Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Соловьев, О субдифференциале максимума семейства выпуклых функций,
УМН, 1996, том 51, выпуск 2, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm963>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:12:59

О СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЕ МАКСИМУМА СЕМЕЙСТВА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

В. Н. СОЛОВЬЕВ

Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ – выпуклые функции, определенные на хаусдорфовом локально выпуклом линейном топологическом пространстве X , S – хаусдорфово топологическое пространство, и

$$f(x) := \sup_{s \in S} f_s(x), \quad S(x) := \{s \in S \mid f_s(x) = f(x)\}.$$

Если X^* – множество всех линейных непрерывных функционалов $\langle x^*, x \rangle$ на X , то множество $\partial f(x_0) := \{x^* \in X^* \mid f(x) \geq f(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle, x \in X\}$ называется субдифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 [4]. Обозначим через $\text{dom } f$ множество всех точек $x \in X$, где функция $f(x)$ конечна, и через $N(x_0 \mid \text{dom } f) := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - x_0 \rangle \leq 0, x \in \text{dom } f\}$ – нормальный конус этого множества в точке $x_0 \in \text{dom } f$.

В работе вычислены субдифференциалы функции $f(x)$ без предположения о компактности пространства S .

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены следующие условия:

- (1) многозначное отображение $S(x): \text{dom } f \rightarrow S$ имеет непустые компактные значения и полунепрерывно сверху на любом отрезке в $\text{dom } f$;
- (2) функции $f_s(x)$ полунепрерывны сверху по s на $S \quad \forall x \in \text{dom } f$;
- (3) функции $f_s(x)$, $s \in S$, непрерывны в некоторой точке $x_1 \in \text{int dom } f$.

Тогда при всех $x_0 \in \text{dom } f$

$$(4) \quad \partial f(x_0) = \overline{\bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0) + N(x_0 \mid \text{dom } f)},$$

где замыкание берется в слабой $*$ -топологии пространства X^* .

Формула (4) аналогична известной теореме о субдифференциале максимума выпуклых функций, полученной в [1] для компактного множества индексов S . Для конечного множества индексов S окончательный результат получен в [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ и выполнены условия (1)–(3), а также

- (5) найдется точка $x_1 \in \text{ri dom } f_s$, $s \in S$, $x_1 \in \text{ri dom } f$.

Тогда при всех $x_0 \in \text{dom } f$ имеет место равенство

$$(6) \quad \partial f(x_0) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j^* + x_0^* \mid x_j^* \in \partial f_{s_j}(x_0), s_j \in S(x_0), \alpha_j \geq 0, \right. \\ \left. j = 1, \dots, n+1, x_0^* \in N(x_0 \mid \text{dom } f), \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1 \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функции $f_s(x)$ вогнуты по s на выпуклом множестве $S(x_0)$ при всех $x \in \text{dom } f$ и удовлетворяют условиям теорем 1 или 2. Тогда при $x_0 \in \text{dom } f$ имеет место равенство

$$(7) \quad \partial f(x_0) = \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0) + N(x_0 \mid \text{dom } f).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть S – выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства Y , а функция $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ вознута по s на множестве S при $x \in X$, удовлетворяет условиям (2), (3) и коэрцитивна по s в точке $x_0 \in \text{dom } f$, т.е.

$$(8) \quad \lim f(s, x_0) = -\infty \text{ при } s \in S, s \rightarrow s_0 \notin S, \text{ либо при } s \in S, \|s\| \rightarrow \infty$$

(в условиях (2) и (8) множество S снабжается относительной топологией, индуцируемой на S из Y). Тогда в этой точке справедлива формула (7).

ТЕОРЕМА 4. Пусть множество S относительно компактно в хаусдорфовом топологическом пространстве Y , а функция $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяет условиям (2), (3) и (8) в точке $x_0 \in \text{dom } f$. Тогда в этой точке справедлива формула (4).

Далее S – произвольное множество индексов.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f_s(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, и пусть $\varphi_s(x) := f_s(x)$, $x \in \text{dom } f$, $\varphi_s(x) := +\infty$, иначе. Предположим, что нижняя грань $\inf_{s \in S} \varphi_s^*(x^*)$ достигается всюду, где она конечна, и полунепрерывна снизу на $\mathbb{R}^n$ (как функция переменной x^*). Тогда при всех $x_0 \in \text{dom } f$ имеет место равенство

$$(9) \quad \partial f(x_0) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j^* \mid x_j^* \in \partial \varphi_{s_j}(x_0), s_j \in S(x_0), \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1 \right\}.$$

Условия теоремы 5 выполняются в том случае, когда все функции $f_s(x)$ полунепрерывны сверху по s на компакте S при любом $x \in \text{dom } f$ и имеют общую область определения $\text{dom } f_s = \text{dom } f := M$, $s \in S$. В такой форме (при дополнительных условиях замкнутости множества M и полунепрерывности снизу функций $f_s(x)$, $s \in S$, на этом множестве) формула (9) получена в [2], [3].

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство полунепрерывных снизу выпуклых функций, и пусть множество $S(x)$ не пусто при всех $x \in \text{dom } f$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- a) $\partial f(x) = \bigcup_{s \in S(x)} \partial f_s(x)$ при всех $x \in \text{dom } f$;
- b) множество $S^*(x^*) := \{s \in S \mid f_s^*(x^*) = f^*(x^*)\}$ не пусто при всех $x^* \in \text{dom}(\partial f^*)$;
- c) множество $S(x) \cap S^*(x^*)$ не пусто для всех $x^* \in \partial f(x)$;
- d) если $x^* \in \partial f(x)$, то $x^* \in \partial f_s(x)$ для некоторого $s \in S(x) \cap S^*(x^*)$;
- e) если $x \in \partial f^*(x^*)$, то $x \in \partial f_s^*(x^*)$ для некоторого $s \in S(x) \cap S^*(x^*)$.

В этом случае

$$(10) \quad f^*(x^*) = \min_{s \in S} f_s^*(x^*), \quad x^* \in \text{dom}(\partial f^*).$$

В [5] дан содержательный пример применения равенства (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [2] Левин В. Л. // Матем. сб. 1969. Т. 79. №2. С. 250–263. [3] Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций. М.: Наука, 1985. [4] Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. [5] Соловьев В. Н. // Anal. Math. 1993. V. 19. №4. Р. 297–315. [6] Volle M. // C. R. A. Sci. Paris. 1993. V. 317. Serie I. Р. 845–849. [7] Hiriart-Urruty J.-B., Moussaoui M., Seeger A., Volle M. // Non-linear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1995. V. 24. №12. Р. 1727–1754.