Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Неинтегрируемость в квадратурах и формальные асимптотические решения уравнения Риккати, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 6, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:28:21

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Неинтегрируемость в квадратурах
и формальные асимптотические решения уравнения Риккати

С. А. Степин

Вопрос о разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений в квадратурах, относящийся к дифференциальной алгебре (см. [1]), связан с задачей интегрируемости гамильтоновых систем (см. [2], [3]). Цель настоящего сообщения – продемонстрировать в этом контексте возможности подхода, основанного на использовании асимптотических методов [4]. При этом ограничимся здесь рассмотрением уравнений второго порядка

$$y'' - Q(x)y = 0, \quad (1)$$

где $Q(x) = e^x p(x)$, а $p(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий условию $p(+\infty) = +\infty$. Уравнения данного класса, с одной стороны, не сводятся к ранее изученным с помощью известного [5] алгоритма проверки интегрируемости, а с другой – нетривиальны с точки зрения асимптотической теории [6]. Оказывается, что препятствием к интегрируемости (ср. [7]) является здесь расходимость асимптотического ряда для решений соответствующего (1) уравнения Риккати; при этом x и e^x играют роль медленной и быстрой переменных.

Дифференциальное поле называется расширением Лиувилля поля $K = \mathbb{C}(x, e^x)$, если первое может быть получено из второго конечным числом операций, каждая из которых является либо конечным алгебраическим расширением, либо присоединением интеграла или экспоненты интеграла. Обозначим через $\{y_1, y_2\}$ и $K\langle y_1, y_2 \rangle = K(y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ фундаментальную систему решений уравнения (1) и соответствующее расширение Пикара–Вессьо основного поля K . Уравнение (1) называется интегрируемым в квадратурах над K , если расширение Пикара–Вессьо оказывается расширением Лиувилля поля K .

Группа дифференциальных автоморфизмов поля $K\langle y_1, y_2 \rangle$, оставляющая элементы K неподвижными, задает матричное представление группы Галуа уравнения (1). Согласно теореме Ритга–Колчина (см. [1]), линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида (1) с бесконечной группой Галуа разрешимо в квадратурах в том и только том случае, если соответствующее уравнение Риккати

$$t' + t^2 - Q(x) = 0 \quad (2)$$

имеет решение в некотором квадратичном расширении поля K . Уравнения (1) рассматриваемого класса обладают (см. [4]) решениями с ВКБ-асимптотиками $y(x) \sim Q(x)^{-1/4} \exp\left(\int \sqrt{Q(x)} dx\right)$, $x \rightarrow +\infty$, порядок роста которых исключает их алгебраичность над K , и, стало быть, соответствующая группа Галуа бесконечна.

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (1) неинтегрируемо в квадратурах над полем $K = \mathbb{C}(x, e^x)$, если в окрестности бесконечности выполнены условия

$$(-1)^k \left(\frac{p'(x)}{p(x)} \right)^{(k)} > 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Решение уравнения (2), принадлежащее некоторому квадратичному расширению поля K , по необходимости допускает представление в виде сходящегося ряда

$$t(x) = t_{-1}(x)e^{x/2} + t_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} t_k(x)e^{-kx/2}, \quad (4)$$

коэффициенты $t_k(x)$ которого определяются рекуррентными формулами

$$t_{k+1}(x) = \frac{kt_k(x)}{4t_{-1}(x)} - \frac{t'_k(x)}{2t_{-1}(x)} - \frac{1}{2t_{-1}(x)} \sum_{j=0}^k t_j(x)t_{k-j}(x);$$

причем $t_{-1}(x) = \pm \sqrt{p(x)}$ и $t_0(x) = -(p'(x)/p(x)+1)/4$. Два первых слагаемых ряда (4) соответствуют ВКБ-приближениям решений уравнения (1). При условии (3) для достаточно больших x имеют место неравенства

$$|t_{k+1}(x)| \geq \frac{k}{4\sqrt{p(x)}} |t_k(x)|,$$

которые делают невозможной сходимость ряда (4) и, тем самым, интегрируемость соответствующего уравнения (1). Отметим, что условие (3) удовлетворяется, например, для многочленов $p(x)$, обладающих следующим свойством: каждой паре комплексно-сопряженных нулей z и $\bar{z}$ взаимно однозначно соответствует пара нулей вещественных x_1 и x_2 таких, что $x_1 + x_2 \geq z + \bar{z}$.

Описанная выше схема по сути представляет собой тест, реализующий необходимое условие интегрируемости в терминах сходимости (расходимости) асимптотического ряда для решения уравнения Риккати. Применительно к случаю $K = \mathbb{C}(e^x)$ этот тест выделяет следующий класс уравнений.

ТЕОРЕМА 2. Если $\lambda_k \leq 0$, $k = 0, \dots, n$, то уравнение

$$y'' - \left(e^x + \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{-kx} \right) y = 0$$

неинтегрируемо в квадратурах над полем $K = \mathbb{C}(e^x)$.

Пример уравнения $y'' - (e^x + 1/16)y = 0$ показывает, что условия теоремы 2 ослабить, вообще говоря, нельзя. Соответствующее уравнение Риккати имеет решения $t(x) = \pm e^{x/2} - 1/4$, принадлежащие квадратичному расширению $K = \mathbb{C}(e^x)$, а само это уравнение, таким образом, интегрируемо в квадратурах.

Список литературы

- [1] И. Капланский, *Введение в дифференциальную алгебру*, ИЛ, М., 1959. [2] J. J. Morales-Ruiz, *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progr. Math., **179**, Birkhäuser, Basel, 1999. [3] С. Л. Зиглин, *УМН*, **60**:4(364) (2005), 213–214. [4] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1983. [5] J. J. Kovacic, *J. Symbolic Comput.*, **2**:1 (1986), 3–43. [6] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968. [7] А. Г. Хованский, *УМН*, **59**:4(358) (2004), 69–146.

С. А. Степин (S. A. Stepin)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова;

Institute of Mathematics, University of Bialystok,
Bialystok, Poland

E-mail: astepina@inbox.ru

Представлено М. И. Зеликиным

Принято редколлегией

09.09.2014