Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Давыдов, А. Ф. Нассар, О стационарном состоянии
в динамике популяции с иерархической конкуренцией,
УМН, 2014, том 69, выпуск 6, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9631>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:24:41

О стационарном состоянии в динамике популяции с иерархической конкуренцией

А. А. Давыдов, А. Ф. Нассар

Мы показываем, что при заданном управлении в динамике структурированной по размеру популяции с иерархической формой конкуренции есть нетривиальное стационарное состояние. Точнее, мы предполагаем, что эта динамика описывается уравнением

$$\frac{\partial x(t, l)}{\partial t} + \frac{\partial [g(l, E(t, l))x(t, l)]}{\partial l} = -(\mu(l, E(t, l)) + u(l))x(t, l), \quad (1)$$

где x – плотность индивидуумов размера l в момент времени t , функции g и μ характеризуют соответственно их рост и смертность при уровне конкуренции E , а управление u – эксплуатацию популяции. Функция конкуренции E задается формулой

$$E(t, l) = \int_l^L \chi(s)x(t, s) ds, \quad (2)$$

где χ – некоторая непрерывная функция, положительная при положительном аргументе, а отрезок $[0, L]$, $L > 0$, – это диапазон размеров, на котором популяция эксплуатируется. В силу формулы конкуренции влияние на развитие индивидуумов данного размера имеют лишь индивидуумы не меньшего размера. Этот факт отличает данную работу от работ [1]–[3], где интеграл берется по всему отрезку $[0, L]$ и уровень конкуренции одинаков для индивидуумов всех размеров. Граничное условие имеет вид

$$x(t, 0) = \int_0^L r(l, E(t, l))x^\beta(t, l) dl + p_0 \quad (3)$$

и отвечает за приток индивидуумов размера $l = 0$: этот приток есть сумма естественного воспроизводства и промышленного возобновления $p_0 = \text{const} \geq 0$. Функция r и показатель β , $\beta \in (0, 1)$, характеризуют репродуктивность биомассы и нелинейную зависимость воспроизводства от плотности соответственно. Модель (1)–(3) аналогична хорошо известным (см., например, [4], [5]). Мы предполагаем, что все функции в ней, за исключением u , непрерывны и удовлетворяют следующим естественным условиям:

- (а) при каждом $l \in [0, L]$ функции g и r не возрастают с увеличением конкуренции E , при этом функция g всюду положительна, а функция r всюду неотрицательна и положительна хотя бы на некотором непустом интервале из отрезка $[0, L]$;
- (б) μ – положительная функция, неубывающая по E при каждом $l \in [0, L]$;
- (с) при $0 \leq l_1 < l_2 \leq L$ отношение $g(l_1, \cdot)/g(l_2, \cdot)$ не возрастает по E .

Условия (а)–(с) отражают неухудшение развития популяции при росте конкуренции и не меньшее влияние ее роста на индивидуумов малых размеров, чем на индивидуумов больших размеров.

Допустимым называется измеримое управление u , удовлетворяющее на $[0, L]$ условию $0 \leq u_1 \leq u \leq u_2$ с некоторыми кусочно непрерывными функциями u_1 и u_2 .

ТЕОРЕМА. *Для любого допустимого управления u существует положительное непрерывное стационарное решение задачи (1)–(3), если в слое $0 \leq l \leq L$ функции g , μ , r удовлетворяют условиям (а)–(с), а функции g , μ – условию Липшица по E .*

Искомое стационарное решение должно быть решением задачи Коши

$$\frac{dz}{dl} = -M(l, E)z, \quad \frac{dE}{dl} = -\tilde{\chi}(l, E)z, \quad z(L) = z_L \geq 0, \quad E(L) = 0, \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-5138.2014.1).

DOI: 10.4213/rm9631

где $z = g(l, E)x$, $M = (\mu + u)/g$, $\tilde{\chi} = \chi/g$, с некоторым значением z_L . В силу непрерывности функций μ , g и их липшицевости по E , непрерывности χ , а также измеримости и ограниченности управления u последняя система уравнений удовлетворяет в слое $0 \leq l \leq L$ теореме существования и единственности решения задачи Коши [6]. Решения задачи (4) являются невозрастающими функциями в силу неположительности правых частей уравнений и поэтому при продолжении влево остаются в области $z \geq 0$, $E \geq 0$. Для двух таких решений (z_1, E_1) и (z_2, E_2) при $0 < z_1(L) < z_2(L)$ верно

$$0 < z_1(L) \leq z_1(l) < z_2(l), \quad 0 \leq E_1(l) \leq E_2(l)$$

всюду на $[0, L]$, где эти решения оба определены, ибо для любого $l \in [0, L]$ правые части уравнений системы – неположительные невозрастающие по z и E функции при $z \geq 0$ и $E \geq 0$. Следовательно, при наличии продолжения такого решения до $l = 0$ получим $E(0) = \phi(z(0))$ с некоторой неубывающей функцией ϕ , $\phi(0) = 0$, непрерывной в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных [6]. На таком решении отношение dE/dz не превосходит максимума m функции χ/μ на отрезке $[0, L]$ при $E = 0$, поскольку управление неотрицательно, а μ – неубывающая функция по E ; поэтому $\phi(z) \leq mz$. Отсюда и из неравенства $z(L) \leq z(0)$ следует, что функция ϕ определена для всех $z \geq 0$. График функции ϕ в исходных переменных есть также график некоторой непрерывной неубывающей функции Φ , $\Phi(0) = 0$, поскольку $x(0) = z(0)/g(0, \phi(z(0)))$, а g – невозрастающая функция E . Осталось показать, что существует решение с начальными данными на графике функции Φ , удовлетворяющее условию (3) (здесь $x_0 = x(0)$):

$$x_0 = \int_0^L r(l, E(l))x^\beta(l) dl + p_0. \quad (5)$$

Правая часть равенства (5) имеет оценку снизу cx_0^β и сверху Cx_0^β при малых и больших $x_0 > 0$ соответственно с некоторыми константами $c > 0$, $C > 0$. Следовательно, поскольку $\beta \in (0, 1)$, при малых $x_0 > 0$ левая часть равенства (5) меньше правой, а при больших – наоборот. Но обе части равенства (5) непрерывно зависят от точки $(x_0, \Phi(x_0))$, $x(0) \geq 0$, поэтому существует $x_0 > 0$, когда они равны, что и означает существование стационарного решения при выбранном управлении и доказывает теорему.

Единственность такого решения – открытая проблема.

Список литературы

- [1] A. A. Davydov, A. S. Platov, *Mosc. Math. J.*, **12**:2 (2012), 269–273. [2] А. А. Давыдов, А. С. Платов, *Тр. ИММ УрО РАН*, **19**:4 (2013), 89–94. [3] А. А. Панеш, А. С. Платов, *Пробл. матем. анализа*, 2012, № 67, 107–112. [4] L. F. Murphy, *J. Theor. Biol.*, **104**:4 (1983), 493–506. [5] A. M. de Roos, *Structured populations models in marine, terrestrial and freshwater systems*, eds. S. Tuljapurkar, H. Caswell, Chapman & Hall, New York, 1997, 119–204. [6] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ЛКИ, 2007, 476 с.

А. А. Давыдов (A. A. Davydov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова;
 International Institute for Applied System Analysis,
 Laxenburg, Austria
E-mail: davydov@vlsu.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
 Принято редколлегией
 12.11.2014

А. Ф. Нассар (A. F. Nassar)
 Владимирский государственный университет
 им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
E-mail: amer6767@mail.ru