i^1, \dots, \tilde{X}_i^r$ обладают (k, i, r) -свойством в X_i , графы $\tilde{Y}_i^1, \dots, \tilde{Y}_i^r$ обладают (k, i, r) -свойством в Y_i .

(III) Графы $\tilde{X}_i^j$ и $\tilde{Y}_i^j$ изоморфны при каждом $j \in \{1, \dots, r\}$ и при некотором соответствующем изоморфизме (общем для всех графов, так как они не имеют общих вершин) вершины x_i^j переходят в вершины y_i^j , $j \in \{1, \dots, i\}$.

Если $X_{i+1} = X_i$, то положим $\tilde{X}_{i+1}^j = \tilde{X}_i^j$, $\tilde{Y}_{i+1}^j = \tilde{Y}_i^j$, $j \in \{1, \dots, r\}$. В противном случае положим $\tilde{X}_{i+1}^j = \tilde{Y}_i^j$, $\tilde{Y}_{i+1}^j = \tilde{X}_i^j$, $j \in \{1, \dots, r\}$. Пусть φ_{i+1} — изоморфизм из $\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r$ в $\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r$, переводящий графы $\tilde{X}_{i+1}^j$ в $\tilde{Y}_{i+1}^j$ при $j \in \{1, \dots, r\}$. Пусть, кроме того, $\varphi_{i+1}(x_{i+1}^j) = y_{i+1}^j$ при $j \in \{1, \dots, i\}$. Рассмотрим далее три различные ситуации.

1. Предположим, что Новатор в $(i+1)$ -м раунде выбрал вершину x_{i+1}^{i+1} из множества $V(\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r)$. Тогда Консерватор выберет $y_{i+1}^{i+1} = \varphi(x_{i+1}^{i+1})$. Заметим, что мы определили графы $\tilde{X}_{i+1}^1, \dots, \tilde{X}_{i+1}^r, \tilde{Y}_{i+1}^1, \dots, \tilde{Y}_{i+1}^r$, просто переобозначив графы $\tilde{X}_i^1, \dots, \tilde{X}_i^r, \tilde{Y}_i^1, \dots, \tilde{Y}_i^r$ и не меняя их структуры. Поэтому, как нетрудно видеть, при $i < k-1$ графы $\tilde{X}_{i+1}^1, \dots, \tilde{X}_{i+1}^r$ обладают $(k, i+1, r)$ -свойством в X_{i+1} , графы $\tilde{Y}_{i+1}^1, \dots, \tilde{Y}_{i+1}^r$ обладают $(k, i+1, r)$ -свойством в Y_{i+1} . Кроме того, графы $\tilde{X}_{i+1}^j$ и $\tilde{Y}_{i+1}^j$ изоморфны при каждом $j \in \{1, \dots, r\}$ и при соответствующем изоморфизме φ_{i+1} (одном и том же для всех графов) вершины x_{i+1}^j переходят в вершины y_{i+1}^j , $j \in \{1, \dots, i+1\}$. Иными словами, для $(i+1)$ -го раунда мы подобрали графы $\tilde{X}_{i+1}^1, \dots, \tilde{X}_{i+1}^r, \tilde{Y}_{i+1}^1, \dots, \tilde{Y}_{i+1}^r$, обладающие свойствами (I), (II) и (III).

2. Предположим теперь, что Новатор выбрал вершину x_{i+1}^{i+1} , не принадлежащую множеству $V(\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r)$, но при этом

$$d_{X_{i+1}}(x_{i+1}^{i+1}, \tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r) \leq 2^{k-1-i}.$$

Заметим, что в силу определения графов $\tilde{X}_{i+1}^1, \dots, \tilde{X}_{i+1}^r$ в графе X_{i+1} найдется ровно одна цепь $c_{X_{i+1}}$, которая проходит только через вершины графа

$$X_{i+1} \setminus (\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r)$$

(не считая последней вершины), имеет длину, не превосходящую 2^{k-1-i} , и соединяет x_{i+1}^{i+1} с некоторой вершиной $\tilde{x}_{i+1}^l$ графа $\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r$, где $l \in \{1, \dots, r\}$, $\tilde{x}_{i+1}^l \in V(\tilde{X}_{i+1}^l)$. Следовательно, пара

$$(\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r \cup c_{X_{i+1}}, \tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r)$$

является $1/\rho$ -надежной. Кроме того,

$$|V(\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r)| < \eta(\rho) + (i-1) \left(\left\lceil \frac{1}{\rho-1} \right\rceil + 1 \right) \leq \eta(\rho) + (k-2) \left(\left\lceil \frac{1}{\rho-1} \right\rceil + 1 \right).$$

Поэтому в силу свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$ -разреженности графа Y_{i+1} в нем найдется точное (K_1, K_2) -максимальное $(\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r \cup c_{X_{i+1}}, \tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r)$ -расширение графа $\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r$ для всех таких $1/\rho$ -жестких

пар (K_1, K_2) , что $v(K_2) = 2$, $v(K_1) \leq 2^{k-1-i}$. Действительно,

$$\begin{aligned} |V(\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r \cup c_{X_{i+1}})| &\leq \eta(\rho) + (k-2) \left(\left\lceil \frac{1}{\rho-1} \right\rceil + 1 \right) + 2^{k-1-i} \\ &< \eta(\rho) + (k-2) \left(\left\lceil \frac{1}{\rho-1} \right\rceil + 1 \right) + \frac{1}{\rho-1} \\ &\leq \eta(\rho) + (k-1) \left(\left\lceil \frac{1}{\rho-1} \right\rceil + 1 \right) = n_1(\rho). \end{aligned}$$

Иными словами, существуют такая вершина $y_{i+1}^{i+1} \in V(Y_{i+1})$, что

$$d_{Y_{i+1}}(y_{i+1}^{i+1}, \tilde{Y}_{i+1}^l) = d_{X_{i+1}}(x_{i+1}^{i+1}, \tilde{X}_{i+1}^l),$$

и единственная цепь $c_{Y_{i+1}}$, имеющая длину не больше 2^{k-1-i} и соединяющая y_{i+1}^{i+1} с некоторой вершиной $\tilde{y}_{i+1}^l$ графа $\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r$, $\tilde{y}_{i+1}^l \in V(\tilde{Y}_{i+1}^l)$. Переопределим графы $\tilde{X}_{i+1}^l, \tilde{Y}_{i+1}^l$:

$$\tilde{X}_{i+1}^l := \tilde{X}_{i+1}^l \cup c_{X_{i+1}}, \quad \tilde{Y}_{i+1}^l := \tilde{Y}_{i+1}^l \cup c_{Y_{i+1}}.$$

Остальные графы $\tilde{X}_{i+1}^1, \dots, \tilde{X}_{i+1}^{l-1}, \tilde{X}_{i+1}^{l+1}, \dots, \tilde{X}_{i+1}^r, \tilde{Y}_{i+1}^1, \dots, \tilde{Y}_{i+1}^{l-1}, \tilde{Y}_{i+1}^{l+1}, \dots, \tilde{Y}_{i+1}^r$ оставим без изменений. Продолжим изоморфизм φ_{i+1} графов на вершины из $V(\tilde{X}_{i+1}^l)$: для конечной вершины v цепи $c_{X_{i+1}}$, отличной от $\tilde{x}_{i+1}^l$, найдем конечную вершину u цепи $c_{Y_{i+1}}$, отличную от $\tilde{y}_{i+1}^l$, и определим $\varphi_{i+1}(v) = u$. Тогда $\varphi_{i+1}|_{\tilde{X}_{i+1}^j} : \tilde{X}_{i+1}^j \rightarrow \tilde{Y}_{i+1}^j$ — изоморфизм при каждом $j \in \{1, \dots, r\}$ и $\varphi_{i+1}(x_{i+1}^j) = y_{i+1}^j$ при всех $j \in \{1, \dots, i+1\}$, т.е. графы $\tilde{X}_{i+1}^1, \dots, \tilde{X}_{i+1}^r, \tilde{Y}_{i+1}^1, \dots, \tilde{Y}_{i+1}^r$ обладают свойствами (I) и (III). Докажем, что при $i < k-1$ выполнено свойство (II) (графы $\tilde{X}_{i+1}^1, \dots, \tilde{X}_{i+1}^r$ обладают $(k, i+1, r)$ -свойством в X_{i+1} , а графы $\tilde{Y}_{i+1}^1, \dots, \tilde{Y}_{i+1}^r$ обладают $(k, i+1, r)$ -свойством в Y_{i+1}). Для этого достаточно доказать следующие утверждения:

– для любого $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{l\}$

$$d_{X_{i+1}}(\tilde{X}_{i+1}^j, \tilde{X}_{i+1}^l) > 2^{k-i-1}, \quad d_{Y_{i+1}}(\tilde{Y}_{i+1}^j, \tilde{Y}_{i+1}^l) > 2^{k-i-1};$$

- в графе X_{i+1} (в графе Y_{i+1}) не найдется подграфа, являющегося 2^{k-i-1} -расширением графа $\tilde{X}_{i+1}^l$ (графа $\tilde{Y}_{i+1}^l$) первого или второго типа;
- мощности множеств $V(\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r), V(\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r)$ не превосходят величины $\eta(\rho) + i([1/(\rho-1)] + 1)$.

Предположим, что найдутся число $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{l\}$ и цепь, имеющая длину не больше 2^{k-1-i} и соединяющая некоторую вершину u графа $\tilde{X}_{i+1}^l$ с некоторой вершиной v графа $\tilde{X}_{i+1}^j$. Так как $2^{k-1-i} < 2^{k-i}$, то $u \in V(c_{X_{i+1}})$. Но длина цепи $c_{X_{i+1}}$ не превосходит 2^{k-1-i} . Следовательно,

$$d_{X_{i+1}}(\tilde{X}_{i+1}^j, \tilde{X}_{i+1}^l \setminus (c_{X_{i+1}} \setminus \{\tilde{x}_{i+1}^l\})) \leq 2^{k-1-i} + 2^{k-1-i} = 2^{k-i}.$$

Однако величина в левой части неравенства равна

$$d_{X_i}(\tilde{X}_i^l, \tilde{X}_i^j) \quad \text{либо} \quad d_{Y_i}(\tilde{Y}_i^l, \tilde{Y}_i^j).$$

Получили противоречие либо с (k, i, r) -свойством графов $\tilde{X}_i^1, \dots, \tilde{X}_i^r$, либо с (k, i, r) -свойством графов $\tilde{Y}_i^1, \dots, \tilde{Y}_i^r$. Таким образом, $d_{X_{i+1}}(\tilde{X}_{i+1}^j, \tilde{X}_{i+1}^l) > 2^{k-i-1}$. Аналогично доказывается неравенство $d_{Y_{i+1}}(\tilde{Y}_{i+1}^j, \tilde{Y}_{i+1}^l) > 2^{k-i-1}$.

Доказательство второго утверждения мы тоже приводим только для графа X_{i+1} , так как оно в точности повторяет доказательство для графа Y_{i+1} . Итак, пусть в графе X_{i+1} существует подграф W , являющийся 2^{k-1-i} -расширением первого или второго типа графа $\tilde{X}_{i+1}^l$. Рассмотрим множество ребер

$$E = E(W) \setminus (E(\tilde{X}_{i+1}^l) \cup E(W \setminus \tilde{X}_{i+1}^l)).$$

Вершин, принадлежащих множеству $V(\tilde{X}_{i+1}^l)$ и являющихся концами ребер из E , не более двух. Обозначим их v_1 и v_2 (вообще говоря, эти вершины могут совпадать). Если

$$v_1, v_2 \in V(\tilde{X}_{i+1}^l) \setminus (V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\tilde{x}_{i+1}^l\}),$$

то мы приходим к противоречию либо с (k, i, r) -свойством графов $\tilde{X}_i^1, \dots, \tilde{X}_i^r$, либо с (k, i, r) -свойством графов $\tilde{Y}_i^1, \dots, \tilde{Y}_i^r$. Если же хотя бы одна из вершин v_1, v_2 не принадлежит множеству

$$V(\tilde{X}_{i+1}^l) \setminus (V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\tilde{x}_{i+1}^l\}),$$

то в графе W найдется подграф W_1 , множество вершин которого содержит

$$V(\tilde{X}_{i+1}^l) \setminus (V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\tilde{x}_{i+1}^l\})$$

и который является 2^{k-i} -расширением графа

$$W|_{V(\tilde{X}_{i+1}^l) \setminus (V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\tilde{x}_{i+1}^l\})}$$

первого или второго типа. Мы снова приходим к противоречию либо с (k, i, r) -свойством графов $\tilde{X}_i^1, \dots, \tilde{X}_i^r$, либо с (k, i, r) -свойством графов $\tilde{Y}_i^1, \dots, \tilde{Y}_i^r$.

Последнее утверждение выполнено, так как количество добавленных вершин не превосходит $2^{k-1-i} \leq [1/(\rho - 1)] + 1$.

Если $i = k - 1$, то в обоих случаях $\varphi_k: \tilde{X}_k^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_k^r \rightarrow \tilde{Y}_k^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_k^r$ — изоморфизм и $\varphi_k(x_k^j) = y_k^j$ при всех $j \in \{1, \dots, k\}$, а стало быть, графы $X_k|_{\{x_k^1, \dots, x_k^k\}}$, $Y_k|_{\{y_k^1, \dots, y_k^k\}}$ также изоморфны и Консерватор побеждает.

3. Пусть, наконец,

$$d_{X_{i+1}}(x_{i+1}^{i+1}, \tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r) > 2^{k-1-i}.$$

Найдем подграф в X_{i+1} , содержащий наибольшее количество вершин, одна из которых совпадает с x_{i+1}^{i+1} , и изоморфный некоторому графу из множеств

ва $\mathcal{H}_{2k-1-i}$. Обозначим полученный граф $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$. В силу свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$ -разреженности графа X_{i+1} он содержит не более одного простого цикла.

Рассмотрим пару (H_1, H_2) , где граф H_1 является цепью длины $[1/(\rho-1)] + 1$, объединенной с графом, изоморфным $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$ (вершина x_{i+1}^{i+1} при соответствующем изоморфизме переходит в некоторую вершину h). Граф H_2 содержит лишь одну вершину, которая является концевой вершиной рассмотренной цепи, отличной от h . Рассмотрим, кроме того, множество $\mathcal{K}$ всех попарно неизоморфных пар (K_1, K_2) , для каждой из которых найдется такой граф K , что $K \cap K_1 = K_2$, граф $K \cup K_1$ является 2^{k-1-i} -расширением графа K первого или второго типа. В силу $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$ -разреженности графа Y_{i+1} найдутся такие вершины

$$y_{i+1}^{i+1} \in V(Y_{i+1}) \setminus V(\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r), \quad \tilde{y}_{i+1}^l \in V(\tilde{Y}_{i+1}^l)$$

для некоторого $l \in \{1, \dots, r\}$, такая цепь $c_{Y_{i+1}} \subset Y_{i+1}$ длины $[1/(\rho-1)] + 1$, соединяющая вершины $\tilde{y}_{i+1}^l$ и y_{i+1}^{i+1} , а также такой граф $\tilde{Y}_{i+1}^{r+1} \subset Y_{i+1}$, изоморфный $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$, что

$$d_{Y_{i+1}}(y_{i+1}^{i+1}, \tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r) = \left\lfloor \frac{1}{\rho-1} \right\rfloor + 1, \quad V(c_{Y_{i+1}}) \cap V(\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}) = \{y_{i+1}^{i+1}\}$$

и пара

$$(c_{Y_{i+1}} \cup \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}, (\{\tilde{y}_{i+1}^l\}, \emptyset))$$

является (K_1, K_2) -максимальным в Y_{i+1} точным (H_1, H_2) -расширением графа $(\{\tilde{y}_{i+1}^l\}, \emptyset)$ для всех $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$.

Продолжим изоморфизм графов φ_{i+1} на вершины из множества $V(\tilde{X}_{i+1}^{r+1})$: $\varphi_{i+1}|_{\tilde{X}_{i+1}^{r+1}}: \tilde{X}_{i+1}^{r+1} \rightarrow \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$, причем $\varphi_{i+1}(x_{i+1}^{i+1}) = y_{i+1}^{i+1}$.

Докажем, что графы $\tilde{X}_{i+1}^1, \dots, \tilde{X}_{i+1}^{r+1}, \tilde{Y}_{i+1}^1, \dots, \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$ обладают свойствами (I), (II) и (III) при $i < k-1$. Свойство (I) выполнено, так как $x_{i+1}^{i+1} \in V(\tilde{X}_{i+1}^{r+1})$, $y_{i+1}^{i+1} \in V(\tilde{Y}_{i+1}^{r+1})$. Из изоморфности пар

$$(c_{Y_{i+1}} \cup \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}, (\{\tilde{y}_{i+1}^l\}, \emptyset)) \quad \text{и} \quad (H_1, H_2)$$

следует изоморфность пар

$$(\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^{r+1}, \tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r) \quad \text{и} \quad (\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}, \tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r)$$

и справедливость свойства (III). Осталось доказать, что графы $\tilde{X}_{i+1}^1, \dots, \tilde{X}_{i+1}^{r+1}$ обладают $(k, i+1, r+1)$ -свойством в X_{i+1} , а графы $\tilde{Y}_{i+1}^1, \dots, \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$ обладают $(k, i+1, r+1)$ -свойством в Y_{i+1} . Пусть $j \in \{1, \dots, r\}$. Предположим, что существует такая вершина $v \in V(\tilde{X}_{i+1}^{r+1})$, отличная от x_{i+1}^{i+1} , что $d_{X_{i+1}}(v, \tilde{X}_{i+1}^j) < 2^{k-1-i}$. Тогда в графе X_{i+1} существует подграф, являющийся 2^{k-i} -расширением графа $\tilde{X}_{i+1}^j$ первого или второго типа. Получили противоречие с (k, i, r) -свойством графов $\tilde{X}_{i+1}^1, \dots, \tilde{X}_{i+1}^r$ в X_{i+1} . Следовательно, $d_{X_{i+1}}(\tilde{X}_{i+1}^j, \tilde{X}_{i+1}^{r+1}) \geq$

2^{k-1-i} . Кроме того,

$$\begin{aligned} d_{Y_{i+1}}(\tilde{Y}_{i+1}^j, \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}) &> d_{Y_{i+1}}(\tilde{Y}_{i+1}^j, y_{i+1}^{i+1}) - |V(\tilde{Y}_{i+1}^{r+1})| \\ &\geq \left\lfloor \frac{1}{\rho-1} \right\rfloor + 1 - 2^{k-1-i} > 2^{k-1} - 2^{k-1-i} \geq 2^{k-2} \geq 2^{k-1-i}. \end{aligned}$$

Граф $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$ (граф $\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$) не имеет общих вершин с графом $\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{i+1}^r$ (графом $\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r$) по построению. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |V(W_1 \cup \dots \cup W_{r+1})| &= |V(W_1 \cup \dots \cup W_r)| + |V(W_{r+1})| \\ &\leq \eta(\rho) + (i-1) \left(\left\lfloor \frac{1}{\rho-1} \right\rfloor + 1 \right) + 2^{k-1-i} \\ &< \eta(\rho) + i \left(\left\lfloor \frac{1}{\rho-1} \right\rfloor + 1 \right), \end{aligned}$$

где либо $W_j = \tilde{X}_{i+1}^j$ для всех $j \in \{1, \dots, r+1\}$, либо $W_j = \tilde{Y}_{i+1}^j$ для всех $j \in \{1, \dots, r+1\}$. Докажем, наконец, что в графе X_{i+1} (в графе Y_{i+1}) не найдется подграфа, являющегося 2^{k-1-i} -расширением графа $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$ (графа $\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$). В случае графа $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$ достаточно вспомнить, что он содержит наибольшее количество вершин среди всех графов, изоморфных какому-либо графу из $\mathcal{H}_{2^{k-1-i}}$ и содержащих вершину x_{i+1}^{i+1} . Граф Y_{i+1} не содержит графов, являющихся 2^{k-1-i} -расширениями графа $\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$ первого или второго типа, так как граф $\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$ является (K_1, K_2) -максимальным в Y_{i+1} для всех $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$.

Если $i = k-1$, то $\varphi_k: \tilde{X}_k^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_k^{r+1} \rightarrow \tilde{Y}_k^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_k^{r+1}$ — изоморфизм и $\varphi_k(x_k^j) = y_k^j$ при всех $j \in \{1, \dots, k\}$, а стало быть, графы $X_k|_{\{x_k^1, \dots, x_k^k\}}$, $Y_k|_{\{y_k^1, \dots, y_k^k\}}$ также изоморфны и Консерватор побеждает.

Напомним, что $\beta \in (0, \infty) \setminus \mathcal{Q}$ — произвольное число, $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, $\rho = 1/\alpha$. Для завершения доказательства нашей теоремы нам остается убедиться в том, что с вероятностью, стремящейся к 1, случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ является $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$ -разреженным, где числа n_1, n_2, n_3, n_4 определены равенствами (6), (7).

Обратимся сначала к первому свойству в определении $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$ -разреженного графа. Рассмотрим такое множество $\mathcal{G}$ попарно неизоморфных графов, количество вершин которых не превосходит n_1 , а максимальная плотность отлична от ρ , что любой граф G с $v(G) \leq n_1$ и $\rho^{\max}(G) \neq \rho$ изоморфен некоторому графу из $\mathcal{G}$. Пусть $\mathcal{G}_1$ — такое множество попарно неизоморфных графов, количество вершин которых не превосходит n_1 , а максимальная плотность меньше, чем ρ , что любой граф, удовлетворяющий заданным условиям, изоморфен некоторому графу из $\mathcal{G}_1$. Очевидно, что $|\mathcal{G}_1| \leq |\mathcal{G}| < \infty$. Поэтому в соответствии с теоремой 3 справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(\forall G \in \mathcal{G}_1 \ N_G > 0) &= 1, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(\exists G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_1 \ N_G > 0) &= 0. \end{aligned}$$

Свойство 1) доказано.

Пусть $\mathcal{H}$ – множество таких попарно неизоморфных $1/\rho$ -надежных пар (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq n_1$, $v(H_2) \leq n_2$ и мощность $\mathcal{H}$ максимальна. Пусть $\mathcal{K}$ – множество таких попарно неизоморфных $1/\rho$ -жестких пар (K_1, K_2) , что $v(K_1) \leq n_3$, $v(K_2) \leq n_4$ и мощность $\mathcal{K}$ максимальна. В силу теоремы 13 с вероятностью, стремящейся к 1, выполнено

$$\forall \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{v(H_2)} \in V_N \quad \forall (H_1, H_2) \in \mathcal{H} \quad \forall (K_1, K_2) \in \mathcal{K} \\ (N_{(H_1, H_2)}^{(K_1, K_2)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{v(H_2)}) > 0).$$

Тем самым, свойство 2), а вместе с ним и теорема 24 доказаны.

В теореме 22 и теореме 24 утверждается справедливость k -закона нуля или единицы при некоторых рациональных α из $(0, 1)$. Что можно сказать о других значениях α из этого интервала? Справедлив ли закон нуля или единицы на концах интервалов, рассмотренных в этих теоремах? Частично мы ответили на этот вопрос в работах [60], [62], [63].

ТЕОРЕМА 25. Пусть $k \geq 3$ – произвольное натуральное число. Случайный граф $G(N, N^{-1/(k-2)})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы. Пусть теперь $k > 3$ и $\tilde{\mathcal{Q}}$ – множество натуральных чисел, не превосходящих $2^{k-1} - 2$. Случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы, если $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, $\beta \in \tilde{\mathcal{Q}}$. Если же $\alpha \in \{1 - 1/(2^{k-1} - 1), 1 - 1/2^k\}$, то случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения громоздкое и довольно техническое, поэтому мы рассмотрим только случай $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, где β – некоторое число из $\tilde{\mathcal{Q}}$.

Для доказательства мы рассмотрим два графа A и B , а также свойство L_1 , которым обладает граф A , и свойство L_2 , которым обладает граф B . Мы докажем, что у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(A, B, k)$, а затем установим, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ с вероятностью, стремящейся к некоторому положительному числу, обладает свойствами L_1 и L_2 . Тем самым в силу теоремы 21 утверждение будет доказано.

Итак, пусть $k > 3$ – некоторое натуральное число, $\beta \in \tilde{\mathcal{Q}}$, $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$. Положим

$$\rho = \frac{1}{\alpha} = \frac{2^{k-1} + \beta}{2^{k-1} + \beta - 1}.$$

Пусть β – нечетное число. Тогда рассмотрим граф X , равный объединению двух простых циклов C_1 , C_2 , имеющих ровно одну общую вершину, причем

$$v(C_1) + v(C_2) = 2^{k-1} + \beta, \quad v(C_1) \leq 2^{k-1} - 1, \\ v(C_2) \leq 2^{k-1} - 2, \quad v(C_1) > v(C_2),$$

графы C_1 и C_2 не имеют общих ребер. Заметим, что $v(C_1)$ и $v(C_2)$ – числа различной четности. Обозначим L_1 свойство графа содержать подграф, изоморфный X . Рассмотрим свойство содержать такую вершину x , что в графе существуют различные $v(C_1)$ -расширение первого типа подграфа $(\{x\}, \emptyset)$

и $v(C_2)$ -расширение первого типа того же подграфа. Обозначим отрицание этого свойства L_2 . Пусть граф A обладает свойством L_1 , а граф B обладает свойством L_2 . В первом раунде Новатор выбирает такую вершину x_1 графа A , что x_1 является вершиной некоторого подграфа $A_1 \cup A_2$ в A , изоморфного X , причем $A_1 \cong C_1$, $A_2 \cong C_2$, $V(A_1) \cap V(A_2) = \{x_1\}$.

Пусть теперь β – четное число. Рассмотрим граф X , равный объединению двух простых непересекающихся по вершинам циклов C_1 , C_2 , а также цепи D длины 1, соединяющей некоторые вершины $c_1 \in V(C_1)$, $c_2 \in V(C_2)$, причем

$$\begin{aligned} v(C_1) + v(C_2) &= 2^{k-1} + \beta - 1, & v(C_1) &\leq 2^{k-1} - 1, \\ v(C_2) &\leq 2^{k-1} - 2, & v(C_1) &> v(C_2). \end{aligned}$$

Снова заметим, что $v(C_1)$ и $v(C_2)$ – числа различной четности. Обозначим L_1 свойство графа содержать подграф, изоморфный X . Рассмотрим свойство содержать такую вершину x , что в графе существуют различные $v(C_1)$ -расширение первого типа подграфа $(\{x\}, \emptyset)$ и $(v(C_2) + 1)$ -расширение первого типа того же подграфа. Обозначим отрицание этого свойства L_2 . Пусть граф A обладает свойством L_1 , а граф B обладает свойством L_2 . В первом раунде Новатор выбирает такую вершину x_1 графа A , что x_1 является вершиной некоторого подграфа $A_1 \cup A_2$ в A , изоморфного X , причем $A_1 \cong C_1$, $A_2 \cong C_2 \cup D$, $V(A_1) \cap V(A_2) = \{x_1\}$.

Консерватор выбирает некоторую вершину $y_1 \in V(B)$. Очевидно, что в графе A найдутся такие вершины x_2^1, x_2^2 , что граф A_1 является объединением двух цепей K_A^1, T_A^1 различной длины, соединяющих вершины x_1 и x_2^1 , а граф A_2 является объединением двух цепей K_A^2, T_A^2 различной длины, соединяющих вершины x_1 и x_2^2 . Заметим, что $v(K_A^1) + v(T_A^1)$ и $v(K_A^2) + v(T_A^2)$ – числа разной четности. Пусть в графе B существует вершина y , соединенная с y_1 различными цепями K_B^1, T_B^1 , при этом, скажем, $v(K_B^1) = v(K_A^1)$, $v(T_B^1) = v(T_A^1)$. Тогда, очевидно, для любой другой вершины, для которой существуют две такие различные цепи K_B^2, T_B^2 , соединяющие ее с y_1 , что $v(K_B^2) \leq v(K_A^2)$, $v(T_B^2) \leq v(T_A^2)$, числа $v(K_B^1) + v(T_B^1)$ и $v(K_B^2) + v(T_B^2)$ должны иметь одинаковую четность. Следовательно, в графе B не найдется вершины y , соединенной с y_1 такими различными цепями K_B^2, T_B^2 , что $v(K_B^2) = v(K_A^2)$, $v(T_B^2) = v(T_A^2)$. Тогда во втором раунде Новатор выберет вершину $x_2 = x_2^2$. Консерватор во втором раунде выбирает некоторую вершину $y_2 \in V(B)$. Пусть, например, не нашлось цепи длины $v(K_A^2) - 1$, соединяющей y_1 с y_2 в графе B . Положим $S_1 = K_A^2$. Пусть сыграно i раундов, $i \geq 2$. Пусть, кроме того, выбраны вершины $x_1, \dots, x_i \in V(A)$, $y_1, \dots, y_i \in V(B)$, а также такая цепь S_{i-1} , соединяющая вершину x_i с некоторой вершиной $x_{j(i)}$, $j(i) \leq i - 1$, в графе A , что в графе B не найдется цепи такой же длины, соединяющей вершины y_i и $y_{j(i)}$. Новатор в $(i + 1)$ -м раунде выбирает такую вершину x_{i+1} , принадлежащую цепи S_{i-1} , что величина

$$|d_{S_{i-1}}(x_i, x_{i+1}) - d_{S_{i-1}}(x_{j(i)}, x_{i+1})|$$

минимальна. Консерватор выбирает некоторую вершину $y_{i+1} \in V(B)$. Заметим, что в графе B не найдется двух цепей, из которых одна имеет длину

$d_{S_{i-1}}(x_{j(i)}, x_{i+1})$ и соединяет $y_{j(i)}$ с y_{i+1} , а вторая имеет длину $d_{S_{i-1}}(x_i, x_{i+1})$ и соединяет y_i с y_{i+1} . Пусть, например, не нашлось цепи, соединяющей $y_{j(i)}$ с y_{i+1} . Обозначим S_i цепь, являющуюся подграфом в S_{i-1} и соединяющую $x_{j(i)}$ с x_{i+1} . Так как $\max\{v(C_1), v(C_2)\} \leq 2^{k-1}$, то в одном из раундов с номером $r \in \{3, \dots, k\}$ Новатор выберет такую вершину x_r , что она будет соединена ребрами как с вершиной x_{r-1} , так и с некоторой вершиной $x_{j(r)}$, $j(r) < r - 1$. В графе B вершины, соединенной и с y_{r-1} , и с $y_{j(r)}$, не найдется. Поэтому Новатор победит.

Докажем теперь, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ с вероятностью, стремящейся к некоторому положительному числу, обладает свойствами L_1 и L_2 . Граф X строго сбалансированный, а его плотность равна ρ . Поэтому в силу теоремы 4 вероятность того, что случайный граф обладает свойством L_1 , стремится к $1 - e^{-1/a(X)}$. Для завершения доказательства осталось установить справедливость следующего соотношения: $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha}}(\bar{L}_2) \in (0, 1)$. Легко заметить, что свойство $\bar{L}_2$ выполнено тогда и только тогда, когда граф содержит подграф, выбранный из некоторого конечного множества, причем плотность графов из этого множества не меньше, чем ρ (а плотность некоторых равна ρ). В соответствии с теоремой о совместном распределении чисел подграфов в случайном графе (см. [10; гл. III, замечание 3.20]) с вероятностью, стремящейся к некоторому числу из интервала $(0, 1)$, случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ содержит хотя бы один подграф из упомянутого множества. Тем самым, теорема доказана.

Будем говорить, что рациональное число $\alpha \in (0, 1)$ является k -критической точкой, если случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы. Из теорем 22, 24 и 25 следует, что наименьший элемент в множестве k -критических точек, которое мы обозначим S_k , равен $1/(k-2)$, а наибольший — $1 - 1/(2^{k-1} - 2)$. Известно, кроме того, что множество k -критических точек является бесконечным при достаточно больших k . Это следует из утверждения, которое мы приводим ниже.

Пусть G — произвольный граф, а x_1, x_2, x_3 — его вершины. Количество вершин, соединенных ребрами в графе G с каждой из вершин x_1, x_2, x_3 , обозначим $N_G(x_1, x_2, x_3)$. Рассмотрим свойство L , выражаемое формулой второго порядка, определенное следующим образом. Граф G обладает свойством L тогда и только тогда, когда число $\max_{x_1, x_2, x_3 \in V(G)} N_G(x_1, x_2, x_3)$ четно (максимум берется по всем тройкам вершин, элементы которых попарно различны).

ЛЕММА 4 (Дж. Спенсер, 1990, [64]). Пусть $\delta > 0$ — произвольное число, $\alpha = 1/3 + \delta$, $p = N^{-\alpha}$. Тогда существует такое свойство первого порядка $\tilde{L}$, что $P_{N, p}(\tilde{L} \triangle L) \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$.

Докажем, что из этой леммы следует бесконечность множества k -критических точек при достаточно больших k . Пусть k — кванторная глубина формулы, выражающей свойство $\tilde{L}$, существование которого утверждает лемма. Для доказательства того, что $|S_k| = \infty$, достаточно доказать, что существует бесконечно много таких рациональных $\delta \in (0, 2/3)$, что случайный граф $G(N, N^{-1/3-\delta})$ обладает свойством L с асимптотической вероятностью, отличной от 0 и 1.

Рассмотрим последовательность $\delta_n = 1/(2n)$. Докажем, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ случайный граф $G(N, N^{-1/3-\delta_n})$ обладает свойством L с асимптотической вероятностью, отличной от 0 и 1. Легко доказать, что для любого $m \in \mathbb{N}$ полный двудольный граф $K_{3,m}$ является строго сбалансированным. Из теоремы 4 следует, что случайный граф $G(N, N^{-1/3-\delta_n})$ содержит $K_{3,2n}$ с вероятностью, стремящейся к некоторому числу τ , отличному от 0 и 1. Более того, из теоремы 2 следует, что случайный граф $G(N, N^{-1/3-\delta_n})$ содержит $K_{3,2n-1}$ и не содержит $K_{3,2n+1}$ с вероятностью, стремящейся к 1. Следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-1/3-\delta_n}}(L) = \tau \in (0, 1),$$

что завершает доказательство бесконечности множества S_k .

Обратимся теперь к объекту, который в определенном смысле является более естественным, чем множество k -критических точек. Такой объект (мы обозначим его $\tilde{S}_k$) был в 1988 г. рассмотрен Дж. Спенсером и С. Шела в [50] и назван спектром. *Спектр* – это множество всех рациональных $\alpha \in (0, 1)$, которые не обладают следующим свойством. Для любого свойства первого порядка L , выражаемого формулой, кванторная глубина которой ограничена числом k , существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что либо для любого $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ выполнено равенство $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha+\varepsilon}}(L) = 0$, либо для любого $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ выполнено равенство $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha+\varepsilon}}(L) = 1$.

Рассмотрение такого множества мотивировано существованием монотонных свойств первого порядка, пороговые функции которых имеют вид $N^{-\alpha+o(1)}$, где $\alpha \in (0, 1)$ – рациональное число. В этой связи при достаточно больших k и при некоторых рациональных α выполнен k -закон нуля или единицы для случайного графа $G(N, N^{-\alpha})$, тогда как случайный граф $G(N, N^{-\alpha+o(1)})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы. Поэтому естественно находить асимптотические вероятности выполнения свойств первого порядка не только в самой точке, но и в некоторой ее малой окрестности.

Очевидно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $S_k \subseteq \tilde{S}_k$. Кроме того, при достаточно больших k эти множества различны. Следовательно, множество $\tilde{S}_k$ также является бесконечным. Но совпадают ли наименьшие и наибольшие элементы этих множеств? Частичный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 26. *Выполнено равенство $\tilde{S}_3 = \{1/2, 2/3\}$. Если $k > 3$, то три наименьших элемента спектра $\tilde{S}_k$ равны*

$$\frac{1}{k-1}, \quad \frac{2}{2k-3}, \quad \frac{1}{k-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что при любом $k \geq 3$ числа $1/(k-1)$, $2/(2k-3)$ принадлежат $\tilde{S}_k$. Рассмотрим два свойства L_1, L_2 , которые выражаются с помощью двух формул первого порядка

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k ((x_k \sim x_1) \wedge \dots \wedge (x_k \sim x_{k-1})), \\ \phi_2 &= \forall x_1 \dots \forall x_{k-2} \exists x_{k-1} \exists x_k ((x_{k-1} \sim x_1) \wedge \dots \wedge (x_{k-1} \sim x_{k-2}) \\ &\quad \wedge (x_k \sim x_1) \wedge \dots \wedge (x_k \sim x_{k-2}) \wedge (x_{k-1} \sim x_k)). \end{aligned}$$

Рассмотрим, кроме того, две пары графов (G_1, H_1) , (G_2, H_2) , где $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$, G_1 и G_2 – полные графы на k вершинах, H_1 – полный граф на $k-1$ вершинах, H_2 – полный граф на $k-2$ вершинах. Тогда при любых $\alpha < 1/(k-1)$ пара (G_1, H_1) является α -надежной, при любых $\alpha \in (1/(k-1), 2/(2k-3))$ пара (G_1, H_1) является α -жесткой, а пара (G_2, H_2) – α -надежной, при любых $\alpha > 2/(2k-3)$ пара (G_2, H_2) является α -жесткой. Очевидно, что граф обладает свойством L_1 тогда и только тогда, когда любой его подграф на $k-1$ вершине обладает (G_1, H_1) -расширением. Граф обладает свойством L_2 тогда и только тогда, когда любой его подграф на $k-2$ вершинах обладает (G_2, H_2) -расширением. В силу теоремы 13 при любых $\alpha < 1/(k-1)$ выполнено $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha}}(L_1) = 1$, при любых $\alpha \in (1/(k-1), 2/(2k-3))$ выполнено $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha}}(L_1) = 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha}}(L_2) = 1$, при любых $\alpha > 2/(2k-3)$ выполнено $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha}}(L_2) = 0$. Следовательно, $1/(k-1), 2/(2k-3) \in \tilde{S}_k$. Так как при $k \geq 3$ выполнено $1/(k-2) \in S_k$, то и $1/(k-2) \in \tilde{S}_k$. Осталось доказать, что среди элементов множества $(0, 1/(k-1)) \cup (1/(k-1), 2/(2k-3)) \cup (2/(2k-3), 1/(k-2))$ нет элементов множества $\tilde{S}_k$. Для этого докажем критерий принадлежности числа спектру.

ЛЕММА 5. Число $\alpha \in (0, 1)$ не принадлежит спектру $\tilde{S}_k$ тогда и только тогда, когда существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любых (не обязательно различных) $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G(N, N^{-\alpha_1}), G(M, M^{-\alpha_2}), k)$ при $N, M \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\alpha \notin \tilde{S}_k$. Тогда для любого свойства первого порядка L , выраженного формулой, кванторная глубина которой ограничена числом k , существует такое число $\varepsilon(L) > 0$, что либо для любого $\alpha_0 \in (\alpha - \varepsilon(L), \alpha + \varepsilon(L))$ выполнено равенство $P_{N, N^{-\alpha_0}}(L) = 0$, либо для любого $\alpha_0 \in (\alpha - \varepsilon(L), \alpha + \varepsilon(L))$ выполнено равенство $P_{N, N^{-\alpha_0}}(L) = 1$. Обозначим $\mathcal{L}_k$ класс всех свойств первого порядка, выражаемых с помощью формул, кванторная глубина которых ограничена числом k . Положим $\varepsilon = \min_{L \in \mathcal{L}_k} \varepsilon(L)$. Тогда для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ и для любого $L \in \mathcal{L}_k$ выполнено

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha_1}}(L) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha_2}}(L) \in \{0, 1\}.$$

Следовательно, случайный граф $G(N, p)$, где $p = N^{-\alpha_1}$, если N – четно, и $p = N^{-\alpha_2}$, если N – нечетно, подчиняется k -закону нуля или единицы. Тогда по теореме 21 с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G(N, N^{-\alpha_1}), G(M, M^{-\alpha_2}), k)$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ – такое число, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G(N, N^{-\alpha_1}), G(M, M^{-\alpha_2}), k)$ при $N, M \rightarrow \infty$. Пусть, кроме того, L – произвольное свойство первого порядка. Рассмотрим случайный граф $G(N, p)$, где $p = N^{-\alpha_1}$, если N – четно, и $p = N^{-\alpha_2}$, если N – нечетно. Так как вероятности того, что у Консерватора есть выигрышные стратегии в играх $\text{EHR}(G(N, N^{-\alpha_1}), G(M, M^{-\alpha_2}), k)$, $\text{EHR}(G(N, N^{-\alpha_1}), G(M, M^{-\alpha_1}), k)$,

$\text{EHR}(G(N, N^{-\alpha_2}), G(M, M^{-\alpha_2}), k)$, стремятся к 1 при $N, M \rightarrow \infty$, то стремится к 1 и вероятность того, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k)$. Поэтому в силу теоремы 21 случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы. Следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha_1}}(L) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, N^{-\alpha_2}}(L) \in \{0, 1\}.$$

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы достаточно рассмотреть произвольное $\alpha \in (0, 1/(k-1)) \cup (1/(k-1), 2/(2k-3)) \cup (2/(2k-3), 1/(k-2))$ и такое $\varepsilon > 0$, что

$$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset \left(0, \frac{1}{k-1}\right) \cup \left(\frac{1}{k-1}, \frac{2}{2k-3}\right) \cup \left(\frac{2}{2k-3}, \frac{1}{k-2}\right),$$

после чего, воспользовавшись для произвольных $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ рассуждениями из теоремы 22, доказать, что у Консерватора с вероятностью, стремящейся к 1, есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(G(N, N^{-\alpha_1}), G(N, N^{-\alpha_2}), k)$.

8. Дистанционные графы

В этом разделе мы сделаем обзор законов нуля или единицы для свойств первого порядка случайных дистанционных графов, определение которых дано в разделе 2. Далее будем считать, что функция $p = p(N)$, где N – количество вершин дистанционного графа, удовлетворяет условию (1).

В работах [35]–[39] были изучены законы нуля или единицы для случайных дистанционных графов, вершины которых являются векторами из $\{0, 1\}^n$ с одинаковым количеством нулевых и единичных координат (в наших обозначениях $M = \{0, 1\}$, $a_0(n) = n/2$, $a_1(n) = n/2$, $c(n) = n/4$). Оказалось (см., например, [39]), что закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов не выполнен. Однако в [35] были найдены подпоследовательности в рассматриваемой последовательности случайных дистанционных графов, подчиняющиеся закону нуля или единицы. Кроме того, в статье [38] были исследованы законы нуля или единицы для случайных дистанционных графов для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной. Затем С.Н. Попова в [40] рассмотрела более общую модель – случайные дистанционные графы с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ (т.е. $M = \{-1, 0, 1\}$), зависящие от набора параметров $a_{-1}(n)$, $a_0(n)$, $a_1(n)$ и $c(n)$. Общий случай случайного дистанционного графа с вершинами в $\mathbb{Z}^n$ был рассмотрен С.Н. Поповой в [65]. В этой работе были получены условия, при которых последовательность случайных графов $\{\mathcal{G}(G_{n_i}^M, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ (см. раздел 2) подчиняется закону нуля или единицы, а также условия, при которых из упомянутой последовательности можно выделить подпоследовательность, подчиняющуюся этому закону. Прежде чем перейти к формулировкам и доказательствам этих результатов, мы мотивируем задачу, доказав, что в простейшем случае $M = \{0, 1\}$, $a_0(n) = \alpha n$, $a_1(n) = (1 - \alpha)n$,

$c(n) = \alpha^2 n$, где α – фиксированное рациональное число из $(0, 1)$, случайный дистанционный граф не подчиняется закону нуля или единицы.

Для доказательств отрицательных и положительных результатов нам потребуются два вспомогательных утверждения. Пусть M – произвольное конечное множество целых чисел, содержащее нуль, $\{\mathcal{G}(G_{n_i}^M, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ – последовательность случайных дистанционных графов. Введем вспомогательную величину $\Phi(n)$, выражаемую через параметры $a_m(n)$ и используемую в формулировках теорем:

$$\Phi(n) = \sum_{m \in M} m a_m(n). \quad (8)$$

Заметим, что величина $\Phi(n)$ равна сумме всех координат произвольного вектора, являющегося вершиной дистанционного графа G_n^M . Для любого $t \in \mathbb{N}$ обозначим L_t свойство графов для любых t вершин содержать их общего соседа. Более того, скажем, что последовательность графов $\{G_{n_i}^M\}_{i \in \mathbb{N}}$ обладает *свойством $\tilde{L}_t$* , если существуют такие число $\beta > 0$ и функция $\varphi(n, t) = \Omega(|V_n^M|^\beta)$, что для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t \in V_n^M$ в графе G_n^M есть не менее $\varphi(n, t)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$, при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (С. Н. Попова, 2013, [40]). *Пусть при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнены равенства*

$$\Phi(n) = 0, \quad c(n) = 0$$

и $a_0(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда последовательность $\{G_{n_i}^M\}_{i \in \mathbb{N}}$ обладает свойством $\tilde{L}_t$ при каждом $t \in \mathbb{N}$.

Прежде чем сформулировать второе утверждение, введем несколько обозначений. Обозначим $\mathcal{M}_{l \times h}$ множество всех матриц, элементы которых принадлежат множеству M , размера $l \times h$ и ранга l . Пусть Δ_l – максимальный среди определителей всех матриц из $\mathcal{M}_{l \times l}$, D_l – наименьшее натуральное число, делящееся на все натуральные числа, не превосходящие Δ_l , т. е. $D_l = \text{НОК}(\Delta_l, \Delta_l - 1, \dots, 1)$. Введем множество $M_+ = \{m \in M : m > 0\}$ и обозначим η наименьшее натуральное число, делящееся на все числа из множества M_+ , т. е. $\eta = \text{НОК}\{m : m \in M_+\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (С. Н. Попова, 2014, [65]). *Пусть при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнены равенства*

$$\Phi(n) = \alpha n, \quad c(n) = \alpha^2 n,$$

где $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ – фиксированное число, и $a_0(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть $t \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{G_{n_{i_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ такова, что числа $\Phi(n_{i_j})$ и $c(n_{i_j})$ делятся на $\eta \cdot D_{t+1}$ при достаточно больших $j \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\{G_{n_{i_j}}^M\}_{j \in \mathbb{N}}$ обладает свойством $\tilde{L}_t$.

Доказательства утверждений нетривиальны и техничны, поэтому в настоящем обзоре мы их не приводим.

Вернемся к обещанной мотивировке. Пусть

$$M = \{0, 1\}, \quad a_0(n) = \alpha n, \quad a_1(n) = (1 - \alpha)n, \quad c(n) = \alpha^2 n,$$

где α – фиксированное рациональное число из $(0, 1)$. Докажем, что случайный дистанционный граф $\mathcal{G}(G_n^M, p)$ не подчиняется закону нуля или единицы. Этот результат является обобщением построенного в [35] примера существования свойства первого порядка, пределы вероятности которого различны для различных подпоследовательностей случайных дистанционных графов в случае $\alpha = 1/2$. Пусть $\alpha = s/q$ – несократимая дробь и $q > 2$ (случай $q = 2$ был разобран в [35]). Пусть, кроме того, n не делится на q^3 . Пусть, например, $q < 2s$ (в противном случае пример строится аналогичным образом). Рассмотрим вершины $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{q^2+q-1} \in V_n^M$, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \mathbf{x}_2 &= (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_{q^2-q+1} &= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}), \\ \mathbf{x}_{q^2-q+2} &= (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_{q^2} &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{1}), \\ \mathbf{x}_{q^2+1} &= (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \mathbf{x}_{q^2+2} &= (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_{q^2+q-1} &= (\underbrace{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_q, \underbrace{\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}}_{q^2-q+1}, \underbrace{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}}_{2qs-q^2}, \underbrace{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}}_{q-1}, \underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{q^2-q+1}). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$ – векторы, составленные из n/q^2 единиц и n/q^2 нулей соответственно. Предположим, что существует вершина $\mathbf{x}_{q^2+q}$ в V_n^M , соединенная ребрами с каждой из $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{q^2+q-1}$. Обозначим x_1 количество единиц в векторе $\mathbf{x}_{q^2+q}$ среди первых n/q^2 координат, x_2 – среди следующих n/q^2 координат, и т. д. (получим q^2 чисел $x_1, \dots, x_{q^2}$). Тогда вектор $(x_1, \dots, x_{q^2})$ является решением системы

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_{sq} &= \alpha^2 n, \\ x_2 + \dots + x_{sq+1} &= \alpha^2 n, \\ &\dots \\ x_{(q^2-sq)+1} + \dots + x_{q^2} &= \alpha^2 n, \\ x_1 + x_{(q^2-sq)+2} + \dots + x_{q^2} &= \alpha^2 n, \\ &\dots \\ x_1 + \dots + x_{sq-1} + x_{q^2} &= \alpha^2 n, \\ x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_{sq} + x_{sq+1} &= \alpha^2 n, \\ x_1 + x_4 + x_5 + \dots + x_{sq+1} + x_{sq+2} &= \alpha^2 n, \\ &\dots \\ x_1 + x_{q+1} + x_{q+2} + \dots + x_{sq+q-2} + x_{sq+q-1} &= \alpha^2 n. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что при любых значениях параметров $a_m(n)$, $m \in M$, и $c(n)$ и при любом $\mu \in \mathbb{Z}$ граф G_n^M изоморфен графу $G_n^{M-\mu}$, задаваемому параметрами

$$\tilde{a}_l(n) = a_{l+\mu}(n), \quad l \in M - \mu, \quad \text{и} \quad \tilde{c}(n) = c(n) - 2\mu\Phi(n) + \mu^2n,$$

где $M - \mu = \{m - \mu : m \in M\}$. Определим отображение $\varphi : V(G_n^M) \rightarrow V(G_n^{M-\mu})$ следующим образом:

$$\varphi((v^1, \dots, v^n)) = (v^1 - \mu, \dots, v^n - \mu).$$

Тогда

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 2\mu \sum_{i=1}^n v^i + \mu^2 n = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 2\mu\Phi(n) + \mu^2 n.$$

Поэтому

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in E(G_n^M) \Leftrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c \Leftrightarrow \langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \tilde{c} \Leftrightarrow \{\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})\} \in E(G_n^{M-\mu}).$$

Следовательно, φ – изоморфизм графов G_n^M и $G_n^{M-\mu}$.

Перейдем теперь к рассмотрению графа G_n^M с параметрами, удовлетворяющими условиям $\Phi(n) = \tilde{m} \cdot n$, $c(n) = \tilde{m}^2 \cdot n$ при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $a_{\tilde{m}}(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Выбрав в качестве μ число $\tilde{m}$, получим, что такой граф G_n^M изоморфен графу $G_n^{M-\mu}$, для которого $\Phi(n) = 0$, $c(n) = 0$ при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $a_0(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Докажем, что для каждого $t \in \mathbb{N}$ случайный граф $\mathcal{G}(G_n^M, p)$, $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, обладает свойством полного расширения уровня t с асимптотической вероятностью 1. Пусть E_t – событие, состоящее в том, что случайный граф $\mathcal{G}(G_n^M, p)$, $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, не обладает свойством полного расширения уровня t . Для различных вершин $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in V_n^M$ введем событие $F_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l}$, состоящее в том, что в случайном графе $\mathcal{G}(G_n^M, p)$ не найдется вершины, соединенной ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ и не соединенной ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$. Заметим, что

$$E_t = \bigcup_{\substack{k, l \in \mathbb{Z}_+ \\ k+l \leq t}} \bigcup_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in V_n^M} F_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l}.$$

Из утверждения 1 следует, что существуют такое $\beta = \beta(t) > 0$ и такая функция $\varphi(n, t) = \Omega(|V_n^M|^\beta)$, что для любых вершин $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in V_n^M$, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $k + l \leq t$, в графе G_n^M есть не менее $\varphi(n, t)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$. Тогда

$$P_{G_n^M, p}(F_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l}) \leq (1 - \varepsilon(n)^t)^{\Omega(|V_n^M|^\beta)},$$

где

$$\varepsilon(n) = \min\{p(|V_n^M|), 1 - p(|V_n^M|)\}.$$

Поэтому

$$P_{G_{n_i}^M, p}(E_t) \leq t^2 |V_{n_i}^M|^t (1 - \varepsilon(n_i)^t)^{\Omega(|V_{n_i}^M|^\beta)} \leq t^2 |V_{n_i}^M|^t \exp\{-\varepsilon(n_i)^t \Omega(|V_{n_i}^M|^\beta)\}.$$

Последнее выражение стремится к 0 при $i \rightarrow \infty$ в силу условия (1) на функцию p . Следовательно, случайный граф $\mathcal{G}(G_{n_i}^M, p)$ с вероятностью, стремящейся к единице, обладает свойством полного расширения уровня t , и потому последовательность $\{\mathcal{G}(G_{n_i}^M, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы. Теорема доказана.

Сформулируем теперь условия, при которых можно найти подпоследовательность случайных дистанционных графов, подчиняющуюся закону нуля или единицы.

ТЕОРЕМА 28 (С. Н. Попова, 2014, [65]). *Пусть $\tilde{m} \in M$, при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнены равенства*

$$\Phi(n) = (\tilde{m} + \alpha)n, \quad c(n) = (\tilde{m} + \alpha)^2 n,$$

где $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ – фиксированное число, и $a_{\tilde{m}}(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть, кроме того, подпоследовательность $\{n_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ такова, что для любого $d \in \mathbb{N}$ существует такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что при $j > j_0$ числа n_{i_j} делятся на d . Тогда последовательность $\{\mathcal{G}(G_{n_{i_j}}^M, p)\}_{j \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{n_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ – подпоследовательность, удовлетворяющая условию теоремы. Учитывая, что граф G_n^M изоморфен графу $G_n^{\tilde{M}}$, для которого $\Phi(n) = \alpha n$, $c(n) = \alpha^2 n$ при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $a_0(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, и применяя утверждение 2, получаем, что существуют такое $\beta = \beta(t) > 0$ и такая функция $\varphi(n, t) = \Omega(|V_n^M|^\beta)$, что при всех $n \in \{n_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t \in V_n^M$ в графе G_n^M есть не менее $\varphi(n, t)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$. Оценивая вероятность отсутствия свойства полного расширения уровня t таким же образом, как и в доказательстве теоремы 27, заключаем, что последовательность $\{\mathcal{G}(G_{n_{i_j}}^M, p)\}_{j \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы. Теорема доказана.

Вернемся к случайному графу $\mathcal{G}(G_n^{\{0,1\}}, p)$, определенному следующим образом: $a_0(n) = \alpha n$, $a_1(n) = (1 - \alpha)n$, $c(n) = \alpha^2 n$, $\alpha = s/q$ – несократимая дробь, $0 < s < q$. Как уже было замечено выше, он не подчиняется закону нуля или единицы. Тем не менее из теоремы 28 следует, что во всей последовательности рассматриваемых случайных дистанционных графов $\{\mathcal{G}(G_{q^2 i}^{\{0,1\}}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ существует подпоследовательность, подчиняющаяся этому закону.

Список литературы

- [1] В. Л. Гончаров, “О распределении циклов в перестановках”, *Докл. АН СССР*, **35:9** (1942), 299–301.
- [2] T. Szele, “Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban”, *Mat. Fiz. Lapok*, **50** (1943), 223–256.

- [3] P. Erdős, “Graph theory and probability”, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 34–38.
- [4] P. Erdős, A. Rényi, “On random graphs. I”, *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 290–297.
- [5] P. Erdős, A. Rényi, “On the evolution of random graphs”, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61.
- [6] P. Erdős, A. Rényi, “On the evolution of random graphs”, *Bull. Inst. Internat. Statist.*, **38** (1961), 343–347.
- [7] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, 2-е изд., Физматлит, М., 2004, 256 с.; англ. изд.: V. F. Kolchin, *Random graphs*, Encyclopedia Math. Appl., **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, xii+252 pp.
- [8] N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, 3rd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2008, xviii+352 pp.
- [9] B. Bollobás, *Random graphs*, 2nd ed., Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, xviii+498 pp.
- [10] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience, New York, 2000, xii+333 pp.
- [11] А. М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011, 136 с.
- [12] А. М. Райгородский, *Модели интернета*, Интеллект, Долгопрудный, 2013, 64 с.
- [13] L. Lovász, *Large networks and graph limits*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **60**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, xiv+475 pp.
- [14] S. N. Dorogovtsev, *Lectures on complex networks*, Oxf. Master Ser. Phys., **20**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010, x+134 pp.
- [15] M. Penrose, *Random geometric graphs*, Oxford Stud. Probab., **5**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2003, xiv+330 pp.
- [16] M. E. J. Newman, *Networks. An introduction*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010, xii+772 pp.
- [17] B. Bollobás, A. Thomason, “Threshold functions”, *Combinatorica*, **7**:1 (1987), 35–38.
- [18] A. Ruciński, A. Vince, “Balanced graphs and the problem of subgraphs of a random graph”, Proceedings of the Sixteenth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1985), *Congr. Numer.*, **49** (1985), 181–190.
- [19] B. Bollobás, “Threshold functions for small subgraphs”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **90**:2 (1981), 197–206.
- [20] A. Ruciński, A. Vince, “Strongly balanced graphs and random graphs”, *J. Graph Theory*, **10**:2 (1986), 251–264.
- [21] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007, 138 с.
- [22] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1(337) (2001), 107–146; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 103–139.
- [23] А. М. Раigorodskii, “Coloring distance graphs and graphs of diameters”, *Thirty essays on geometric graph theory*, ed. J. Pach, Springer, New York, 2013, 429–460.
- [24] J. Pach, P. K. Agarwal, *Combinatorial geometry*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995, xiv+354 pp.
- [25] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his mathematics*, v. II (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Budapest, 2002, 649–666.

- [26] A. Soifer, *The mathematical coloring book. Mathematics of coloring and the colorful life of its creators*, Springer, New York, 2009, xxx+607 pp.
- [27] V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Dolciani Math. Exp., **11**, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1991, xvi+333 pp.
- [28] A. M. Raigorodskii, “Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters”, *Discrete geometry and algebraic combinatorics*, Contemp. Math., **625**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 93–109.
- [29] P. Frankl, R. M. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.
- [30] J. Kahn, G. Kalai, “A counterexample to Borsuk’s conjecture”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **29**:1 (1993), 60–62.
- [31] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005, xii+499 pp.
- [32] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Связь, М., 1979, 744 с.; пер. с англ.: F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The theory of error-correcting codes. Parts I, II*, North-Holland Mathematical Library, **16**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York–Oxford, 1977, xv+ix+762 pp.
- [33] V. Rödl, “On a packing and covering problem”, *European J. Combin.*, **6**:1 (1985), 69–78.
- [34] L. Bassalygo, G. Cohen, G. Zémor, “Codes with forbidden distances”, Selected topics in discrete mathematics (Warsaw, 1996), *Discrete Math.*, **213**:1-3 (2000), 3–11.
- [35] М. Е. Жуковский, “О последовательности случайных дистанционных графов, подчиняющейся закону нуля или единицы”, *Пробл. передачи информ.*, **47**:3 (2011), 39–57; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “On a sequence of random distance graphs subject to the zero-one law”, *Problems Inform. Transmission*, **47**:3 (2011), 251–268.
- [36] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **55**:2 (2010), 344–349; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “The weak zero-one law for the random distance graphs”, *Theory Probab. Appl.*, **55**:2 (2011), 356–360.
- [37] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов”, *Докл. РАН*, **430**:3 (2010), 314–317; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “Weak zero-one laws for random distance graphs”, *Dokl. Math.*, **81**:1 (2010), 51–54.
- [38] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для последовательностей случайных дистанционных графов”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 95–128; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “A weak zero-one law for sequences of random distance graphs”, *Sb. Math.*, **203**:7 (2012), 1012–1044.
- [39] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон ‘нуля или единицы’ для случайных дистанционных графов”, *Вестн. РУДН*, **2**:1 (2010), 11–25.
- [40] С. Н. Попова, “Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ ”, *Пробл. передачи информ.*, **50**:1 (2014), 64–86; англ. пер.: S. N. Popova, “Zero-one law for random distance graphs with vertices in $\{-1, 0, 1\}^n$ ”, *Problems Inform. Transmission*, **50**:1 (2014), 57–78.
- [41] М. Е. Жуковский, “О вероятности вхождения копии фиксированного графа в случайный дистанционный граф”, *Матем. заметки*, **92**:6 (2012), 844–855; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “On the probability of the occurrence of a copy of a fixed graph in a random distance graph”, *Math. Notes*, **92**:6 (2012), 756–766.

- [42] Л. И. Боголюбский, А. С. Гусев, М. М. Пядеркин, А. М. Райгородский, “Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов”, *Докл. РАН*, **457**:4 (2014), 383–387.
- [43] Л. И. Боголюбский, А. С. Гусев, М. М. Пядеркин, А. М. Райгородский, “Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов некоторых дистанционных графов”, *Матем. сб.* (в печати).
- [44] A. B. Kupavskii, “On random subgraphs of Kneser graph”, *J. Combin. Theory Ser. A* (to appear).
- [45] B. Bollobás, B. P. Narayanan, A. M. Raigorodskii, “On the stability of the Erdős–Ko–Rado theorem”, *J. Combin. Theory Ser. A* (to appear).
- [46] Н. К. Верещагин, А. Шень, *Языки и исчисления*, МЦНМО, М., 2000, 286 с.
- [47] В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско, *Вводный курс математической логики*, Физматлит, М., 2007, 128 с.
- [48] A. Ehrenfeucht, “An application of games to the completeness problem for formalized theories”, *Fund. Math.*, **49** (1960/1961), 121–141.
- [49] J. Spencer, *The strange logic of random graphs*, Algorithms Combin., **22**, Springer-Verlag, Berlin, 2001, x+168 pp.
- [50] S. Shelah, J. Spencer, “Zero-one laws for sparse random graphs”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1988), 97–115.
- [51] Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиогонький, В. А. Таланов, “Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов”, *Кибернетика*, **2** (1969), 17–27.
- [52] R. Fagin, “Probabilities in finite models”, *J. Symbolic Logic*, **41**:1 (1976), 50–58.
- [53] B. Kreuter, “Threshold functions for asymmetric Ramsey properties with respect to vertex colorings”, *Random Structures Algorithms*, **9**:3 (1996), 335–348.
- [54] J. Spencer, “Counting extensions”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **55**:2 (1990), 247–255.
- [55] T. Łuczak, J. Spencer, “When does the zero-one law hold?”, *J. Amer. Math. Soc.*, **4**:3 (1991), 451–468.
- [56] J. F. Lynch, “Probabilities of sentences about very sparse random graphs”, *Random Structures Algorithms*, **3**:1 (1992), 33–53.
- [57] M. McArthur, “The asymptotic behavior of $L_{\infty, \omega}^k$ on sparse random graphs”, *Logic and random structures* (New Brunswick, NJ, 1995), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 53–63.
- [58] Ph. G. Kolaitis, H. J. Prömel, B. L. Rothschild, “ K_{l+1} -free graphs: asymptotic structure and a 0-1 law”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **303**:2 (1987), 637–671.
- [59] R. H. Gilman, Y. Gurevich, A. Miasnikov, “A geometric zero-one law”, 2007, 13 pp., arXiv: 0706.0271.
- [60] M. Zhukovskii, “Zero-one k -law”, *Discrete Math.*, **312**:10 (2012), 1670–1688.
- [61] М. Е. Жуковский, “Оценка количества максимальных расширений в случайном графе”, *Дискрет. матем.*, **24**:1 (2012), 79–107; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “Estimation of the number of maximal extensions in a random graph”, *Discrete Math. Appl.*, **22**:1 (2012), 55–90.
- [62] М. Е. Жуковский, “Расширение k -закона нуля или единицы”, *Докл. РАН*, **454**:1 (2014), 23–26; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “Extension of the zero-one k -law”, *Dokl. Math.*, **89**:1 (2014), 16–19.
- [63] М. Е. Жуковский, “О наибольшей критической точке в k -заcone нуля или единицы”, *Матем. сб.* (в печати).

- [64] J. Spencer, “Infinite spectra in the first order theory of graphs”, *Combinatorica*, **10**:1 (1990), 95–102.
- [65] С. Н. Попова, “Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\mathbb{Z}^n$ ”, *Матем. сб.* (в печати).

Максим Евгеньевич Жуковский

(Maksim E. Zhukovskii)

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: zhukmax@gmail.com

Поступила в редакцию

05.09.2014

Андрей Михайлович Райгородский

(Andrei M. Raigorodskii)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: mraigor@yandex.ru