Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, О слабых моделях Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 6, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9632>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 18:01:49

О слабых моделях Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах

В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов

Распространенный способ строить примеры многомерных многообразий Фано состоит в том, чтобы представить их как полные пересечения в многообразиях с понятной структурой, например в торических многообразиях или грассманианах. Конструкция Гивенталья (см. [5]) описывает модель Ландау–Гинзбурга (ЛГ) полного пересечения в торическом многообразии как полное пересечение в торе с функцией, которую называют суперпотенциалом. В [1] и [2] аналогичный подход применялся для описания моделей ЛГ для полных пересечений в грассманианах. Метод Гивенталья и Батырева строит по торическому многообразию регулярную функцию на торе, т. е. многочлен Лорана.

Пусть $Y = X \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_l$ – полное пересечение в гладком торическом многообразии X с числом Пикара $\rho(X) = \rho$. Пусть переменные u_i , $1 \leq i \leq N$, соответствуют лучам веера X . Выберем неф-разбиение $E_0, \dots, E_l \subset \{1, \dots, N\}$, соответствующее Y . Пусть R_i – порождающие группы соотношений на лучи веера X , интерпретируемые как мономы от переменных u_i . Зафиксируем параметры q_i , соответствующие симплектической форме на Y . Тогда модель ЛГ Гивенталья – это многообразие

$$\left\{ R_i = q_i, \sum_{s \in E_i} u_s = 1, 1 \leq i \leq \rho, 1 \leq s \leq l \right\}$$

с суперпотенциалом $\sum_{s \in E_0} u_s$. Интеграл Гивенталья для Y – это интеграл

$$I_Y = \int_{|u_i|=\varepsilon_i} \frac{1}{(2\pi i)^N} \frac{du_1}{u_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_N}{x_N} \frac{1}{\prod_{r=1}^{\rho} (R_r - q_r) \cdot \prod_{s=0}^l (1 - \sum_{v \in E_s} u_v)}$$

для некоторых положительных чисел ε_i . Зафиксируем параметры q_i , соответствующие антиканонической форме на Y .

Аналогичным образом в [1] описана модель ЛГ для полного пересечения в грассманиане. Мы приводим формулировки в случае грассманиана плоскостей. Пусть многообразие $Y = G(2, k+2) \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_l$, $\deg Y_i = d_i$, является полным пересечением Фано. Определим следующие многочлены Лорана на $T = \text{Spec } \mathbb{C}[a_{1,1}^{\pm 1}, \dots, a_{k,1}^{\pm 1}, a_{1,2}^{\pm 1}, \dots, a_{k,2}^{\pm 1}]$:

$$F_0 = a_{1,1}, \quad F_i = \frac{a_{i+1,1}}{a_{i,1}} + \frac{a_{i+1,2}}{a_{i,k}}, \quad 1 \leq i \leq k-1, \quad F_k = \sum_{j=1}^k \frac{a_{j,2}}{a_{j,1}}, \quad F_{k+1} = \frac{1}{a_{k,2}}.$$

Определим многочлены Лорана E_s , $1 \leq s \leq l$, как суммы d_s последовательных многочленов F_i , а E_0 как сумму всех незадействованных многочленов F_i . Тогда стандартная модель ЛГ для Y – это многообразие $\{E_i = 1, 1 \leq i \leq l\} \subset T$ с суперпотенциалом E_0 .

ТЕОРЕМА 1. *Стандартная модель ЛГ для гладкого полного пересечения Фано Y в грассманиане плоскостей бирациональна торе. В частности, суперпотенциал задается многочленом Лорана f_Y .*

Мы ожидаем, что теорему 1 можно обобщить на случай полных пересечений в произвольных грассманианах.

Пусть f – многочлен Лорана от m переменных $x_1, \dots, x_m$. Интеграл

$$I_f(t) = \int_{|x_i|=\varepsilon_i} \frac{1}{(2\pi i)^m} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_m}{x_m} \frac{1}{1 - tf} \in \mathbb{C}[[t]]$$

называется *главным периодом* для f , где ε_i – произвольные положительные числа. Его можно вычислить следующим образом: если ϕ_j – постоянный член многочлена f^j , то $I_f(t) = \sum \phi_j t^j$. Это определение оправдывается следующим “фольклорным” утверждением (см. [8; предложение 2.3] или [4; теорема 3.2]). Пусть P – дифференциальный оператор Пикара–Фукса для пучка гиперповерхностей в торе, заданного многочленом f . Тогда $P[I_f(t)] = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеется равенство $I_Y = I_{f_Y}$.*

С каждым многообразием Фано V можно связать *регуляризованный постоянный член I -ряда* $\tilde{I}_0^V = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ (см., например, [5]). Из [2, [3; предложение 3.5] и [7] следует равенство $\tilde{I}_0^Y = I_Y$. Многочлен Лорана f_Y называется *очень слабой моделью ЛГ* для Y , если $I_{f_Y} = \tilde{I}_0^Y$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *У всякого гладкого полного пересечения Фано в грассманиане плоскостей есть очень слабая модель ЛГ.*

В качестве примера рассмотрим гладкое 4-мерное многообразие Фано Y индекса 2, являющееся пересечением грассманиана $\text{Gr}(2, 6)$ с 4 гиперплоскостями. Многочлен Лорана

$$f_Y = \frac{(a_4 + a_3)(a_4 + a_3 + a_2)}{a_3 a_2 a_1} + \frac{a_4 + a_3}{a_3 a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$$

задает очень слабую модель ЛГ для Y . Положим $T = \text{Spec } \mathbb{C}[a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, a_3^{\pm 1}, a_4^{\pm 1}] \cong (\mathbb{C}^*)^4$. Рассмотрим “наивную” относительную компактификацию семейства $f_Y: T \rightarrow \mathbb{A}^1$, заданную вложением тора T в проективное пространство $\mathbb{P}^4$ с однородными координатами $a_0, \dots, a_4$. Это семейство особых компактных трехмерных многообразий Калаби–Яу. Его тотальное пространство имеет крепантное разрешение $LG(Y)$. Можно проверить, что $LG(Y)$ является семейством трехмерных многообразий Калаби–Яу с гладким общим слоем и 12 особыми слоями. Каждый из них имеет единственную особую точку, и она является обыкновенной двойной особенностью. Мы ожидаем, что $LG(Y)$ удовлетворяет гипотезе Гомологической Зеркальной Симметрии (ГЗС). Структура особых слоев $LG(Y)$ подтверждает это ожидание. А именно, по [6; следствие 10.3] на Y есть полный исключительный набор длины 12. С другой стороны, по гипотезе ГЗС категория $\mathcal{D}^b(Y)$ эквивалентна категории Фукаи–Зайделя двойственной модели ЛГ.

Мы благодарны А. Хардеру и А. Г. Кузнецову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Nuclear Phys. B*, **514**:3 (1998), 640–666. [2] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Acta Math.*, **184**:1 (2000), 1–39. [3] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, *Duke Math. J.*, **126**:1 (2005), 101–136. [4] T. Coates, A. Corti, S. Galkin, V. Golyshev, A. Kasprzyk, *European Congress of Mathematics* (Kraków, 2–7 July, 2012), EMS Publ. House, Zürich, 2014, 285–300; 2012, 16 pp., arXiv: 1212.1722. [5] A. Givental, *Topological field theory, primitive forms and related topics* (Kyoto, 1996), Progr. Math., **160**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998, 141–175. [6] A. Kuznetsov, *Homological projective duality for Grassmannians of lines*, 2006, 36 pp., arXiv: math/0610957. [7] R. Marsh, K. Rietsch, *The B-model connection and mirror symmetry for Grassmannians*, 2013, 30 pp., arXiv: 1307.1085. [8] V. Przyjalkowski, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:4 (2007), 713–728.

В. В. Пржиялковский (V. V. Przyjalkowski)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: victorprz@mi.ras.ru

Представлено Д. О. Орловым
Принято редколлегией
29.09.2014

К. А. Шрамов (C. A. Shramov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: costya.shramov@gmail.com