Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, Трёхмерные цепные дроби и суммы Кло-стермана, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 3, 107–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9637>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:24:56

УДК 511.336+514.174.6+511.335

Трехмерные цепные дроби и суммы Клостермана

А. В. Устинов

Обзор посвящен результатам, связанным с метрическими свойствами классических цепных дробей и трехмерных цепных дробей Вороного–Минковского. Основное внимание уделяется применению аналитических методов, основанных на оценках сумм Клостермана. В статье развивается аппарат, предназначенный для решения задач на трехмерных решетках. В основе подхода лежит идея редукции к предыдущей размерности, применявшаяся ранее Линником и Скубенко при исследовании целочисленных решений детерминантного уравнения $\det X = P$, где X – матрица размера 3×3 с независимыми коэффициентами и P – растущий параметр.

Предлагаемый метод применяется для изучения статистических свойств трехмерных цепных дробей Вороного–Минковского в решетках с фиксированным определителем. В частности, для среднего числа базисов Минковского доказывается асимптотическая формула со степенным понижением в остаточном члене. Этот результат можно считать трехмерным аналогом теоремы Портера о средней длине конечных цепных дробей.

Библиография: 127 названий.

Ключевые слова: трехмерные цепные дроби, решетки, суммы Клостермана, статистики Гаусса–Кузьмина.

DOI: 10.4213/gm9637

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	108
1.1. Проблема Линника.....	108
1.2. Редукция Линника–Скубенко.....	109
1.3. Теоремы Хейльбронна и Портера.....	111
1.4. Краткая формулировка основного результата.....	111
1.5. План статьи.....	112
2. Метрические свойства цепных дробей.....	112
2.1. Мера Гаусса.....	112
2.2. Статистические свойства конечных цепных дробей.....	114
2.3. Вполне примитивные решетки.....	115
2.4. Многомерный аналог меры Гаусса.....	116

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-90002) и фонда Д. Зимина “Династия”.

© А. В. Устинов, 2015

3. Цепные дроби и решетки	117
3.1. Геометрия цепных дробей	117
3.2. Базисы Минковского	119
3.3. Трехмерные цепные дроби	120
3.4. Формулировка основного результата	126
4. Двумерный случай как модельная задача	128
4.1. Постановка задачи	128
4.2. Разбиение на случаи	129
4.3. Линейная параметризация решений	130
4.4. Первый вариант оценки остаточного члена	130
4.5. Второй вариант оценки остаточного члена	131
4.6. Оценка итогового остатка	132
4.7. Подсчет главного члена	133
5. Разбиение на случаи	133
5.1. Приведенные матрицы	133
5.2. Свойства построенного разбиения	136
5.3. Схема доказательства основного результата	138
5.4. Различные варианты сумм Клостермана	140
6. Первый вариант оценки остатка	140
6.1. Линейная параметризация решений	140
6.2. Переход к интегрированию в третьей строке	142
6.3. Переход к интегрированию во второй строке	143
7. Второй вариант оценки остатка	148
8. Третий вариант оценки остатка	156
9. Завершение доказательства основного результата	161
9.1. О приведенных базисах в плоских решетках	161
9.2. Оценка остаточного члена	163
9.3. Вспомогательные утверждения	166
9.4. Подсчет главного члена	168
Список литературы	173

1. Введение

1.1. Проблема Линника. Многие теоретико-числовые задачи сводятся к изучению диофантова уравнения

$$F(x_1, \dots, x_n) = P, \quad (1.1)$$

где F – однородный многочлен и P – целое число. Единственным общим методом, позволяющим описывать асимптотические свойства решений уравнения (1.1), является круговой метод Харди–Литтлвуда, который, однако, требует дополнительных свойств от многочлена F (см. [1]). В некоторых ситуациях распределение решений уравнения (1.1) удастся исследовать методами алгебраической теории чисел и алгебраической геометрии (см. [2], [3]), однако в общем случае для числа решений не известно даже правильных по порядку оценок.

Если уравнение (1.1) задает однородное многообразие с действием линейной алгебраической группы, то появляется возможность применять методы гармонического анализа на этой группе (см. [4]–[7]). Важным частным случаем такой ситуации является детерминантное уравнение

$$\det X = P, \quad (1.2)$$

где X – квадратная матрица с независимыми коэффициентами. Для матриц размера 3×3 в работе [8] (см. также [9; гл. VIII]) Линник и Скубенко доказали, что при $P \rightarrow \infty$ целочисленные решения уравнения (1.2) равномерно распределены по мере Хаара. Они решали задачу в предположении, что нормированная матрица $\tilde{X} = XP^{-1/3}$ содержится в некоторой фиксированной области $\Omega \subset SL_3(\mathbb{R})$ конечной меры. Для числа решений уравнения (1.2) Линник и Скубенко доказали асимптотическую формулу без явного указания понижения в остаточном члене. (Явная оценка остаточного члена для области $\|\tilde{X}\| \leq 1$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма, дана в [10].) В общем случае задача о распределении целочисленных решений уравнения (1.1) известна как проблема Линника и также обычно рассматривается в предположении, что $\tilde{X} = XP^{-1/d} \ll 1$, где d – степень многочлена F (см. [4], [5], [10]). Развитие метода Линника и Скубенко см. в работах [11]–[14].

1.2. Редукция Линника–Скубенко. Согласно критерию Вейля (см., например, [15]) необходимым и достаточным условием равномерного распределения системы функций $(f_1(x), \dots, f_n(x))$ является выполнение равенства

$$\sum_{x=1}^P e(m_1 f_1(x) + \dots + m_n f_n(x)) = o(P) \quad (P \rightarrow \infty),$$

где $m_1, \dots, m_n$ – произвольные целые числа, не равные одновременно нулю. Это условие позволяет сводить исследование равномерного распределения систем функций к оценкам соответствующих тригонометрических сумм.

Многие задачи, связанные с плоскими целочисленными решетками (см. подробнее в п. 2.2), сводятся к исследованию решений детерминантного уравнения

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = P. \quad (1.3)$$

Это уравнение можно заменить эквивалентным сравнением

$$a_2 b_1 + P \equiv 0 \pmod{a}, \quad (1.4)$$

предполагая, что $a_1 = a > 0$ фиксировано, а значение b_2 находится из равенства $b_2 = (a_2 b_1 + P)a^{-1}$.

С помощью критерия Вейля задача о равномерном распределении решений сравнения (1.4) сводится к оценкам сумм

$$K_a(m, n, q) = \sum_{x, y=1}^a \delta_a(xy + q) e\left(\frac{mx + ny}{a}\right), \quad (1.5)$$

где m, n, q – произвольные целые, a – натуральное, $e(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}t}$ и δ_a – характеристическая функция делимости на a :

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \equiv 0 \pmod{a}, \\ 0, & \text{если } x \not\equiv 0 \pmod{a}. \end{cases}$$

При $q = -1$ суммы (1.5) совпадают с классическими суммами Клостермана

$$K_a(m, n) = \sum_{x, y=1}^a \delta_a(xy - 1) e\left(\frac{mx + ny}{a}\right). \quad (1.6)$$

Для сумм (1.6) и (1.5) известны нетривиальные оценки, что позволяет находить асимптотические формулы для сумм вида

$$\sum_{a_1 b_2 - a_2 b_1 = P} f(a_1, a_2, b_1, b_2), \quad (1.7)$$

заменяя их соответствующими интегралами. К вычислению подобных сумм сводятся задачи из геометрии чисел, теории цепных дробей и т. д. (см. обзор [16]).

В трехмерном случае базисы решеток с определителем P параметризуются решениями детерминантного уравнения (1.2), где X – матрица вида

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

в которой координаты базисных векторов записаны по столбцам. При изучении трехмерных цепных дробей Вороного–Минковского (см. оригинальные публикации [17], [18] и [19], а также их переизложение в [20], [21] и [22]) возникает необходимость в подсчете решений уравнения (1.2), для которых нормированная матрица $\tilde{X} = XP^{-1/3}$ может меняться в области $\Omega \subset SL_3(\mathbb{R})$ бесконечной меры.

Метод Линника–Скубенко был основан на редукции к предыдущей размерности – детерминантному уравнению (1.3). Основная идея заключалась в том, что если матрица $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ фиксирована, имеет ненулевой определитель q и $(q, P) = 1$, то по каждому решению (1.8) уравнения (1.2) можно построить серию решений

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & za_3 + sa_1 + ta_2 \\ b_1 & b_2 & zb_3 + sb_1 + tb_2 \\ z^{-1}c_1 + ua_1 + vb_1 & z^{-1}c_2 + ua_2 + vb_2 & * \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

где $z \in \mathbb{Z}_q^*$, $zz^{-1} \equiv 1 \pmod{q}$, а s, t, u, v – произвольные целые. Наличие параметра z , нелинейно входящего в параметризацию (1.9), позволяет с помощью сумм Клостермана свести задачу о распределении решений уравнения (1.2) к суммам вида (1.7), методы вычисления которых хорошо известны.

В статье [23] была предложена более точная версия редукции Линника–Скубенко, применяемая, в частности, для областей Ω бесконечного объема. Возникающие после редукции вспомогательные двумерные задачи были решены в [24]. В настоящей статье результаты работ [23] и [24] применяются к исследованию статистических свойств трехмерных цепных дробей Вороного–Минковского. Можно ожидать, что предлагаемый подход окажется полезным и при решении других задач, связанных с трехмерными решетками.

1.3. Теоремы Хейльбронна и Портера. Для рационального r через $l(r)$ будем обозначать длину разложения r в конечную цепную дробь

$$r = [a_0; a_1, \dots, a_l] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_l}}},$$

где $a_0 = [r]$ (целая часть r), $a_1, \dots, a_l$ – натуральные и $a_l \geq 2$ при $l \geq 1$.

В статье [25] Хейльбронн доказал асимптотическую формулу для среднего значения $l(r)$, взятого по рациональным числам r с фиксированным знаменателем:

$$\frac{1}{\varphi(P)} \sum_{a=1}^P{}^* l\left(\frac{a}{P}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log P + O((\log \log P)^4) \quad (1.10)$$

(здесь и далее звездочка означает, что суммирование проходит по приведенной системе вычетов). Позднее Портер (см. [26]) уточнил этот результат, выделив следующий значащий член, являющийся абсолютной константой:

$$\frac{1}{\varphi(P)} \sum_{a=1}^P{}^* l\left(\frac{a}{P}\right) = \mathcal{Q}_1(\log P) + O(P^{-1/6+\varepsilon}) \quad (1.11)$$

(через $\mathcal{Q}_m(x)$ будем обозначать многочлен степени m от переменной x ; константы в знаках O всегда будут предполагаться зависящими от ε – сколь угодно малого положительного числа). Доказательство Хейльбронна элементарно. Портер использовал оценки сумм Клостермана и оценки тригонометрических сумм по ван дер Корнуту.

1.4. Краткая формулировка основного результата. В настоящей статье с помощью уточненной версии редукции Линника–Скубенко из работы [23] строится метод анализа минимальных базисов в трехмерных решетках. В частности, этот метод позволяет доказать для них трехмерный аналог результата Портера (1.11).

ТЕОРЕМА 1.1. *Среднее число базисов Минковского по вполне примитивным решеткам с определителем P имеет асимптотику*

$$\mathcal{Q}_2(\log P) + O(P^{-1/34+\varepsilon}). \quad (1.12)$$

Более точная формулировка этого результата будет дана ниже после определения всех необходимых понятий (см. теорему 3.3 ниже). С точки зрения

проблемы Линника наличие в асимптотике многочлена второй степени от логарифма P объясняется тем, что при подсчете решений уравнения $\det X = P$ приходится иметь дело с областью бесконечного объема на многообразии, заданном уравнением $\det \tilde{X} = 1$.

Трехмерный аналог теоремы Хейльбронна (1.10) был доказан Илларионовым в [27] (по поводу других многомерных обобщений см. [28]–[30]). Аргументы Илларионова позволяют выделить старший член в асимптотической формуле (1.12) с остатком $O(\log P \log \log P)$.

Равенство (1.11) можно понимать как формулу для средней длины алгоритма Евклида, примененного к паре чисел (a, P) таких, что $1 \leq a \leq P$ и $(a, P) = 1$. С геометрической точки зрения левую часть равенства (1.11) можно понимать как среднее число минимальных базисов в решетках с базисами из пары векторов $(1, a)$ и $(0, P)$. Формула (1.12) описывает среднее число минимальных базисов в трехмерных решетках, порожденных векторами $(1, 0, a)$, $(0, 1, b)$ и $(0, 0, P)$ (см. п. 2.3). Эту же величину можно понимать как среднее число всевозможных базисов, которые могут возникнуть при работе алгоритма Евклида, примененного к тройке (a, b, P) , в которой $1 \leq a, b \leq P$ и $(a, P) = (b, P) = 1$.

1.5. План статьи. В разделе 2 дается краткий обзор результатов, связанных с метрической теорией бесконечных и конечных цепных дробей.

В разделе 3 рассказывается о трехмерных цепных дробях по Вороному и Минковскому. Приводится точная формулировка основного результата.

Чтобы проиллюстрировать схему доказательства основной теоремы, в разделе 4 коротко описаны основные шаги, необходимые для решения модельной задачи – доказательства упрощенной версии равенства (1.11). Общая схема рассуждений при доказательстве основной теоремы 3.3 будет такой же.

В разделе 5 решения уравнения (1.2) разбиваются на группы, в каждой из которых решения будут подсчитываться (до некоторого момента) независимо. В конце п. 5.3 дается подробная схема доказательства основного результата.

В разделах 6–8 тремя разными способами доказываются асимптотические формулы для числа решений уравнения (1.2) с фиксированным угловым элементом a_1 и угловым минором $q = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

В разделе 9 завершается доказательство основной теоремы 3.3.

2. Метрические свойства цепных дробей

2.1. Мера Гаусса. Метрическая теория цепных дробей восходит к задаче Гаусса о типичном поведении чисел вида

$$\alpha_n = T^n(\alpha) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots],$$

где $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$ – случайное число из интервала $[0, 1)$ и T – отображение Гаусса:

$$T(\alpha) = \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\} \quad \text{при } \alpha \neq 0, \quad T(0) = 0.$$

Для действительного $\xi \in [0, 1]$ обозначим через $F_n(\xi)$ меру множества чисел $\alpha \in [0, 1)$, для которых $\alpha_n \leq \xi$. Исследуя итерации отображения T , Гаусс пришел к предположению, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\xi) = \log_2(1 + \xi) = \frac{\log(1 + \xi)}{\log 2} \quad (2.1)$$

(об этом известно из переписки Гаусса с Лапласом, см. [31; гл. 3]). Кузьмин в работе [32] получил асимптотическую формулу

$$F_n(\xi) = \log_2(1 + \xi) + O(e^{-\lambda\sqrt{n}}) \quad (\lambda > 0),$$

из которой следует гипотеза Гаусса. Результат Кузьмина уточнялся П. Леви [33] и Вирзингом [34]. Окончательное решение задачи Гаусса принадлежит Бабенко [35]. Он доказал существование бесконечной убывающей к нулю последовательности чисел λ_j ,

$$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}| \geq \dots,$$

и соответствующей последовательности аналитических функций $\psi_k(\xi)$, для которых

$$F_n(\xi) = \log_2(1 + \xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\xi) \lambda_k^n. \quad (2.2)$$

Равенство (2.1) означает, что типичное поведение чисел $x_n = T^n(x)$ описывается мерой Гаусса

$$d\nu(\xi) = \frac{1}{\log 2} \frac{d\xi}{1 + \xi}, \quad \xi \in [0, 1],$$

инвариантной относительно отображения T . В частности, из этого следует, что вероятности появления натуральных чисел k в качестве неполных частных у действительных чисел описываются распределением Гаусса–Кузьмина

$$p_k = -\log_2 \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right), \quad k \geq 1. \quad (2.3)$$

Во многих случаях удобнее рассматривать расширенную меру Гаусса

$$d\bar{\nu}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\log 2} \frac{d\alpha d\beta}{1 + \alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta) \in [0, 1]^2, \quad (2.4)$$

инвариантную относительно обратимого почти всюду отображения (см. [36])

$$\bar{T}: (\alpha, \beta) \rightarrow \begin{cases} \left(\left\{ \frac{1}{\alpha} \right\}, \left(\left[\frac{1}{\alpha} \right] + \beta \right)^{-1} \right) & \text{при } \alpha \neq 0; \\ (\alpha, \beta) & \text{при } \alpha = 0. \end{cases}$$

Если разложить в цепные дроби координаты начальной точки (α_0, β_0) :

$$\alpha_0 = [0; a_0, a_1, \dots], \quad \beta_0 = [0; a_{-1}, a_{-2}, \dots], \quad (2.5)$$

то отображение $\bar{T}$ будет эквивалентно сдвигу на бесконечной в обе стороны последовательности $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$, полученной конкатенацией разложений (2.5), записанных в разные стороны: $\bar{T}^n(\alpha_0, \beta_0) = (\alpha_n, \beta_n)$, где n – произвольное целое, $\alpha_n = [0; a_n, a_{n+1}, \dots]$ и $\beta_n = [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots]$.

2.2. Статистические свойства конечных цепных дробей. Дискретный вариант проблемы Гаусса состоит в изучении статистических свойств конечных цепных дробей. Для рациональных чисел (так же как и для действительных) статистики Гаусса–Кузьмина удобней понимать в более широком смысле. Для действительных $\xi, \eta \in [0, 1]$ и рационального r определим статистики Гаусса–Кузьмина равенством

$$l_{\xi, \eta}(r) = \sum_{j=1}^{s+1} [0; a_j, \dots, a_s] \leq \xi, [0; a_{j-1}, \dots, a_1] \leq \eta]. \quad (2.6)$$

Считаем, что пустая цепная дробь по определению равна нулю; если A – некоторое условие, то $[A]$ – характеристическая функция множества, задаваемого этим условием: $[A] = 1$, если условие выполнено, и $[A] = 0$ в противном случае. В частности, $l_{1,1}(r) = l(r)$.

Распределение неполных частных в разложении чисел a/b в случае, когда $1 \leq a \leq b \leq P$ и $P \rightarrow \infty$, впервые было изучено в 1961 г. Лохсом (см. [37], а также [25], [38]). Позднее эта задача в более общей формулировке ставилась Арнольдом [39; задача 1993–11] (задаче Арнольда посвящены статьи [40]–[45]). Результат Лохса можно интерпретировать следующим образом: для среднего значения статистик Гаусса–Кузьмина (2.6) справедлива асимптотическая формула

$$\frac{2}{P^2} \sum_{1 \leq a \leq b \leq P} l_{\xi, \eta} \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^\xi \int_0^\eta \frac{d\alpha d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2} \log P + C(\xi, \eta) + O(P^{-1/2+\varepsilon}), \quad (2.7)$$

в которой старший коэффициент пропорционален мере Гаусса прямоугольника $[0, \xi] \times [0, \eta]$.

Функция $C(\xi, \eta)$, как и левая часть равенства (2.7), разрывна во всех точках, у которых хотя бы одна координата рациональна. Эта функция задается сингулярным рядом, т. е. рядом, состоящим из остаточных членов асимптотических формул (см. [37], [44], [46], [47]).

Равенство (1.11) также обобщается на случай статистик Гаусса–Кузьмина:

$$\frac{1}{\varphi(P)} \sum_{a=1}^P l_{\xi, \eta} \left(\frac{a}{P} \right) = \frac{2 \log P}{\zeta(2)} \int_0^\xi \int_0^\eta \frac{d\alpha d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2} + \tilde{C}(\xi, \eta) + O(P^{-1/6+\varepsilon}) \quad (2.8)$$

(при $\eta = 1$ доказательство приведено в [43]; формула для главного члена следует из результата Хейльбронна [25]; функции $C(\xi, \eta)$ и $\tilde{C}(\xi, \eta)$ выражаются друг через друга). Сравнивая равенство (2.2) с (2.7) (или с (2.8)), можно сделать вывод, что главные члены в непрерывных и дискретных задачах пропорциональны и определяются инвариантной мерой, а следующие значащие члены отличаются и имеют принципиально разную природу.

Аналитический аппарат, используемый при изучении статистических свойств конечных цепных дробей, позволяет решать и другие задачи, в которых цепные дроби используются в качестве вспомогательного инструмента.

В частности, это позволяет

– исследовать типичное поведение алгоритмов Евклида с округлением до ближайшего целого [48], [49], с четными и нечетными неполными частными

[50]–[52], при делении с избытком [53], [54], при делении вычитанием [55], [56] и типичное поведение диагональных дробей Минковского [57] и цепных дробей более общего вида [58], а также изучать разложение в цепные дроби квадратичных рациональностей [45];

– в бильярде Синая (круглые отражатели находятся в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$) находить плотность распределения случайной величины, равной длине свободного пробега частицы [59]–[62]; (в эквивалентной задаче) вычислять плотность совместного распределения длин соседних отрезков, соединяющих начало координат с примитивными точками целочисленной решетки [63], [64];

– описывать предельное распределение чисел Фробениуса с тремя аргументами [65]–[69];

– доказать существование предельной плотности распределения для неполных сумм Гаусса и неполных тета-рядов [70]–[72], а также находить эти плотности [73].

Необходимо отметить, что ко всем перечисленным задачам существуют другие подходы, основанные на эргодической теории и методах геометрии чисел. Обычно эргодические методы оказываются применимыми в более общей ситуации, но, по сравнению с аналитическими методами, требуют усреднения по большому числу параметров и приводят к менее точным остаточным членам.

В частности, с помощью эргодической теории удастся

– проанализировать широкий класс алгоритмов Евклида [74]–[76];

– исследовать бильярд Синая в пространствах произвольной размерности [77], [78], изучить поведение свободного пробега частиц в квазикристаллических структурах [79];

– доказать существование предельной плотности распределения чисел Фробениуса с произвольным числом аргументов [80]; описать свойства этой плотности [81]–[83];

– получать результаты о поведении неполных сумм Гаусса и неполных тета-рядов [84], [85].

2.3. Вполне примитивные решетки. Через $M(v_1, \dots, v_s)$ будем обозначать матрицу, в которой координаты векторов $v_1, \dots, v_s$ записаны по столбцам. Полную решетку $\Lambda \subset \mathbb{Z}^s$ с базисом $(v_1, \dots, v_s)$ будем называть *вполне примитивной*, если для каждой строки матрицы $M(v_1, \dots, v_s)$ миноры, соответствующие элементам этой строки, взаимно просты в совокупности. Например, для матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ это условие означает, что $(a_1, a_2) = (b_1, b_2) = 1$, т.е. при $s = 2$ понятия примитивной и вполне примитивной решетки совпадают. Если $s = 3$, то для базисной матрицы вида (1.8) условие вполне примитивности записывается в виде

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) = 1, \quad (2.9)$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right) = 1, \quad (2.10)$$

$$\left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right) = 1. \quad (2.11)$$

Эквивалентное определение вполне примитивной решетки получается, если потребовать, чтобы решетка имела базис с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & P \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где $0 \leq a, b < P$ и $(a, P) = (b, P) = 1$. Отсюда, в частности, следует, что существует $\varphi^2(P)$ трехмерных вполне примитивных решеток с определителем P .

С точки зрения теории диофантовых приближений локальные минимумы решетки с базисной матрицей (2.12) являются наилучшими приближениями линейной формы $x_1 \frac{a}{P} + x_2 \frac{b}{P} + x_3$. Все сказанное выше о примитивных трехмерных решетках очевидным образом переносится на случай произвольной размерности $s \geq 3$.

2.4. Многомерный аналог меры Гаусса. Мера Гаусса является частным случаем более общей конструкции. Множество базисов в s -мерных решетках можно отождествить с множеством матриц $GL_s(\mathbb{R})$. Определения локальных минимумов и минимальных систем векторов (см. п. 3.1) не зависят от выбора масштабов на осях координат, поэтому для изучения свойств минимальных базисов естественно рассмотреть факторпространство $\mathcal{X}_s = D_s(\mathbb{R}) \setminus GL_s(\mathbb{R})$, где $D_s(\mathbb{R})$ – группа диагональных обратимых матриц размера $s \times s$ с действительными коэффициентами. Биинвариантная мера Хаара на $GL_s(\mathbb{R})$

$$d\lambda(g) = \frac{dg}{(\det g)^s},$$

где $g \in GL_s(\mathbb{R})$ и $dg = dg_{11} dg_{12} \cdots dg_{ss}$ – мера Лебега, индуцирует на $\mathcal{X}_s$ фактормеру μ , являющуюся правой мерой Хаара и сохраняющую инвариантность относительно левого действия $D_s(\mathbb{R})$: для любых $h \in D_s(\mathbb{R})$ и $g \in G = GL_s(\mathbb{R})$

$$d\mu(hG) = d\mu(hGg).$$

Полагая $\bar{g} = (\bar{g}_{ij}) \in \mathcal{X}_s$, в карте $\bar{g}_{11} = \bar{g}_{22} = \cdots = \bar{g}_{ss} = 1$ ($\bar{g}_{ij} = g_{ij}g_{ii}^{-1}$, $1 \leq i, j \leq s$) меру μ можно задать равенством

$$d\mu(\bar{g}) = \frac{d\bar{g}}{(\det \bar{g})^s}, \quad \text{где} \quad d\bar{g} = d\bar{g}_{12} \cdots d\bar{g}_{s-1}. \quad (2.13)$$

При этом правая инвариантность μ будет следовать из формулы

$$\frac{dg}{(\det g)^s} = \frac{dg_{11}}{g_{11}} \frac{dg_{22}}{g_{22}} \cdots \frac{dg_{ss}}{g_{ss}} \frac{d\bar{g}_{12} \cdots d\bar{g}_{s-1}}{(\det \bar{g})^s},$$

в которой $\frac{dg_{11}}{g_{11}} \frac{dg_{22}}{g_{22}} \cdots \frac{dg_{ss}}{g_{ss}}$ – мера Хаара на $D_s(\mathbb{R})$.

При $s = 2$ мера μ , взятая на пространстве матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ (нормированных матриц Вороного), с точностью до нормировочного множителя $1/\log 2$

совпадает с расширенной мерой Гаусса (2.4). При $s = 3$ мера μ возникает при исследовании статистических свойств многогранников Клейна (см. [86], [87]) и цепных дробей Вороного–Минковского (см. [27]). Существенное различие между этими двумя объектами проявляется в том, что многогранники Клейна параметризуются точками всего пространства $\mathcal{X}_s$, мера которого бесконечна, а невырожденным минимальным системам векторов (т. е. системам, матрицы которых имеют ненулевой определитель, см. раздел 3) в пространстве $\mathcal{X}_s$ соответствует область конечной меры μ : если матрица $g \in GL_s(\mathbb{R})$ с диагональным преобладанием (в каждой строке внедиагональные элементы по модулю не превосходят диагональных) задает невырожденную минимальную систему векторов решетки Λ , то, по теореме Минковского о выпуклом теле, $g_{11}g_{22} \cdots g_{ss} \leq \det \Lambda$, и

$$|\det \bar{g}| = \frac{|\det g|}{g_{11}g_{22} \cdots g_{ss}} \geq \frac{|\det g|}{\det \Lambda} \geq 1.$$

3. Цепные дроби и решетки

3.1. Геометрия цепных дробей. Существуют две геометрические интерпретации классических цепных дробей, допускающие естественное обобщение на многомерный случай. В первой из них, принадлежащей Клейну (см. [88], [89], а также более раннее замечание Смита [90; с. 146–147]), цепная дробь идентифицируется с выпуклой оболочкой (многоугольником Клейна) точек целочисленной решетки, лежащих в двух смежных углах. Вторая интерпретация, предложенная независимо Вороным и Минковским (см. [17], [18] и [19], [91], а также переизложение оригинальных результатов в [20], [21] и [22]), основана на использовании локальных минимумов решеток, минимальных систем и экстремальных параллелепипедов (см. определения ниже). В плоских решетках вершины многоугольников Клейна (после линейного преобразования, переводящего стороны данных углов в оси координат) можно отождествить с локальными минимумами по Вороному. Однако, начиная с размерности 3, геометрические конструкции Клейна и Вороного–Минковского становятся различными (см. [92], [93]).

Напомним необходимые определения, восходящие к Вороному и Минковскому. Будем называть решетку $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ *неприводимой* (или *решеткой общего положения*), если координатные гиперплоскости не содержат узлов этой решетки, отличных от начала координат; в противном случае решетка называется *приводимой*. Множество полных s -мерных решеток (т. е. решеток, размерность которых совпадает с размерностью пространства) будем обозначать через $\mathcal{L}_s(\mathbb{R})$, а его подмножество, состоящее из неприводимых решеток, – через $\mathcal{L}_s^*(\mathbb{R})$.

Для непустого конечного множества $A \subset \mathbb{R}^s$ положим

$$|A|_i = \max\{|x_i| : x = (x_1, \dots, x_s) \in A\} \quad (i = 1, \dots, s),$$

$$\text{Box}(A) = (-|A|_1, |A|_1) \times \cdots \times (-|A|_s, |A|_s),$$

$$\overline{\text{Box}}(A) = [-|A|_1, |A|_1] \times \cdots \times [-|A|_s, |A|_s].$$

Другими словами, $\text{Box}(A)$ – это наименьший параллелепипед, описанный около множества A (будем рассматривать только параллелепипеды с центром в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям).

Системой узлов порядка r решетки Λ (не обязательно полной) назовем любой конечный набор $(v_1, \dots, v_r)$ ненулевых узлов решетки, в котором $v_i \neq \pm v_j$ ($1 \leq i < j \leq r$). Произвольной системе $S = (v_1, \dots, v_r)$ будем ставить в соответствие матрицу $M(v_1, \dots, v_r)$, записывая координаты векторов $v_1, \dots, v_r$ по столбцам.

Узел γ решетки $\Lambda \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$ называется *относительным (локальным) минимумом* решетки Λ по Вороному (в дальнейшем – просто *минимумом*), если параллелепипед $\overline{\text{Box}}(\gamma)$ не содержит узлов решетки Λ , отличных от своих вершин и начала координат (см. [18]). Множество всех локальных минимумов решетки Λ будем обозначать через $\mathfrak{M}(\Lambda)$. Если в решетке Λ имеется несколько минимальных векторов $v_1, \dots, v_k$ таких, что $|v_i| = |v_j|$ ($1 \leq i < j \leq k$), то договоримся включать в $\mathfrak{M}(S)$ лишь один из этих векторов.

Система S векторов решетки Λ называется *минимальной*, если параллелепипед $\text{Box}(S)$ не содержит узлов решетки Λ , отличных от начала координат. В частности, для неприводимых решеток понятия “минимальная система порядка 1” и “локальный минимум” совпадают. Для приводимых решеток определение минимальной системы будет нуждаться в уточнении (см. [94]).

В двумерном случае на множестве локальных минимумов $\mathfrak{M}(\Lambda)$ введем структуру последовательности

$$\mathfrak{M}(\Lambda) = (\dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots), \quad (3.1)$$

в которой векторы $v_n = ((-1)^n x_n, y_n)$ ($x_n, y_n > 0$) упорядочены по убыванию первой координаты: $y_{n+1} > y_n$, $x_{n+1} < x_n$. При этом каждая минимальная пара векторов имеет вид (v_n, v_{n+1}) (т. е. состоит из соседних локальных минимумов) и является базисом решетки Λ (см. [18]); такие пары будем называть *базисами Вороного*.

Рассматривая нормированные матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \mp \alpha_n \\ \pm \beta_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & y_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} & \mp x_n \\ \pm y_{n-1} & y_n \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

получаем, что расширенное отображение Гаусса $\bar{T}(\alpha_n, \beta_n) = (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ с геометрической точки зрения означает переход от базиса Вороного (v_{n-1}, v_n) к *смежному* с ним базису (v_n, v_{n+1}) . Поэтому можно говорить, что расширенная мера Гаусса (2.4) описывает типичное поведение нормированных базисов Вороного.

Рациональному числу $r = a/P$, $0 \leq a < P$, $(a, P) = 1$, естественно поставить в соответствие решетку $\Lambda(r)$ с базисной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & P \end{pmatrix}$. Очевидно, что отображение $r \rightarrow \Lambda(r)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между дробями вида a/P , где $0 \leq a < P$, $(a, P) = 1$, и двумерными примитивными решетками с определителем P . При $a \leq P/2$ множество всех локальных минимумов решетки $\Lambda(a/P)$ совпадает с множеством вершин выпуклых оболочек точек решетки $\Lambda(r)$, лежащих в I и II координатных четвертях. При

$a/P = [0; a_1, \dots, a_l] \leq 1/2$ локальные минимумы имеют вид

$$v_0 = (-P, 0), \quad v_1 = (a, 1), \quad \dots, \quad v_j = ((-1)^{j+1} x_j, y_j), \quad \dots, \quad v_{l+1} = (0, P),$$

где последовательности $\{x_j\}$ и $\{y_j\}$ определяются равенствами

$$\frac{x_j}{x_{j-1}} = [0; a_j, \dots, a_l], \quad \frac{y_{j-1}}{y_j} = [0; a_{j-1}, \dots, a_1] \quad (1 \leq j \leq l+1).$$

(При $l = -1$ дробь $[0; a_1, \dots, a_l]$ по определению считается равной $1/0$.) Множество базисов Вороного при этом совпадает с множеством пар (v_j, v_{j+1}) , где $0 \leq j \leq l$. При $a > P/2$ координаты локальных минимумов определяются аналогичным образом по разложению в цепную дробь числа $(P - a)/P$.

3.2. Базисы Минковского. Пусть $\Pi = [0, \xi] \times [0, \eta] \subset [0, 1]^2$. Обозначим через $N_\Pi(P)$ число базисов Вороного (v_{n-1}, v_n) (во всех примитивных решетках с определителем P), для которых коэффициенты нормированной матрицы (3.2) удовлетворяет условию $(\alpha_n, \beta_n) \in \Pi$. Тогда равенство (2.8) можно переписать в виде

$$\frac{N_\Pi(P)}{\varphi(P)} = \frac{\bar{\nu}(\Pi)}{\zeta(2)} \log P + C(\Pi) + O(P^{-1/6+\varepsilon}),$$

где

$$\bar{\nu}(\Pi) = \frac{1}{\log 2} \int_\Pi \frac{d\alpha d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2} = \log_2(1 + xy).$$

Обозначим через G_s группу, действующую на множестве матриц размера $s \times s$, которая порождена следующими элементарными преобразованиями:

- (i) перестановками столбцов и умножением столбцов на -1 (перенумерацией векторов базиса и изменением их ориентации);
- (ii) перестановкой строк и умножением строк на -1 (переобозначением осей координат и изменением их направлений).

Две матрицы размера $s \times s$ будем считать *эквивалентными*, если они переводятся друг в друга действием группы G_s .

Как отмечалось выше, цель настоящей статьи – это развитие аналитических методов, позволяющих доказать трехмерный аналог равенства (2.8). В трехмерном случае классификация минимальных троек векторов несколько усложняется. Полное описание минимальных троек в решетках общего положения дает следующий результат Минковского.

ТЕОРЕМА 3.1 (Минковский). Пусть $S = (v_1, v_2, v_3)$ – минимальная система решетки $\Lambda \in \mathcal{L}_3^*$. Если система S невырожденная, то она является базисом решетки Λ , а матрица $M(v_1, v_2, v_3)$ эквивалентна одной из двух канонических форм

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ -y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & -z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x_2 \geq x_3, \text{ или } y_3 \geq y_1, \text{ или } z_1 \geq z_2, \quad (3.3)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & -z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } y_1 + y_3 \geq y_2 \text{ и } (x_2 \geq x_3 \text{ или } z_2 \geq z_1). \quad (3.4)$$

Если же система S вырожденная, то для некоторой комбинации знаков выполнено равенство $v_1 \pm v_2 \pm v_3 = 0$, а матрица $M(v_1, v_2, v_3)$ действием группы G_3 приводится к виду

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 \\ -y_1 & y_2 & -y_3 \\ -z_1 & -z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x_2 + x_3 = x_1, \quad y_1 + y_3 = y_2, \quad z_1 + z_2 = z_3. \quad (3.5)$$

(Во всех трех случаях предполагается, что $x_i, y_i, z_i \geq 0$ и матрица базиса имеет диагональное преобладание: $x_2, x_3 \leq x_1, y_1, y_3 \leq y_2, z_1, z_2 \leq z_3$.)

Верно и обратное: система из трех векторов (v_1, v_2, v_3) , матрица которой эквивалентна одной из матриц вида (3.3), (3.4), является минимальной системой полной решетки $\Lambda = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$; система векторов (v_1, v_2, v_3) с матрицей вида (3.5) является минимальной системой решетки ранга 2: $\Lambda = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$.

Минковским эта теорема сформулирована без доказательства (см. [19], [91]). Подробное доказательство может быть найдено в [22; статьи 109–110] (см. также [95]–[98]).

В соответствии с теоремой 3.1 минимальные системы, матрицы которых эквивалентны матрицам (3.3), (3.4), будем называть *базисами Минковского I и II типа* соответственно.

Для приводимых решеток классификация минимальных систем усложняется (см. [94]). Однако основной интерес представляют именно базисы Минковского, поскольку любой локальный минимум v можно дополнить до базиса Минковского, расширяя (в решетке общего положения, близкой к данной решетке Λ) параллелепипед $\text{Box}(v)$ вдоль осей координат.

3.3. Трехмерные цепные дроби. Для произвольного $T \subset \mathbb{R}^3$ положим $T' = T$, если $0 \notin T$, и $T' = T \setminus \{0\}$, если $0 \in T$;

$$|T| = \{(|x|, |y|, |z|) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in T\}.$$

Каждому дискретному множеству $T \subset \mathbb{R}^3$ ($T \neq 0$) поставим в соответствие *ортогональную поверхность* $\mathcal{P}(T)$, которая определяется как граница множества

$$|T'| \oplus \mathbb{R}_{\geq 0}^3 = \{t + r : t \in |T'|, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3\}.$$

Трехмерной цепной дробью Вороного–Минковского, ассоциированной с решеткой Λ , будем называть ортогональную поверхность $\mathcal{P}(\Lambda)$.

Из дискретности S следует, что поверхность $\mathcal{P}(S)$ внутри любого ограниченного множества имеет лишь конечное число вершин. Множество вогнутых вершин $\mathcal{P}(S)$ совпадает с $\mathfrak{M}(S)$ – множеством локальных минимумов. Каждой выпуклой вершине $\mathcal{P}(S)$ соответствует *экстремальный параллелепипед* – параллелепипед вида $\text{Box}(v_1, v_2, v_3)$, где v_1, v_2, v_3 – локальные минимумы, лежащие строго внутри трех взаимно перпендикулярных граней $\text{Box}(v_1, v_2, v_3)$. Другими словами, экстремальный параллелепипед характеризуется тем, что его размеры нельзя увеличить так, чтобы он оставался свободным от точек множества S .

ПРИМЕР 3.2. Пусть S состоит из ненулевых узлов решетки $\Lambda = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, где $e_1 = (0, 5, 0)$, $e_2 = (0, 0, 5)$, $e_3 = (1, 1, 2)$. Тогда $\mathfrak{M}(S) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, где $e_4 = (2, 2, -1)$, $e_5 = (5, 0, 0)$. Поверхность $\mathcal{P}(S)$ изображена на рис. 1.

Рис. 1

Для описания полиэдра $\mathcal{P}(S)$ определим комплекс Минковского–Вороного $MV(S)$ как двумерный комплекс, вершинами которого являются экстремальные параллелепипеды, ребрами – пары вида $(\text{Box}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \text{Box}(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4))$, а гранями – локальные минимумы γ_0 , окруженные цепочками ребер вида

$$(\text{Box}(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2), \text{Box}(\gamma_0, \gamma_2, \gamma_3)), \dots, (\text{Box}(\gamma_0, \gamma_n, \gamma_1), \text{Box}(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2))$$

(см. рис. 2).

Рис. 2. Пример поверхности $\mathcal{P}(S)$ и соответствующего ей комплекса $MV(S)$

Если S – множество общего положения, то $\mathcal{P}(S)$ имеет более регулярную структуру. В этом случае естественно определить пару планарных взаимно двойственных графов – *граф Вороного* $\text{Vor}(S)$ и *граф Минковского* $\text{Min}(S)$. Вершинами, ребрами и гранями графа Вороного (Минковского) будем считать соответственно вершины (грани), ребра и грани (вершины) комплекса $MV(S)$.

Рис. 3. Пример графа Вороного

Графы $\text{Vor}(S)$ и $\text{Min}(S)$ можно изобразить на поверхности $\mathcal{P}(S)$, используя следующие правила: вершины $\text{Vor}(S)$ – это пики (выпуклые вершины) $\mathcal{P}(S)$, ребра – пары выпуклых ребер $\mathcal{P}(S)$ (все вершины $V(\Lambda)$ имеют степень 3), грани – области, образующиеся после стирания локальных минимумов и выходящих из них ребер (см. рис. 3); вершины $\text{Min}(S)$ – это локальные минимумы (вогнутые вершины $\mathcal{P}(S)$), каждая грань – это треугольник, ребра которого соединяют три локальных минимума на поверхности некоторого экстремального параллелепипеда ($M(\Lambda)$ – триангуляция плоскости; вогнутые ребра $\mathcal{P}(S)$ можно считать частью ребер $\text{Min}(S)$, см. рис. 4). Ребра каждого из графов

Рис. 4. Пример графа Минковского

Рис. 5. Граф Вороного и его каноническая диаграмма

$\text{Min}(S)$ и $\text{Vor}(S)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с седловыми вершинами $\mathcal{P}(S)$.

Граф Вороного удобно изображать на плоскости $x + y + z = 0$ в виде *канонической диаграммы* – графа, ребрами которого являются отрезки трех направлений (см. рис. 5).

Каноническая диаграмма сохраняет информацию о взаимном расположении экстремальных параллелепипедов. Пусть $\gamma_i = (\pm x_i, \pm y_i, \pm z_i)$ ($i = 1, 2, 3$) и матрица $M(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ имеет диагональное преобладание. Предположим, что от экстремального параллелепипеда $\text{Box}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ мы переходим к смежному с ним параллелепипеду, двигаясь по канонической диаграмме в “восточном” направлении (направление 1 на рис. 6). Тогда движение происходит по ребру с меткой $(x_2 > x_3)$ и смежный сектор (см. рис. 6 справа) обозначен (γ_2, γ_3) . Это означает, что такой переход возможен, только если $x_2 > x_3$, и смежный параллелепипед имеет вид $\text{Box}(\gamma'_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Отсюда, в частности, следует, что существует 8 типов

Рис. 6. Геометрический смысл направлений на канонической диаграмме

Рис. 7

локального строения вершин канонической диаграммы (из двух хорд, высекающих каждый из трех серых секторов, берется ровно одна) – см. рис. 7.

Смежные секторы на рис. 6 слева имеют метки $x^\perp$ и $y^\uparrow$, поэтому линейные размеры параллелепипеда $\text{Box}(\gamma'_1, \gamma_2, \gamma_3)$ по сравнению с $\text{Box}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ меньше по первой координате, больше по второй и совпадают по третьей.

На графе Вороного, выбрав специальным образом ориентацию и раскраску ребер, можно ввести структуру *деревьев Шнидера* (см. [99]). Это позволяет изобразить любой конечный подграф графа $\text{Vor}(S)$ в виде канонической диаграммы с сохранением взаимного расположения вершин (для любых двух выпуклых вершин поверхности $\mathcal{P}(S)$ их координаты в пространстве связаны теми же неравенствами, что и координаты соответствующих вершин канонической диаграммы на плоскости $x + y + z = 0$). Более подробная информация о графах Вороного и Минковского может быть найдена в [100].

Представляет интерес задача о нахождении необходимых и достаточных условий того, что граф, удовлетворяющий очевидным свойствам канонической диаграммы, действительно представляет собой каноническую диаграмму графа Вороного некоторой решетки. Неизвестно также, всегда ли бесконечный граф Вороного можно изобразить в виде канонической диаграммы с сохранением взаимного расположения вершин так, чтобы не возникало точек сгущения. Можно предположить, что это всегда возможно по крайней мере для периодических графов Вороного, соответствующих вполне вещественным кубическим полям.

Для данной решетки Λ процесс построения трехмерной цепной дроби поверхности $\mathcal{P}(\Lambda)$ заключается в последовательном построении элементов $\mathcal{P}(\Lambda)$ – минимальных троек векторов, образующих грани $\text{Min}(\Lambda)$. Некоторые тройки бывают вырожденными (см. теорему 3.1), однако такая ситуация не может возникать слишком часто: грани $\text{Min}(\Lambda)$, соответствующие вырожденным тройкам, не могут быть смежными (см. [22; статья 11, теорема 3.3]). Для нахождения начального базиса Минковского применимы методы Вороного (см. [20; § 59]). На каждом следующем шаге по данному базису Минковского вычисляются смежные тройки. Если тройка оказывается вырожденной, то смежные с ней тройки уже являются базисами (формулы всех переходов выписываются явно – см. [19], а также [22; с. 402–405]). Учитывая теорему 3.1, трехмерные цепные дроби можно понимать как динамическую систему с двумерным временем, инвариантной мерой (2.13) и фазовым пространством, состоящим из матриц множества $D_3(\mathbb{R}) \setminus GL_3(\mathbb{R})$, эквивалентных матрицам Минковского (3.3), (3.4). Алгоритм последовательного нахождения базисов Минковского можно применять и для целочисленных решеток, переходя при совпадении координат к бесконечно близким решеткам общего положения.

Описанная выше конструкция трехмерных цепных дробей первоначально была предложена (в разных формах) Вороным и Минковским в качестве инструмента для нахождения фундаментальных единиц во вполне вещественных кубических полях. Кольцам целых чисел в таких полях соответствуют решетки Λ , для которых $\mathcal{P}(\Lambda)$ имеет двоякопериодическую структуру; таким образом, задача о нахождении фундаментальных единиц сводится к нахождению минимальных периодов $\mathcal{P}(\Lambda)$ (см. [20]). Например, пусть $\theta = 2 \cos(2\pi/7)$, $\theta' = 2 \cos(4\pi/7)$, $\theta'' = 2 \cos(6\pi/7)$ – корни кубического уравнения $\theta^3 + \theta^2 - 2\theta + 1 = 0$. В качестве базиса кольца целых чисел поля $\mathbb{Q}(\theta)$ можно выбрать тройку $\{1, \theta, \theta^2\}$. Тогда фундаментальным единицам θ , $-1 - \theta$ соответствуют 2 независимых периода $\mathcal{P}(\Lambda)$, где Λ – алгебраическая решетка, порожденная векторами $e_j = (\theta^j, (\theta')^j, (\theta'')^j)$ ($j = 0, 1, 2$), см. рис. 8 (жирными точками на рисунке обозначены вырожденные минимальные тройки векторов).

Рис. 8. Граф Вороного для поля $\mathbb{Q}(\theta)$, $\theta = 2 \cos(2\pi/7)$

На рис. 9 изображена каноническая диаграмма, построенная по тройке чисел $\theta = 2 \cos(2\pi/9)$, $\theta' = 2 \cos(4\pi/9)$, $\theta'' = 2 \cos(6\pi/9)$, являющихся корнями кубического уравнения $\theta^3 - 3\theta + 1 = 0$. Базис кольца целых чисел поля — $\{1, \theta, \theta^2\}$, фундаментальные единицы — θ , $1 - \theta$.

Два рассмотренных выше примера интересны тем, что числа $2 \cos(2\pi/7)$ и $2 \cos(2\pi/9)$ представляют собой начало трехмерного аналога спектра Маркова (см. [101], [102], а также теоремы изоляции в [103], [104]), в классической теории цепных дробей им соответствуют числа

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 2 \cos \frac{2\pi}{5} \quad \text{и} \quad \sqrt{2} = 2 \cos \frac{2\pi}{8}.$$

Дальнейшее развитие алгоритмов Вороного и Минковского см. в [105]–[112].

Рис. 9. Граф Вороного для поля $\mathbb{Q}(\theta)$, $\theta = 2 \cos(2\pi/9)$

Отметим также, что для трехмерных цепных дробей Вороного–Минковского удастся доказать аналог теоремы Валена (см. [94], [95], [113]–[115]). О применении теории локальных минимумов см. [29], [30], [116]–[122].

Информация о других многомерных обобщениях цепных дробей может быть найдена в [123].

3.4. Формулировка основного результата. Трехмерным аналогом задачи о статистиках Гаусса для конечных цепных дробей является вопрос о статистических свойствах базисов Минковского, описанных в теореме 3.1. Вопрос о поведении в среднем элементов многогранников Клейна сводится к подсчету матриц Минковского с некоторыми дополнительными ограничениями или к подсчету матриц со сходными свойствами (см. [27]–[30]). Мы ограничимся рассмотрением базисов Минковского на вполне примитивных решетках (см. определение в п. 2.3), поскольку это приводит к более простому и естественно-му ответу.

Для матрицы X вида (1.8) через a , b и c будем обозначать максимальные модули элементов в строках матрицы X :

$$a = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}, \quad b = \max\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\}, \quad c = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}. \quad (3.6)$$

Через X' , X'' , X''' будем обозначать следующие матрицы:

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix} X, & X'' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix} X, \\ X''' &= \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix} X. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В частности, если X – базисная матрица вида (3.3), (3.4), то матрицы X' , X'' , X''' будут иметь соответственно вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & 1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & 1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{pmatrix},$$

где $|\alpha_i|, |\beta_i|, |\gamma_i| \leq 1$.

Для произвольного матричного множества M через $M(P)$, M' , M'' и M''' будем обозначать следующие множества:

$$M(P) = \{X \in M : \det X = P\}, \quad M'' = \{X'' : X \in M\}, \\ M' = \{X' : X \in M\}, \quad M''' = \{X''' : X \in M\}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ – множество базисных матриц Минковского фиксированного типа (I или II) с фиксированной сигнатурой и целыми коэффициентами. Из теоремы 3.1 следует, что при подсчете матриц в множестве $\mathcal{M}$ достаточно ограничиться рассмотрением случаев, когда

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \pm x_3 \\ -y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & -z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где $x_i = |a_i|$, $y_i = |b_i|$, $z_i = |c_i|$ удовлетворяют неравенствам теоремы 3.1.

Как отмечалось выше, основной результат статьи представляет собой трехмерное обобщение равенства (2.8) – асимптотической формулы для среднего значения статистик Гаусса–Кузьмина конечных цепных дробей. Определим *трехмерные статистики Гаусса–Кузьмина* следующим образом. Зафиксируем набор действительных чисел $(\xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_3, \zeta_1, \zeta_2) \in (0, 1]^6$ и рассмотрим параллелепипед

$$\Pi = [0, \xi_2] \times I(\xi_3) \times [-\eta_1, 0] \times [0, \eta_3] \times [0, \zeta_1] \times [-\zeta_2, 0], \quad (3.9)$$

где $I(\xi_3) = [-\xi_3, 0]$ для матриц I типа и $I(\xi_3) = [0, \xi_3]$ для матриц II типа. Тогда трехмерными статистиками Гаусса–Кузьмина (соответствующими матрицам $\mathcal{M}$ данного типа и сигнатуры) для решетки $\Lambda \subset \mathbb{Z}^3$ будем называть суммы вида

$$\sum_{X \in \mathcal{M}} [(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi, X \text{ – базисная матрица решетки } \Lambda],$$

где $\alpha = (\alpha_2, \alpha_3)$, $\beta = (\beta_1, \beta_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, а $\alpha_i = \alpha_i(X)$, $\beta_i = \beta_i(X)$, $\gamma_i = \gamma_i(X)$ находятся из равенств (3.7), (3.8). При таком подходе трехмерным аналогом суммы, стоящей в левой части равенства (2.8), является величина

$$\mathcal{N}_{\Pi}(P) = \sum_{X \in \mathcal{M}(P)}^{\#} [(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi]. \quad (3.10)$$

Здесь и ниже символ $\#$ означает, что сумма берется по вполне примитивным матрицам X , т. е. по матрицам, удовлетворяющим условиям (2.9)–(2.11).

ТЕОРЕМА 3.3. Для любого натурального P и действительного $\varepsilon > 0$

$$\frac{\mathcal{N}_{\Pi}(P)}{\varphi^2(P)} = \mathcal{Q}_2(\log P) + O(P^{-1/34+\varepsilon}), \quad (3.11)$$

где $\mathcal{Q}_2(x)$ – многочлен второй степени со старшим коэффициентом

$$\frac{\mu(\mathcal{M}''' \cap \Pi)}{2\zeta(2)\zeta(3)} = \frac{1}{2\zeta(2)\zeta(3)} \int_{\Pi} \frac{[X''' \in \mathcal{M}''']}{(\det X''')^3} d\alpha d\beta d\gamma.$$

Подробная схема доказательства теоремы 3.3 будет дана в п. 5.3.

4. Двумерный случай как модельная задача

4.1. Постановка задачи. Будем записывать матрицы Вороного в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0.$$

Через $\mathcal{V}$ обозначим множество всех примитивных матриц Вороного:

$$\mathcal{V} = \left\{ A = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} : (x_1, x_2) = (y_1, y_2) = 1, 0 \leq x_2 \leq x_1, 0 \leq y_1 \leq y_2 \right\}.$$

Через a и b (в пределах раздела 4) будем обозначать модули максимальных элементов в строках матрицы A :

$$a = \max\{|a_1|, |a_2|\} = x_1, \quad b = \max\{|b_1|, |b_2|\} = y_2.$$

При этом $ab \leq P \leq 2ab$. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ через A' и A'' будем обозначать матрицы

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Соответствующие множества будем обозначать через $\mathcal{V}'$ и $\mathcal{V}''$:

$$\mathcal{V}' = \left\{ A' = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} : (x_1, x_2) = 1, 0 \leq x_2 \leq x_1, \beta \in [0, 1] \right\},$$

$$\mathcal{V}'' = \left\{ A'' = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in [0, 1] \right\}.$$

Зафиксируем пару действительных чисел $\xi, \eta \in [0, 1]$ и определим прямоугольник $\Pi = [0, \xi] \times [0, \eta]$. Рассмотрим задачу о подсчете величины

$$N(P) = N_{\Pi}(P) = \left| \left\{ A \in \mathcal{V}(P) : \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{y_1}{y_2} \right) \in \Pi \right\} \right|,$$

равной числу примитивных матриц Вороного с определителем P , для которых коэффициенты нормированной матрицы лежат в Π . Ответом к этой задаче служит следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть P – натуральное число, $\varepsilon > 0$ – действительное. Тогда

$$\frac{N(P)}{\varphi(P)} = c_1(\Pi) \log P + c_0(\Pi) + O(P^{-1/8+\varepsilon}), \quad (4.2)$$

где

$$c_1(\Pi) = \frac{\log(1 + \xi\eta)}{\zeta(2)} = \frac{\bar{\nu}(\mathcal{V}'' \cap \Pi)}{\zeta(2)} = \frac{1}{\zeta(2)} \int_{\Pi} \frac{[A'' \in \mathcal{V}'''] d\alpha d\beta}{(\det A'')^2}.$$

Остаточный член в теореме 4.1 хуже остаточного члена из результата Портера (1.11). Это обусловлено тем, что доказательство теоремы 4.1 проще: вместо оценок тригонометрических сумм по методу ван дер Корпута оно использует идею аппроксимации границ областей ступенчатыми функциями. Такой же подход будет лежать в основе доказательства теоремы 3.3 (трехмерного аналога теоремы 4.1). Ниже все основные шаги описаны кратко, чтобы наметить схему доказательства основного результата.

4.2. Разбиение на случаи. Множество всех матриц Вороного разобьем на две части:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2, \quad \mathcal{V}_1 = \{A \in \mathcal{V} : x_1 \leq y_2\}, \quad \mathcal{V}_2 = \{A \in \mathcal{V} : x_1 > y_2\}.$$

Величину $N(P)$, соответственно, можно представить в виде $N(P) = N_1(P) + N_2(P)$, где определение $N_\ell(P)$ ($\ell = 1, 2$) получается из определения $N(P)$ наложением дополнительного условия $A \in \mathcal{V}_\ell$. Для доказательства теоремы 4.1 будет достаточно убедиться в справедливости асимптотической формулы

$$\frac{N_\ell(P)}{\varphi(P)} = \frac{c_1(\Pi)}{2} \log P + c_0^{(\ell)}(\Pi) + O(P^{-1/8+\varepsilon}) \quad (\ell = 1, 2). \quad (4.3)$$

Из доказательства равенства (4.3) при $\ell = 1$ будет следовать, что если в определении $N_1(P)$ нестрогое неравенство $x_1 \leq y_2$ заменить на строгое неравенство $x_1 > y_2$, то в формуле (4.3) изменится лишь вид константы $c_0^{(1)}(\Pi)$. Отображение

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_2 & -y_1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между матрицами из множества $\mathcal{V}_1$, для которых $x_1 < y_2$, и матрицами из $\mathcal{V}_2$. Поэтому для доказательства равенства (4.3) при $\ell = 2$ (а тем самым, и теоремы 4.1) достаточно убедиться в его справедливости при $\ell = 1$. В дальнейшем будем предполагать, что $\ell = 1$.

Через $\mathcal{V}_\ell(a, P)$ обозначим множество матриц $A \in \mathcal{V}_\ell(P)$, для которых $x_1 = a$. Множества $\mathcal{V}'_\ell(a, P)$ и $\mathcal{V}''_\ell(a, P)$ определяются по аналогии с $\mathcal{V}'$ и $\mathcal{V}''$.

Чтобы проверить равенство (4.3), докажем сначала асимптотическую формулу для $N_\ell(a, P) = |\mathcal{V}_\ell(a, P)|$. Сделаем это двумя разными способами, первый раз – с помощью элементарных соображений, а второй раз – используя оценки сумм Клостермана.

4.3. Линейная параметризация решений. Если зафиксированы числа a_1 и a_2 , причем $(a_1, a_2) = 1$, то можно подобрать целые $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ P\tilde{x}_1 & P\tilde{x}_2 \end{vmatrix} = P. \quad (4.4)$$

Поэтому все решения уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = P$$

относительно неизвестных b_1, b_2 допускают линейную параметризацию

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где $u \in \mathbb{Z}$ и $\tilde{b}_{1,2} = P\tilde{x}_{1,2}$. Из равенств

$$(b_1, b_2) = (b_1, b_2, P) = (ua_1, ua_2, P) = (u, P)$$

следует, что решение, полученное по формуле (4.5), будет задавать примитивную матрицу A тогда и только тогда, когда $(u, P) = 1$.

4.4. Первый вариант оценки остаточного члена. Получим асимптотическую формулу для $N_\ell(a, P)$ исходя из элементарных соображений. Из равенства $y_2 = (P - x_2 y_1)/x_1$ следует, что условия $y_1 \leq y_2$ и $x_1 \leq y_2$, характеризующие множество $\mathcal{V}_\ell(a, P)$ (напомним, что мы рассматриваем только случай $\ell = 1$), можно записать в виде $y_1 \leq f(x_2)$, где

$$f(t) = \min\{f_1(t), f_2(t)\}, \quad f_1(t) = \frac{P}{a+t}, \quad f_2(t) = \frac{P-a^2}{t}. \quad (4.6)$$

При этом

$$f(t) \leq f_1(t) \ll \frac{P}{a}, \quad |f'_1(t)| = \frac{P}{(a+t)^2} \ll \frac{P}{a^2} \quad (4.7)$$

и (при условии, что $f(t) = f_2(t)$)

$$|f'_2(t)| = \frac{|f_2(t)|}{t} \ll \frac{P}{at}. \quad (4.8)$$

С помощью линейной параметризации (4.5) находим, что

$$\sum_{0 \leq y_1 \leq f(x_2)}^\# \delta_a(P - x_2 y_1) = \frac{\varphi(P)}{aP} \int_0^{f(x_2)} dy_1 + O(P^\varepsilon). \quad (4.9)$$

Переходя к переменной $\beta = y_1/y_2$ и пользуясь равенствами

$$y_1 = \frac{\beta P}{\det A'}, \quad dy_1 = \frac{aP d\beta}{(\det A')^2},$$

перепишем формулу (4.9) в виде

$$\sum_{y_1} [A \in \mathcal{V}_\ell(a, P)] = \varphi(P) \int_{\mathbb{R}} \frac{[A' \in \mathcal{V}'_\ell(a, P)] d\beta}{(\det A')^2} + O(P^\varepsilon).$$

Суммируя последнее равенство по x_2 и переходя к переменной $\alpha = x_2/x_1$, получаем

$$\frac{N_\ell(a, P)}{\varphi(P)} = \frac{\varphi(a)}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[A'' \in \mathcal{V}''_\ell(a, P)] d\alpha d\beta}{(\det A'')^2} + \rho_0(a) + O(aP^{-1+\varepsilon}), \quad (4.10)$$

где $\rho_0(a) \ll a^{-2+\varepsilon}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Обе части равенства (4.9) оцениваются как $O(Pa^{-2})$. Это позволяет, в частности, получить следующую асимптотическую формулу с тривиальной оценкой остатка:

$$\begin{aligned} & \sum_{Y_1 \leq x_2 < Y_1 + Z_1} \sum_{0 \leq y_1 \leq f(x_2)}^\# \delta_a(P - x_2 y_1) \\ &= \frac{\varphi(P)\varphi(a)}{Pa^2} \int_{Y_1}^{Y_1+Z_1} dx_2 \int_0^{f(x_2)} dy_1 + O(Z_1 P^{1+\varepsilon} a^{-2}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.5. Второй вариант оценки остаточного члена. Второй подход к вычислению $N_\ell(a, P)$ заключается в подсчете числа решений сравнения $xy + P \equiv 0 \pmod{a}$, лежащих под графиком некоторой монотонной функции. Эту область будем аппроксимировать прямоугольниками, а в каждом прямоугольнике будем сводить задачу к оценкам сумм Клостермана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $a > 0$ и

$$I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2) \subset [0, a) \times [0, Pa).$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{(x,y) \in I}^\# \delta_a(xy + P) = \frac{\varphi(P)}{P} \frac{\varphi(a)}{a^2} Z_1 Z_2 + O(R(Z_2)), \quad (4.12)$$

где

$$R(Z_2) \ll \left(\frac{Z_2}{a} + a^{1/2} \right) (a, P) (aP)^\varepsilon.$$

Предложение 4.3 доказывается стандартными методами (см., например, теорему 3 работы [24]; обобщение на случай произвольной линейной функции см. в [124]). Из формулы (4.12) следует, что для произвольной неотрицательной функции f такой, что $Z_2 \leq f(x) \leq Z_2 + V$ ($V \ll Z_2$) при $x \in [Y_1, Y_1 + Z_2)$, выполняется асимптотическая формула

$$\begin{aligned} & \sum_{Y_1 \leq x_2 < Y_1 + Z_2} \sum_{0 \leq y_1 \leq f(x_2)}^\# \delta_a(P - x_2 y_1) \\ &= \frac{\varphi(P)}{P} \frac{\varphi(a)}{a^2} \int_{Y_1}^{Y_1+Z_1} dx \int_0^{f(x)} dy + O\left(\frac{Z_1 V}{a}\right) + O(R(Z_2)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Будем применять ее к функции f , определенной равенствами (4.6). Для этого выберем натуральное $r \leq a$ и представим отрезок $[0, a]$, внутри которого меняется переменная x_2 , в виде

$$[0, a] = \bigsqcup_{j=0}^{r-1} I(j) = \bigsqcup_{k=0}^m W_k,$$

где $m \ll \log a$, $I(0) = W_0 = [0, a/r]$,

$$I(j) = \left(\frac{j}{r}a, \frac{j+1}{r}a \right] \quad (1 \leq j < r), \quad W_k = \bigsqcup_{\substack{j=1 \\ 2^{k-1} \leq j < 2^k}}^{r-1} I(j) \quad (k > 0).$$

Величину $N_\ell(a, P)$ представим в виде

$$N_\ell(a, P) = \sum_{k=0}^m N_{\ell,k}(a, P),$$

где определение $N_{\ell,k}(a, P)$ получается из определения $N_\ell(a, P)$ наложением дополнительного условия $x_2 \in W_k$. Аппроксимируя функцию f на каждом интервале $I(j)$ постоянными функциями, можно доказать равенство

$$N_{\ell,k}(a, P) = \frac{\varphi(P)}{P} \frac{\varphi(a)}{a^2} \int_{W_k} dx_2 \int_0^{f(x_2)} dy_1 + O\left(\frac{P}{ar}\right) + O(rR(b)P^\varepsilon). \quad (4.14)$$

Для этого при $k = 0$ достаточно воспользоваться формулой (4.11), а при $k > 0$ — просуммировать равенство (4.13) по интервалам $I(j) \subset W_k$. На каждом из таких интервалов, согласно (4.7) и (4.8), $|f'(x)| \ll rP \cdot 2^{-k}a^{-2}$. Значения функции f меняются внутри отрезка длины $V = O(P \cdot 2^{-k}a^{-1})$, что приводит к остатку $O(Z_1V/a) = O(P \cdot 2^{-k}a^{-1}r^{-1})$. Остается учесть, что число интервалов $I(j) \subset W_k$ есть $O(2^k)$.

Просуммируем равенство (4.14) по k и перейдем к переменным $\beta = y_1/y_2$ и $\alpha = x_2/x_1$:

$$\frac{N_\ell(a, P)}{\varphi(P)} = \frac{\varphi(a)}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[A'' \in \mathcal{V}_\ell''(a, P)] d\alpha d\beta}{(\det A'')^2} + O\left(\frac{P^\varepsilon}{ra}\right) + O(rR(b)P^{-1+\varepsilon}).$$

Значение $r = [P^{1/2}a^{-3/4}]$ выбирается исходя из соотношения $P/(ra) \asymp ra^{1/2}$. Требование $r \leq a$ будет выполнено при условии, что $a \geq P^{2/7}$. В результате получается асимптотическая формула для $N_\ell(a, P)$ со вторым вариантом остатка:

$$\frac{N_\ell(a, P)}{\varphi(P)} = \frac{\varphi(a)}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[A'' \in \mathcal{V}_\ell''(a, P)] d\alpha d\beta}{(\det A'')^2} + O((a, P)a^{-1/4}P^{1/2+\varepsilon}). \quad (4.15)$$

4.6. Оценка итогового остатка. Сравнивая формулы (4.10) и (4.15), находим, что первую имеет смысл применять при $a \leq P^{2/5}$, а вторую — при $a > P^{2/5}$. Таким образом, для суммы всех остаточных членов получаем оценку

$$\sum_{a \leq P^{2/5}} aP^\varepsilon + \sum_{P^{2/5} < a \leq P^{1/2}} (a, P)a^{-1/4}P^{1/2+\varepsilon} \ll P^{7/8+\varepsilon}. \quad (4.16)$$

4.7. Подсчет главного члена. Если $a > \sqrt{q}$, то множество $\mathcal{V}_\ell(a, P)$ становится пустым. Несмотря на это, формуле (4.10) можно придать смысл, полагая $\rho_0(a) = 0$. При такой договоренности из оценки $\rho_0(a) \ll a^{-2+\varepsilon}$ следует, что

$$\sum_{a \leq P^{2/5}} \rho_0(a) = \sum_{a=1}^{\infty} \rho_0(a) + O(P^{-2/5+\varepsilon}).$$

Как отмечалось выше, условие $\alpha_1 \leq \beta_2$, которому удовлетворяют матрицы множества $\mathcal{V}_\ell''(a, P)$, равносильно неравенству $a^2 \leq P/\det A''$. Поэтому из соотношений (4.10), (4.15) и (4.16) следует, что

$$\frac{N_\ell(P)}{\varphi(P)} = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\varphi(a)}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[A'' \in \mathcal{V}_\ell''(a, P)] d\alpha d\beta}{(\det A'')^2} + \sum_{a=1}^{\infty} \rho_0(a) + O(P^{-1/8+\varepsilon}).$$

Условие $a \leq y_2$, которому должны удовлетворять матрицы множества $\mathcal{V}_\ell(a, P)$, не инвариантно относительно левого действия $D_3(\mathbb{R})$. При переходе к множеству $\mathcal{V}_\ell''(a, P)$ это условие принимает вид $a^2 \leq P/\det A''$, т. е.

$$\mathcal{V}_\ell'''(a, P) = \left\{ A' \in \mathcal{V}_\ell'' : a^2 \leq \frac{P}{\det A''} \right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{N_\ell(P)}{\varphi(P)} &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[A'' \in \mathcal{V}_\ell'''] d\alpha d\beta}{(\det A'')^2} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\varphi(a)}{a^2} \left[a^2 \leq \frac{P}{\det A''} \right] \\ &\quad + \sum_{a=1}^{\infty} \rho_0(a) + O(P^{-1/8+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Применяя к внутренней сумме равенство

$$\sum_{a=1}^N \frac{\varphi(a)}{a^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \left(\log N + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + O(N^{-1+\varepsilon}),$$

приходим к требуемой формуле (4.3).

5. Разбиение на случаи

В двумерном случае множество $\mathcal{V}$ разбивалось на два подмножества $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$, почти не отличающихся друг от друга (см. п. 4.2). В трехмерном случае разбиение будет устроено более сложно и будет существенно использовать геометрические свойства базисов Минковского.

5.1. Приведенные матрицы. Пусть X – базисная матрица Минковского вида (1.8) и a, b, c определены равенствами (3.6). Тогда выполняется соотношение $P \asymp abc$. Действительно, с одной стороны, имеет место очевидное неравенство $P \leq 6abc$. С другой стороны, по теореме Минковского о выпуклом теле

$P \geq abc$. В частности, неравенство $P \geq abc$ означает, что среди миноров, соответствующих элементам любой строки X , всегда найдется по крайней мере один, имеющий максимально возможный порядок. Например,

$$\max\{|a_1b_2 - a_2b_1|, |a_1b_3 - a_3b_1|, |a_2b_3 - a_3b_2|\} \geq \frac{ab}{3}.$$

Важную роль в дальнейших рассуждениях будет играть разбиение множества всех базисных матриц Минковского на карты – подмножества, на которых будет проводиться редукция Линника–Скубенко. В каждой карте положение максимального по порядку минора (для каждой строки) будет фиксировано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $q = \det A \neq 0$, и X – матрица базиса Минковского вида (1.8). Будем называть матрицу X *приведенной*, если она удовлетворяет следующим условиям.

- 1°. $a_1 = a$.
- 2°. $q \geq ab/4$.
- 3°. Базис (e_1, e_2) решетки $\Lambda = \langle e_1, e_2 \rangle$ близок к минимальному в следующем смысле: один из базисов (e_1, e_2) , $(e_1, e_1 + e_2)$, $(e_2, e_1 \pm e_2)$ является базисом Вороного решетки Λ .

Другими словами, свойства 1° и 2° означают, что в приведенной матрице угловой минор q и угловой элемент a_1 имеют наибольшие возможные по порядку значения. Свойство 3° означает, что и матрица A по решетке Λ с базисом (a_1, b_1) , (a_2, b_2) восстанавливается почти однозначно: число базисов Вороного в решетке с определителем q , так же как и длина разложения числа d/q в цепную дробь, оценивается как $O(\log(q+1))$, поэтому и число возможных матриц A при заданной решетке Λ ограничено величиной $O(\log(q+1))$.

Будем обозначать через $g_1, \dots, g_6$ элементы группы G_3 , переставляющие местами коэффициенты a, b, c матрицы X (и сохраняющие диагональное преобразование X).

ЛЕММА 5.2. Множество $\mathcal{M}$ можно разбить на конечное число подмножеств так, что

(i) каждое множество разбиения задается конечным набором неравенств, инвариантных относительно левого действия $D_3(\mathbb{R})$;

(ii) если $\widetilde{\mathcal{M}}$ – одно из множеств разбиения, то для любого $i = 1, \dots, 6$ по крайней мере одно из множеств $g_i(\widetilde{\mathcal{M}})$ или $g_i(\widetilde{\mathcal{M}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ состоит из приведенных матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.1, необходимое разбиение достаточно построить для множеств (3.3) и (3.4). В каждом из них добавим дополнительное разбиение всеми гиперплоскостями вида $x_i = x_j$, $y_i = y_j$, $z_i = z_j$ ($i \neq j$). Рассмотрим произвольное множество из полученного разбиения. Если оно состоит из матриц I типа, то все его элементы удовлетворяют условиям 1°–3° (матрица $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ задает базис Вороного, поскольку $b_1 \leq 0$).

Пусть рассматриваемое множество состоит из матриц Π типа. После того как строки матрицы X упорядочены по возрастанию максимальных элементов, возникает три варианта расстановки знаков. Кроме случая (3.4) возможны также следующие два:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ -y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x_2 + x_3 \geq x_1 \text{ и } (y_1 \geq y_3 \text{ или } z_1 \geq z_2), \quad (5.1)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & -z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } z_1 + z_2 \geq z_3 \text{ и } (x_3 \geq x_2 \text{ или } y_3 \geq y_1). \quad (5.2)$$

В матрицах (3.4) и (5.1) элемент b_1 отрицателен. Поэтому, как и для матриц Γ типа, $q = x_1y_2 + x_2y_1 \geq x_1y_2 = ab$ и базис (e_1, e_2) является базисом Вороного. Для матриц (5.2) дополнительно сделаем подразбиение плоскостями $a_2 = a_1/2$ и $b_1 = b_2/2$ и рассмотрим два случая:

- 1) $b_1 > 0$ и $(a_2 \leq a_1/2 \text{ или } (a_2 > a_1/2, b_1 \leq b_2/2))$;
- 2) $b_1 > 0, a_2 > a_1/2, b_1 > b_2/2$.

В первом случае $q = x_1y_2 - x_2y_1 \geq x_1y_2/2 = ab/2$, и при $a_2 \leq a_1/2$ в качестве базиса Вороного можно выбрать пару $(e_1 - e_2, e_2)$ с матрицей $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_2 \\ y_1 - y_2 & y_2 \end{pmatrix}$, а при $b_1 \leq b_2/2$ – пару $(e_1, e_2 - e_1)$ с матрицей $\begin{pmatrix} x_1 & -(x_1 - x_2) \\ y_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}$.

Во втором случае в матрице X переставим второй и третий столбцы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & -z_2 & z_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & -x_3 & x_2 \\ y_1 & y_3 & y_2 \\ z_1 & z_3 & -z_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & -x_2 \\ -y_1 & y_3 & y_2 \\ z_1 & -z_3 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Если в матрице $\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ -y_1 & y_3 \end{pmatrix}$ будет выполняться условие $y_3 \geq y_1$, то базис решетки $\Lambda = \langle e_1, e_2 \rangle$, состоящий из векторов $e_1 = (x_1, -y_1)$, $e_2 = (x_3, y_3)$, будет базисом Вороного и $q = x_1y_3 + x_3y_1 \geq x_1y_1 \geq ab/2$. В оставшемся случае ($y_3 < y_1, x_3 \geq x_2$) в качестве базиса Вороного можно выбрать пару $(e_2, e_2 - e_1)$ с матрицей $\begin{pmatrix} x_3 & -(x_1 - x_3) \\ y_3 & y_1 + y_3 \end{pmatrix}$. При этом $q = x_1y_3 + x_3y_1 \geq y_1x_2 \geq ab/4$. Лемма доказана.

Таким образом, каждой матрице A можно поставить в соответствие базис Вороного решетки Λ , причем каждому базису Вороного будет соответствовать не более четырех матриц A .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Теорему 3.3 достаточно доказать, заменив в ее формулировке (и в определении (3.10) величины $\mathcal{N}_\Pi(P)$) множество $\mathcal{M}$ на множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ – произвольное множество разбиения, построенного в лемме 5.2. При этом множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ можно представить в виде

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \bigsqcup_{\ell=1}^6 g_\ell(\mathcal{M}_\ell), \quad (5.3)$$

где $g_\ell \in G_3$ и каждое из множеств $\mathcal{M}_\ell$ состоит из приведенных матриц, удовлетворяющих условиям $a \leq b \leq c$ (в определении $\mathcal{M}_\ell$ нестрогие неравенства между a , b и c могут заменяться строгими, чтобы множества $g_\ell(\mathcal{M}_\ell)$ попарно не пересекались).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Трехмерная мера Гаусса инвариантна относительно левого действия $D_3(\mathbb{R})$. В частности, при $\beta'_1 = \beta_1/\beta_3$, $\beta'_2 = 1/\beta_3$, $\gamma'_1 = \gamma_1/\gamma_2$, $\gamma'_3 = 1/\gamma_2$ имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & 1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}^{-3} d\beta_1 d\beta_3 d\gamma_1 d\gamma_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & 1 \\ \gamma'_1 & 1 & \gamma'_3 \end{vmatrix}^{-3} d\beta'_1 d\beta'_2 d\gamma'_1 d\gamma'_3.$$

Значит, мера множества $D_3(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{M}$ не зависит от того, были переставлены второй и третий столбцы матрицы X или нет.

Из замечаний 5.3 и 5.4 вытекает, что для доказательства теоремы 3.3 достаточно убедиться в справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть $\mathcal{M}_\ell$ – одно из множеств разбиения (5.3) и параллелепипед Π определен равенством (3.9). Тогда

$$\frac{1}{\varphi^2(P)} \sum_{X \in \mathcal{M}_\ell(P)}^\# [(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi] = \mathcal{Q}_2^{(\ell)}(\log P) + O(P^{-1/34+\varepsilon}), \quad (5.4)$$

где $\mathcal{Q}_2^{(\ell)}$ – многочлен второй степени со старшим коэффициентом

$$\frac{\mu(\widetilde{\mathcal{M}}''' \cap \Pi)}{12\zeta(2)\zeta(3)} = \frac{1}{12\zeta(2)\zeta(3)} \int_{\Pi} \frac{[X''' \in \widetilde{\mathcal{M}}''']}{(\det X''')^3} d\alpha d\beta d\gamma. \quad (5.5)$$

Для простоты изложения доказательство теоремы 5.5 будет проведено в предположении, что все параметры $\xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_3, \zeta_1, \zeta_2$, определяющие размеры Π , равны единице. В общем случае рассуждения будут теми же.

5.2. Свойства построенного разбиения.

ЛЕММА 5.6. Пусть X – приведенная матрица. Тогда

$$\frac{q}{2a} \leq b \leq \frac{4q}{a}, \quad \frac{P}{24q} \leq c \leq \frac{2P}{q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из неравенств $q \leq 2ab$, $abc \leq P \leq 6abc$ и свойства 2° приведенных матриц.

ЛЕММА 5.7. Разбиение, построенное в лемме 5.2, дополнительно обладает следующими свойствами: любое из множеств $\mathcal{M}_\ell(a, q, P)$ задается конечным числом неравенств вида $\pm c_2 \leq f_i(a_2, a_3, b_1, b_3, c_1)$ ($1 \leq i \leq i_0$), каждое из которых действует над соответствующей областью $\Omega_i = \Omega_i(a_2, a_3, b_1, b_3, c_1)$. При этом $f_i \ll P/q$ и

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_{2,3}} \ll \frac{P}{aU}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial b_{1,3}} \ll \frac{P}{bU}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial c_1} \ll \frac{P}{cU} \quad (a_2, a_3, b_1, b_3, c_1) \in \Omega_i, \quad (5.6)$$

где $U = |a_1 b_3 - a_3 b_1|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицы Минковского I типа. Очевидно, что оценка $f_i \ll P/q$ всегда выполняется, поскольку для приведенных матриц $c_2 \leq c \asymp P/q$ (см. лемму 5.6). Рассмотрим последовательно все функции, которые могут задавать пределы изменения переменной z_2 для матриц X вида (3.3), удовлетворяющих уравнению $\det X = P$. Это функции $f_{1,2,3,4}$, которые определяются соответственно условиями $z_1 = z_2$, $z_1 = z_3$, $z_2 = z_3$ (возникающими при первичном разбиении множества $\mathcal{M}$) и $z_3 = y_2$ (часть границы, возникающая из-за неравенства $b \leq c$). Для первой функции $f_1 = z_1$ имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} = 1 \ll \frac{P}{cq}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_{2,3}} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_{1,3}} = 0.$$

Остальные функции находятся из равенства $\det X = P$:

$$f_2 = \frac{P - z_1 \left(q + \begin{vmatrix} x_2 & -x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \right)}{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}}, \quad f_3 = \frac{P - z_1 \begin{vmatrix} x_2 & -x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{q + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}},$$

$$f_4 = \frac{P - y_2 q - z_1 \begin{vmatrix} x_2 & -x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}}.$$

(Если функция f_i , где $i = 1, \dots, 4$, задает границу области изменения c_2 , то, как отмечалось выше, $f_i \ll P/q$, поэтому знаменатель $U = |a_1 b_3 - a_3 b_1|$ в таких случаях отличен от нуля.) Если $f_i = F_i/G_i \ll P/q$, то

$$f'_i = \frac{F'_i}{G_i} - \frac{F_i G'_i}{G_i^2} \ll \left| \frac{F'_i}{G_i} \right| + \frac{P}{q} \left| \frac{G'_i}{G_i} \right|.$$

Для всех рассматриваемых функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} &\ll \frac{P}{a}, & \frac{\partial F_i}{\partial y_j} &\ll \frac{P}{b}, & \frac{\partial F_i}{\partial z_1} &\ll \frac{P}{c}, \\ \frac{\partial G_i}{\partial x_j} &\ll \frac{q}{a}, & \frac{\partial G_i}{\partial y_j} &\ll \frac{q}{b}, & \frac{\partial G_i}{\partial z_1} &= 0. \end{aligned}$$

Значит, для проверки утверждения леммы достаточно убедиться в том, что $|G_i| \gg U$. Для функций f_2 и f_4 это очевидно, а для функции f_3 следует из неравенств на элементы матрицы Минковского:

$$q + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3 - x_3 y_1 \geq x_1 y_2 \geq \frac{q}{2} \gg U$$

(при $x_2 \geq x_3$ это следует из неравенства $x_2 y_1 - x_3 y_1 \geq 0$, при $y_3 \geq y_1$ — из неравенства $x_1 y_3 - x_3 y_1 \geq 0$, а при $z_1 \geq z_2$ функция f_2 не может задавать границу области изменения c_2 , поскольку тогда внутри этой области выполнялось бы неравенство $z_1 > z_2$, противоречащее условию $z_1 = z_3$, которое определяет f_2).

Для матриц II типа единственное отличие в доказательстве оценок (5.6) будет заключаться в необходимости рассматривать функцию f_5 , которая задается условием $z_1 + z_2 = z_3$. Для нее проверка условий (5.6) проводится так же, как и для остальных функций. Лемма доказана.

5.3. Схема доказательства основного результата. Для доказательства равенства (5.4) представим множество $\mathcal{M}_\ell(P)$ в виде

$$\mathcal{M}_\ell(P) = \bigsqcup_{a,q} \mathcal{M}_\ell(a, q, P),$$

где $\mathcal{M}_\ell(a, q, P)$ – множество матриц $X \in \mathcal{M}_\ell(P)$, у которых фиксированы значения углового элемента $a_1 = a$ и углового минора $\det A = q$. Тогда

$$\mathcal{N}_\ell(a, q, P) = |\mathcal{M}_\ell(a, q, P)| = \sum_{a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2}^\# [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)]. \quad (5.7)$$

В последнем равенстве предполагается, что при суммировании по $a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2$ значения b_2 и c_3 находятся из равенств $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = q$ и $\det X = P$ соответственно.

В процессе доказательства от суммирования по переменным $a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2$ будет последовательно (в разном порядке) делаться переход к интегрированию по переменным $\alpha_i = a_i a_1^{-1}, \beta_i = b_i b_2^{-1}, \gamma_i = c_i c_3^{-1}$. В итоге это позволит преобразовать сумму (5.7) в интеграл (5.5).

Определим параметры $\varkappa$ и λ равенствами $a = P^\varkappa$ и $q = P^\lambda$. Дополнительно разобьем область

$$\Omega = \{(a, q) : a^2 \ll q \ll a^{1/2} P^{1/2}\} = \left\{ (a, q) : 0 \leq \varkappa \leq \frac{1}{3}, 2\varkappa \leq \lambda \leq \frac{1+\varkappa}{2} \right\},$$

внутри которой меняются пары (a, q) , на три части в зависимости от значений $\varkappa$ и λ – см. рис. 10.

$$\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup \Omega_3;$$

$$\Omega_1 = \{(a, q) \in \Omega : \lambda \leq \frac{33}{68} + \frac{\varkappa}{2}\};$$

$$\Omega_2 = \{(a, q) \in \Omega : \varkappa \geq \frac{3}{17}, \lambda > \frac{33}{68} + \frac{\varkappa}{2}\};$$

$$\Omega_3 = \{(a, q) \in \Omega : \varkappa < \frac{3}{17}, \lambda > \frac{33}{68} + \frac{\varkappa}{2}\}.$$

Рис. 10. Разбиение области изменения параметров $\varkappa$ и λ

Асимптотические формулы для $\mathcal{N}_\ell(a, q, P)$ будем доказывать тремя разными способами в зависимости от того, какой из областей Ω_i ($i = 1, 2, 3$) принадлежит пара (a, q) .

1. При малых значениях a и b (т.е. при $(a, q) \in \Omega_1$) уравнение (1.2) сначала решается как линейное относительно c_1, c_2, c_3 (см. раздел 6). Решения подсчитываются с помощью элементарных соображений. Происходит редукция к двумерной задаче, которая решается методами раздела 4.

2. Если значения a, b, c соизмеримы (т.е. при $(a, q) \in \Omega_2$), то фиксируется матрица $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ и уравнение (1.2) решается относительно неизвестных a_3, b_3, c_1, c_2, c_3 (см. раздел 7). Решения подсчитываются с помощью нелинейной параметризации Линника–Скубенко и оценок сумм Клостермана. Снова происходит редукция к двумерной задаче, которая также решается с помощью методов раздела 4.

3. В оставшемся случае, когда a малое, а b и c – большие (т.е. $(a, q) \in \Omega_3$), уравнение (1.2) решается относительно неизвестных b_3, c_1, c_2, c_3 (см. раздел 8). Сведение к двумерной задаче осуществляется с помощью специальной версии редукции Линника–Скубенко, сохраняющей значение a_3 . Возникающая двумерная задача решается элементарными методами.

Величина $\mathcal{N}_\ell(P)$, соответственно, представляется в виде

$$\mathcal{N}_\ell(P) = \mathcal{N}_\ell^{(1)}(P) + \mathcal{N}_\ell^{(2)}(P) + \mathcal{N}_\ell^{(3)}(P), \quad (5.8)$$

где

$$\mathcal{N}_\ell^{(i)}(P) = \sum_{(a,q) \in \Omega_i} \mathcal{N}_\ell(a, q, P). \quad (5.9)$$

Для каждого случая укажем порядок переходов от суммирования к интегрированию и номера утверждений, в которых эти переходы осуществляются.

1. (c_1, c_2) – леммы 6.2, 6.3 и 6.4; b_3 – лемма 6.7; b_1 – лемма 6.9; (a_2, a_3) – лемма 9.13; q – предложение 9.14.

2. (c_1, c_2, a_3, b_3) – теорема 7.1 и следствие 7.3; (a_2, b_1) – предложение 7.7; q – предложение 9.12.

3. (c_1, c_2, b_3) – теорема 8.1 и следствие 8.2; b_1 – предложение 8.3; (a_2, a_3) – лемма 9.13; q – предложение 9.14.

После этого три полученных результата подставляются в равенство (5.8). В доказательстве теоремы 5.5 делается последний переход от суммирования к интегрированию по переменной a_1 .

После перехода к матрицам, в которых часть коэффициентов становится действительными числами, символ $\#$ будет означать, что вместо условий вполне примитивности (2.9)–(2.11) выполняются лишь те необходимые ограничения, которые имеют смысл (т.е. те, в которых участвуют только целые числа):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} : & \quad \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) = 1; \\ \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} : & \quad (a_1, a_2, a_3) = 1, \quad (a_1, a_2, b_1, b_2) = 1; \\ \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} : & \quad (a_1, a_2, a_3) = 1. \end{aligned}$$

5.4. Различные варианты сумм Клостермана. Для сумм Клостермана (1.6) известна оценка

$$|K_a(m, n)| \leq \tau(a)(m, n, a)^{1/2} a^{1/2} \quad (5.10)$$

($\tau(q)$ – число делителей q), которая для простых a была доказана А. Вейлем (см. [125]), а на случай произвольных a распространена Эстерманом (см. [126]).

За распределение решений уравнения (1.3) (и эквивалентного сравнения (1.4)) отвечают тригонометрические суммы (1.5), для которых удобно использовать оценку (см. [44; лемма 1])

$$|K_a(m, n, q)| \leq \tau(a)\tau((m, n, q, a))(mn, mq, nq, a)^{1/2} a^{1/2}, \quad (5.11)$$

обобщающую неравенство (5.10).

Как отмечалось выше, при доказательстве основного результата этой статьи редукция к двумерному случаю будет проводиться тремя разными способами. В первых двух случаях возникнет необходимость в изучении решений уравнения (1.3) (сравнения (1.4)) при дополнительных условиях $(a, x, y, z) = 1$ или $(a, x) = 1$. Соответствующие тригонометрические суммы определяются равенствами

$$K_a^\times(m, n, q) = \sum_{x, y=1}^a \sum_z [az - xy = q, (a, x, y, z) = 1] e\left(\frac{mx + ny}{a}\right), \quad (5.12)$$

$$K_a^*(m, n, q) = \sum_{x=1}^a \sum_{y=1}^* \delta_a(xy + q) e\left(\frac{mx + ny}{a}\right). \quad (5.13)$$

Оценки сумм (5.12) и (5.13) сводятся к оценке (5.11), см. [24; леммы 1–3]. В обоих случаях это позволяет доказать равномерную распределенность решений сравнения $xy + q \equiv 0 \pmod{a}$ с соответствующими ограничениями (см. предложения 6.8 и 7.4 ниже). Для краткости будем использовать обозначение $K_a^\times(q) = K_a^\times(0, 0, q)$.

6. Первый вариант оценки остатка

В этом разделе редукция к двумерному случаю осуществляется с помощью элементарных соображений. Для двумерного случая аналогичные рассуждения были описаны в пп. 4.3, 4.4. При переходе к интегрированию во второй строке матрицы X применяются стандартные “двумерные” методы, основанные на оценках сумм Клостермана (см. п. 4.5).

6.1. Линейная параметризация решений.

ЛЕММА 6.1. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ с определителем $q \neq 0$ может быть дополнена до матрицы

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

удовлетворяющей условию

$$\left(q, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\right) = 1 \quad (6.2)$$

тогда и только тогда, когда $(a_1, a_2, b_1, b_2) = 1$.

Для произвольной матрицы $\bar{A}$, удовлетворяющей условию (6.2), можно найти такие целые числа c_1, c_2, c_3 , что будет выполняться равенство

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1. \quad (6.3)$$

Доказательство см. в [23].

ЛЕММА 6.2. Если матрица (6.1) удовлетворяет условию (6.2) и $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ – частное решение уравнения (6.3), то справедливы следующие утверждения.

(i) Все решения уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = P \quad (6.4)$$

относительно неизвестных c_1, c_2, c_3 имеют вид

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (u, v \in \mathbb{Z}). \quad (6.5)$$

(ii) Для разных пар (u, v) формула (6.5) дает разные решения (c_1, c_2, c_3) .

(iii) Решение (c_1, c_2, c_3) , полученное по формуле (6.5), задает вполне примитивную матрицу (1.8) тогда и только тогда, когда $(u, P) = (v, P) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Произвольный целочисленный вектор $c = (c_1, c_2, c_3)$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ и $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ с целыми коэффициентами. Из равенства (6.4) следует, что коэффициент при $\tilde{c}$ должен быть равен P . Это доказывает возможность представления в виде (6.5).

(ii) Из условия (6.2) следует линейная независимость векторов a и b . Значит, разным парам (u, v) соответствуют разные решения (c_1, c_2, c_3) .

(iii) Последнее утверждение леммы проверяется с помощью формул (6.5) и (6.2):

$$\begin{aligned} \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right) &= \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, P \right) \\ &= \left(v \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, v \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, v \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, P \right) = (v, P), \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right) &= \left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, P \right) \\ &= \left(u \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, u \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, u \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, P \right) = (u, P). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Поэтому матрица X будет вполне примитивной тогда и только тогда, когда $(u, P) = (v, P) = 1$. Лемма доказана.

Предположим, что Ω – плоская область со спрямляемой границей. Пусть $\text{Area}(\Omega)$ обозначает площадь этой области, $\mathcal{P}(\Omega)$ – ее периметр и $N(\Omega)$ – число точек решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащих внутри Ω . Для выпуклой области известно неравенство Ярика

$$|\text{Area}(\Omega) - N(\Omega)| < \mathcal{P}(\Omega) + 1.$$

Для произвольной плоской односвязной области Ω со спрямляемой границей (см., например, [67; лемма 1])

$$|\text{Area}(\Omega) - N(\Omega)| < 4(\mathcal{P}(\Omega) + 1). \quad (6.8)$$

ЛЕММА 6.3. Пусть P – натуральное число, Ω – плоская односвязная область со спрямляемой границей, $\mathcal{P}(\Omega) \gg 1$, и

$$N^*(P; \Omega) = \sum_{(u,v) \in \Omega} [(u, P) = (v, P) = 1].$$

Тогда

$$N^*(P; \Omega) = \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \text{Area}(\Omega) + O(\mathcal{P}(\Omega)P^\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле обращения Мёбиуса

$$N^*(P; \Omega) = \sum_{d_1, d_2 | P} \mu(d_1) \mu(d_2) \sum_{(u,v) \in \Omega} [d_1 | u, d_2 | v].$$

Нужная асимптотическая формула получается, если во внутренней сумме сделать замену переменных $u = d_1 u'$, $v = d_2 v'$, в новых переменных u' , v' воспользоваться неравенством (6.8) и оценить периметр уменьшенной копии области Ω как $O(\mathcal{P}(\Omega))$:

$$\begin{aligned} N^*(P; \Omega) &= \sum_{d_1, d_2 | P} \mu(d_1) \mu(d_2) \left(\frac{\text{Area}(\Omega)}{d_1 d_2} + O(\mathcal{P}(\Omega)) \right) \\ &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \text{Area}(\Omega) + O(\mathcal{P}(\Omega)P^\varepsilon). \end{aligned}$$

6.2. Переход к интегрированию в третьей строке. Рассмотрим множество матриц $X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)$, для которых матрица $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ фиксирована. Так как $q = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то значение c_3 однозначно выражается через c_1 и c_2 . Поэтому любые условия, налагаемые на переменные c_1, c_2, c_3 , можно записать в виде $(c_1, c_2) \in \Omega(\bar{A})$.

ЛЕММА 6.4. Пусть $\bar{A}$ удовлетворяет условию (6.2), Ω – выпуклая область и

$$S(\bar{A}, \Omega) = \sum_{(c_1, c_2) \in \Omega}^\# [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)].$$

Тогда

$$S(\bar{A}, \Omega) = \frac{\varphi^2(P)}{P^2 q} \int_{\Omega} [X \in \mathcal{M}_{\ell}(a, q, P)] dc_1 dc_2 + O\left(\frac{P^{1+\varepsilon}}{aq}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению множество $\mathcal{M}_{\ell}(a, q, P)$ состоит из матриц вида (3.3), (3.4), (5.1) или (5.2). Поэтому переменные c_1, c_2, c_3 должны удовлетворять некоторым условиям из следующего списка:

$$0 \leq c_1 \leq |c_2| \leq c_3, \quad 0 \leq |c_2| \leq c_1 \leq c_3, \quad c_1 + |c_2| \geq c_3.$$

Значит, область изменения переменных c_1, c_2 содержится в выпуклом многоугольнике, линейные размеры которого по лемме 5.6 оцениваются как $O(c) = O(P/q)$. Из равенства (6.5) следует, что линейные размеры соответствующего многоугольника на плоскости Ouv суть $O(bP/q^2)$. По лемме 6.3,

$$\begin{aligned} S(\bar{A}, \Omega) &= \sum_{\substack{u,v \\ (u,P)=(v,P)=1}}^{\#} [X \in \mathcal{M}_{\ell}(a, q, P), (c_1, c_2) \in \Omega] \\ &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_{\ell}(a, q, P), (c_1, c_2) \in \Omega] du dv + O\left(\frac{P^{1+\varepsilon}}{aq}\right) \\ &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2 q} \int_{\Omega} [X \in \mathcal{M}_{\ell}(a, q, P)] dc_1 dc_2 + O\left(\frac{P^{1+\varepsilon}}{aq}\right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Пусть выполняются условия леммы 6.4. Тогда

$$S(\bar{A}, \Omega) \ll \frac{P^{2+\varepsilon}}{q^3}. \quad (6.9)$$

Кроме того, при фиксированных $\tilde{a}_3$ и $\tilde{b}_3$

$$\begin{aligned} &\sum_{(c_1, c_2) \in \Omega(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3)}^{\#} [X \in \mathcal{M}_{\ell}(a, q, P)] \\ &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2 q} \int_{\tilde{a}_3}^{\tilde{a}_3+1} da_3 \int_{\tilde{b}_3}^{\tilde{b}_3+1} db_3 \sum_{(c_1, c_2) \in \Omega(a_3, b_3)} [X \in \mathcal{M}_{\ell}(a, q, P)] + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{q^3}\right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки оценки (6.9) достаточно тривиальным образом оценить интеграл из леммы 6.4. Равенство (6.10) следует из того, что каждое слагаемое в нем есть $O(P^{2+\varepsilon} q^{-3})$.

6.3. Переход к интегрированию во второй строке. Под нормой функции всегда будем понимать L^{∞} -норму.

ЛЕММА 6.6. Пусть a, D – натуральные числа и $D \mid a$. Предположим, что функция f на интервале I имеет конечное число участков монотонности. Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \equiv x_0 \pmod{D}}} f(x) = \frac{1}{D} \int_I f(x) dx + O(\|f\|), \quad (6.11)$$

$$\sum_{\substack{x \in I \\ (x,a)=D}} f(x) = \frac{\varphi(a/D)}{a} \int_I f(x) dx + O(\|f\|a^\varepsilon), \quad (6.12)$$

$$\sum_{\substack{x \in I \\ (x,a)=1}} f(x) = \frac{\varphi(a)}{a} \int_I f(x) dx + O(\|f\|a^\varepsilon). \quad (6.13)$$

Доказательство см. в [24; лемма 4].

ЛЕММА 6.7. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $q = \det A > 0$, $(a_1, a_2, b_1, b_2) = 1$, $D = (a_1, a_2)$, $(D, a_3) = 1$ и для всех n из интервала I

$$f(n) = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & n \\ z_1 & z_2 & 1 \end{array} \right|^{-3} \ll \frac{1}{q^3}.$$

Тогда для суммы

$$S^\#(I) = \sum_{n \in I}^\# f(n)$$

справедлива асимптотическая формула

$$S^\#(I) = \frac{\varphi(q)}{q} \frac{D}{\varphi(D)} \int_I f(t) dt + O(q^{-3+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть матрица A элементарными преобразованиями столбцов приводится к виду $\begin{pmatrix} D & 0 \\ \alpha & qD^{-1} \end{pmatrix}$. Тогда условие (6.2) равносильно равенству

$$\left(q, \frac{q}{D} a_3, \left| \begin{array}{cc} D & a_3 \\ \alpha & n \end{array} \right| \right) = 1. \quad (6.14)$$

Так как $(D, a_3) = 1$, то $(q, (q/D)a_3) = (q/D)(D, a_3) = q/D$ и равенство (6.14) означает, что $\left(\frac{q}{D}, \left| \begin{array}{cc} D & a_3 \\ \alpha & n \end{array} \right| \right) = 1$. Значит,

$$S^\#(I) = \sum_{n \in I} \left[\left(\frac{q}{D}, \left| \begin{array}{cc} D & a_3 \\ \alpha & n \end{array} \right| \right) = 1 \right] f(n) = \sum_{\delta | q/D} \mu(\delta) \sum_{n \in I} [\delta | (Dn - \alpha a_3)] f(n).$$

Из условия $\delta | (Dn - \alpha a_3)$ следует, что $(\delta, D) | \alpha a_3$. По условию леммы $(D, a_3) = 1$, значит, $(\delta, D) | \alpha$. Кроме того, $(D, q/D, \alpha) = (a_1, a_2, b_1, b_2) = 1$. Поэтому из соотношений $(\delta, D) | \alpha$ и $\delta | q/D$ следует, что $(\delta, D) = 1$. При $(\delta, D) = 1$ сравнение $Dn - \alpha a_3 \equiv 0 \pmod{\delta}$ равносильно условию $n \equiv n_0 \pmod{\delta}$, где $n_0 \equiv \alpha a_3 D^{-1} \pmod{\delta}$. Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться равенством (6.11):

$$\begin{aligned} S^\#(I) &= \sum_{\substack{\delta | q/D \\ (\delta, D)=1}} \mu(\delta) \sum_{\substack{n \in I \\ n \equiv n_0 \pmod{\delta}}} f(n) = \sum_{\substack{\delta | q/D \\ (\delta, D)=1}} \mu(\delta) \left(\frac{1}{\delta} \int_I f(t) dt + O(q^{-3}) \right) \\ &= \sum_{\substack{\delta | q/D \\ (\delta, D)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \int_I f(t) dt + O(q^{-3+\varepsilon}) = \frac{\varphi(q)}{q} \frac{D}{\varphi(D)} \int_I f(t) dt + O(q^{-3+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Если $(x, a) = 1$, то каждый интервал $[Y, Y + a)$ содержит ровно одно решение сравнения $xy + q \equiv 0 \pmod{a}$ относительно неизвестной y . Поэтому для произвольной функции G , определенной на прямоугольнике $[Y_1, Y_1 + Z_1] \times [Y_2, Y_2 + Z_2]$, естественной аппроксимацией для суммы

$$\Phi_{a,q}^*[G] = \sum_{Y_1 \leq x < Y_1 + Z_1}^* \sum_{Y_2 \leq y < Y_2 + Z_2} \delta_a(xy + q)G(x, y)$$

является сумма

$$S_a^*[G] = \frac{1}{a} \sum_{Y_1 \leq x < Y_1 + Z_1}^* \int_{Y_2}^{Y_2 + Z_2} G(x, y) dy.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. Пусть G – неотрицательная функция и для любого z в пределах $0 \leq z \leq \|G\|$ неравенство $G(x, y) \leq z$ задает в прямоугольнике $I = [0, a] \times [0, Z_2]$ ($Z_2 \ll q/a$) область $\Omega_z = \{(x, y) \in I: y \leq f_z(x)\}$, причем число участков монотонности для всех функций f_z ограничено абсолютной константой. Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[G] - S_a^*[G] \ll \|G\|(a, q)a^{-1/4}q^{1/2+\varepsilon}. \quad (6.15)$$

Доказательство см. в [24; теорема 4].

ЛЕММА 6.9. Пусть $a_1 = a$ и $D \mid (a, q)$. Тогда для суммы

$$S(a, q, D) = \sum_{\substack{a_2, a_3, b_1 \\ (a_1, a_2) = D}}^{\#} \int_{\mathbb{R}} [X' \in \mathcal{M}'_\ell(a, q, P)] (\det X')^{-3} db_3$$

справедлива асимптотическая формула

$$S(a, q, D) = \frac{D\varphi((D, q/D))}{q(D, q/D)} \sum_{\substack{a_2, a_3 \\ (a, a_2) = D}}^{\#} \int_{\mathbb{R}^2} [X'' \in \mathcal{M}''_\ell(a, q, P)] (\det X'')^{-3} d\beta_1 d\beta_3 \\ + O((a, q)a^{-1/4}q^{-3/2+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем указанную сумму, вводя переменные $a'_1 = a_1 D^{-1}$, $a'_2 = a_2 D^{-1}$, $a'_3 = a_3 D^{-1}$ (a'_3 – не обязательно целое):

$$S(a, q, D) = \frac{1}{D^3} \int_{\mathbb{R}} db_3 \sum_{\substack{a_3 \\ (a_3, D) = 1}} \sum_{a'_2}^* \sum_{\substack{b_1 \\ (D, b_1, b_2) = 1}} \left| \begin{array}{ccc} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{array} \right|^{-3}.$$

Избавимся от условия $(D, b_1, b_2) = 1$ с помощью функции Мёбиуса:

$$S(a_1, q, D) = \frac{1}{D^3} \sum_{\delta \mid (D, q/D)} \mu(\delta) \int_{\mathbb{R}} db_3 \sum_{\substack{a_3 \\ (a_3, D) = 1}} \sum_{a'_2}^* \sum_{b_1: \delta \mid (b_1, b_2)} \left| \begin{array}{ccc} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{array} \right|^{-3} \\ = \frac{1}{D^3} \sum_{\delta \mid (D, q/D)} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}} db'_3 \sum_{\substack{a_3 \\ (a_3, D) = 1}} \sum_{a'_2}^* \sum_{b'_1} \left| \begin{array}{ccc} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{array} \right|^{-3},$$

где $b'_1 = b_1\delta^{-1}$, $b'_2 = b_2\delta^{-1}$, $b'_3 = b_3\delta^{-1}$. К внутренней двойной сумме применим предложение 6.8. По предположению леммы

$$\left| \begin{array}{ccc} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{array} \right|^{-3} \ll \left(\frac{D\delta}{q} \right)^3.$$

Кроме того, функция $b_1 = f(a_2)$, неявно заданная равенствами

$$\left| \begin{array}{ccc} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{array} \right| = Q, \quad \left| \begin{array}{cc} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{array} \right| = q' = \frac{q}{\Delta\delta},$$

приводится к виду

$$(a'_3b'_1 - b'_3a'_1)(a'_1z_2 - a'_2z_1) = a'_1Q - q' \left| \begin{array}{cc} a'_1 & a'_3 \\ z_1 & 1 \end{array} \right|.$$

Поэтому график f состоит из конечного числа участков монотонности и предложение 6.8 действительно можно применять. Значит,

$$\begin{aligned} S(a_1, q, D) &= \frac{1}{D^3} \sum_{\delta|(D, q/D)} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}} db'_3 \sum_{\substack{a_3 \\ (a_3, D)=1}} \left(\frac{1}{a'_1} \sum_{a'_2}^* \int_{\mathbb{R}} \left| \begin{array}{ccc} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{array} \right|^{-3} db'_1 \right. \\ &\quad \left. + O\left(\left(\frac{D\delta}{q} \right)^3 \left(\frac{a}{D}, \frac{q}{D\delta} \right) \left(\frac{a}{D} \right)^{-1/4} \left(\frac{q}{D\delta} \right)^{1/2+\varepsilon} \right) \right). \end{aligned}$$

Просуммируем возникшие остатки. Переменная b'_3 меняется в интервале длины $O(q/(a\delta))$, переменная a_3 – в интервале длины $O(a)$. Поэтому сумма остатков оценивается суммой

$$\sum_{\delta|(D, q/D)} (a, q) a^{-1/4} D^{-1/4} \delta^{-1/2} q^{-3/2+\varepsilon} \ll (a, q) a^{-1/4} q^{-3/2+\varepsilon}.$$

Преобразуем сумму главных членов, переходя к переменным $a_2 = Da'_2$ и $a_3 = Da'_3$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\delta|(D, q/D)} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{db_3}{\delta} \sum_{\substack{a_3 \\ (a_3, D)=1}} \frac{D}{a_1} \sum_{\substack{a_2 \\ (a, a_2)=D}} \int_{\mathbb{R}} \delta^2 \left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{array} \right|^{-3} db_1 \\ &= \frac{D}{a} \sum_{\delta|(D, q/D)} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \sum_{\substack{a_2, a_3 \\ (a, a_2)=D}}^{\#} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{array} \right|^{-3} db_1 db_3. \end{aligned}$$

После этого остается сделать переход к переменным $\beta_1 = b_1/b_2$, $\beta_3 = b_3/b_2$, где $b_2 = (q + a_2 b_1) a_1^{-1}$. Так как

$$\frac{\partial(b_1, b_3)}{\partial(\beta_1, \beta_3)} = \frac{ab^3}{q}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}^{-3} db_1 db_3 = \frac{a}{q} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & 1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}^{-3} d\beta_1 d\beta_3, \quad (6.16)$$

то получаем нужный главный член

$$\frac{D\varphi((D, q/D))}{q(D, q/D)} \sum_{\substack{a_2, a_3 \\ (a, a_2)=D}}^{\#} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & 1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}^{-3} d\beta_1 d\beta_3.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.10. Пусть $q \gg a^2$. Тогда для величины $\mathcal{N}_\ell(a, q, P)$, задаваемой равенством (5.7), справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\ell(a, q, P) &= \varphi^2(P) \left(\frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{\mathbb{R}^4} d\beta d\gamma \sum_{a_2, a_3}^{\#} c(q, D) \frac{[X'' \in \mathcal{M}''(a, q, P)]}{(\det X'')^3} + \rho_1(a, q) \right) \\ &\quad + O(R_1(a, q, P)), \end{aligned} \quad (6.17)$$

где $D = (a, a_2)$, $R_1(a, q, P) = a^{-2} q P^{1+\varepsilon}$,

$$c(q, D) = \frac{D^2 \varphi((D, q/D))}{\varphi(D)(D, q/D)}, \quad (6.18)$$

$$\rho_1(a, q) \ll (a, q) a^{-1/4} q^{-3/2+\varepsilon}. \quad (6.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (5.11) следует, что

$$K_a^\times(q) \ll a^{1+\varepsilon}. \quad (6.20)$$

Преобразуем сумму $\mathcal{N}_\ell(a, q, P)$, пользуясь леммой 6.4 и оценкой (6.20):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\ell(a, q, P) &= \sum_{\substack{a_2, a_3, b_1, b_3 \\ b_1 a_2 + q \equiv 0 \pmod{a}}}^{\#} \left(\frac{\varphi^2(P)}{P^2 q} \int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] dc_1 dc_2 + O\left(\frac{P^{1+\varepsilon}}{aq}\right) \right) \\ &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2 q} \sum_{a_2, a_3, b_1, b_3}^{\#} \int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] dc_1 dc_2 + O\left(\frac{q P^{1+\varepsilon}}{a^2}\right). \end{aligned}$$

В двойном интеграле перейдем к переменным $\gamma_1 = c_1 c_3^{-1}$, $\gamma_2 = c_2 c_3^{-1}$. Так как $c_3 = P(\det X')^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial(c_1, c_2)}{\partial(\gamma_1, \gamma_2)} &= c_3 \left(c_3 + \frac{\partial c_3}{\partial \gamma_1} \gamma_1 + \frac{\partial c_3}{\partial \gamma_2} \gamma_2 \right) = \frac{q P^2}{(\det X')^3}, \\ dc_1 dc_2 &= \frac{q P^2}{(\det X')^3} d\gamma_1 d\gamma_2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Поэтому

$$\frac{\mathcal{N}_\ell(a, q, P)}{\varphi^2(P)} = \int_{\mathbb{R}^2} d\gamma \sum_{a_2, a_3, b_1, b_3}^{\#} \frac{[X' \in \mathcal{M}'_\ell(a, q, P)]}{(\det X')^3} + O\left(\frac{q P^{-1+\varepsilon}}{a^2}\right).$$

С помощью леммы 6.7 заменим суммирование по переменной b_3 интегрированием:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N}_\ell(a, q, P)}{\varphi^2(P)} &= \int_{\mathbb{R}^2} d\gamma \sum_{a_2, a_3, b_1}^\# \left(\frac{\varphi(q)D}{q\varphi(D)} \int_{\mathbb{R}} \frac{[X' \in \mathcal{M}'_\ell(a, q, P)]}{(\det X')^3} db_3 + O(q^{-3+\varepsilon}) \right) \\ &\quad + O\left(\frac{q^{P^{-1}+\varepsilon}}{a^2}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d\gamma \sum_{a_2, a_3, b_1}^\# \frac{\varphi(q)D}{q\varphi(D)} \int_{\mathbb{R}} \frac{[X' \in \mathcal{M}'_\ell(a, q, P)]}{(\det X')^3} db_3 \\ &\quad + O(q^{-2+\varepsilon}) + O\left(\frac{q^{P^{-1}+\varepsilon}}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Применяя лемму 6.9, приходим к равенству, равносильному формуле (6.17):

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N}_\ell(a, q, P)}{\varphi^2(P)} &= \int_{\mathbb{R}^2} d\gamma \sum_{D|(a, q)} \frac{\varphi(q)D}{q\varphi(D)} \left(\frac{D\varphi((D, q/D))}{q(D, q/D)} \right. \\ &\quad \times \sum_{\substack{a_2, a_3 \\ (a, a_2)=D}}^\# \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[X'' \in \mathcal{M}''_\ell(a, q, P)] d\beta}{(\det X'')^3} + O((a, q)a^{-1/4}q^{-3/2+\varepsilon}) \Big) \\ &\quad + O(q^{-2+\varepsilon}) + O\left(\frac{q^{P^{-1}+\varepsilon}}{a^2}\right) \\ &= \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{\mathbb{R}^4} d\beta d\gamma \sum_{a_2, a_3}^\# c(q, D) \frac{[X'' \in \mathcal{M}''_\ell(a, q, P)]}{(\det X'')^3} \\ &\quad + O((a, q)a^{-1/4}q^{-3/2+\varepsilon}) + O\left(\frac{q^{P^{-1}+\varepsilon}}{a^2}\right). \end{aligned}$$

7. Второй вариант оценки остатка

Пусть $\lambda_1(\Lambda)$ и $\lambda_2(\Lambda)$ обозначают последовательные минимумы двумерной решетки Λ , т. е. $\lambda_1(\Lambda)$ – длина кратчайшего ненулевого вектора $e_1 \in \Lambda$, а $\lambda_2(\Lambda)$ – длина кратчайшего вектора $e_2 \in \Lambda$, линейно независимого с e_1 . Через $\Lambda(A)$ обозначим решетку, состоящую из решений системы сравнений

$$a_1x + a_2y \equiv 0 \pmod{q}, \quad b_1x + b_2y \equiv 0 \pmod{q},$$

и положим

$$\lambda_2(A) = \lambda_2(\Lambda(A)), \quad \lambda_2(A^T) = \lambda_2(\Lambda(A^T)). \quad (7.1)$$

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ фиксирована, $q = \det A \neq 0$, $(a_1, a_2, b_1, b_2) = 1$ и матрица X имеет вид (1.8). Тогда для любого параллелепипеда

$$I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2) \times [Y_3, Y_3 + Z_3) \times [Y_4, Y_4 + Z_4),$$

размеры которого удовлетворяют условиям $1 \leq Z_1, Z_2 \leq q, 1 \leq Z_3, Z_4 \leq Pq$, выполняется равенство

$$\sum_{(a_3, b_3, c_1, c_2) \in I} \sum_{c_3}^{\#} [\det X = P] = \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + O(R_A(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)), \quad (7.2)$$

где

$$\begin{aligned} R_A(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = (P, q)(Pq)^\varepsilon & \left(\frac{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4}{q} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) \right. \\ & + q^{1/2} + \frac{\lambda_2(A^T)}{q^{1/2}} (Z_1 + Z_2) + \frac{\lambda_2(A)}{q^{1/2}} (Z_3 + Z_4) \\ & \left. + \frac{\lambda_2(A) \lambda_2^{1/2}(A^T)}{q} (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) \right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [23].

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Теорема 7.1 представляет собой вариант леммы 7 из работы [8]. Однако в [8] в остаточном члене не учитывался вклад слагаемых, содержащих $\lambda_2(A)$ и $\lambda_2(A^T)$. Дальнейшие рассуждения показывают, что именно эти слагаемые вносят основной вклад в итоговый остаток (см. выбор параметров r_1 и r в доказательстве предложения 9.8). При этом используется оценка $\lambda_2(A) \ll q^{1/2+\varepsilon}$, справедливая только в среднем по A .

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Пусть выполнены условия теоремы 7.1, размеры параллелепипеда

$$I' = [Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2) \times [Y_3, Y_3 + Z_3)$$

удовлетворяют неравенствам $1 \leq Z_1, Z_2 \leq q, 1 \leq Z_3 \leq Pq$ и при $(a_3, b_3, c_1) \in I'$ значения неотрицательной функции $f(a_3, b_3, c_1)$ меняются внутри интервала $[Z_4, Z_4 + V)$, где $1 \leq V \ll Z_4 \leq Pq$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{(a_3, b_3, c_1) \in I'} \sum_{0 < c_2 \leq f(a_3, b_3, c_1)} \sum_{c_3}^{\#} [\det X = P] \\ & = \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{I'} f(a_3, b_3, c_1) da_3 db_3 dc_1 \\ & \quad + O(R_A(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)) + O\left(\frac{Z_1 Z_2 Z_3 V}{q}\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя во второй сумме $f(a_3, b_3, c_1)$ на Z_4 и $Z_4 + V$, получаем соответственно нижнюю и верхнюю оценки вычисляемой суммы. Применяя теорему 7.1 и пользуясь оценкой

$$\int_{I'} dx_1 dx_2 dx_3 (f(x_1, x_2, x_3) - (Z_4 + \theta V)) \ll Z_1 Z_2 Z_3 V \quad (\theta = 0, 1),$$

приходим к утверждению следствия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. Пусть a – натуральное, q – целое, $I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2)$, где $Z_1, Z_2 > 0$, и

$$\Phi_{a,q}^\times(I) = \sum_{(x,y) \in I} \sum_z [az - xy = q, (a, x, y, z) = 1].$$

Тогда

$$\Phi_{a,q}^\times(I) = \frac{K_a^\times(q)}{a^2} Z_1 Z_2 + O(R(Z_1, Z_2)), \quad (7.4)$$

где

$$R(Z_1, Z_2) = a^{1/2+\varepsilon} + \left(\frac{Z_1}{a} + \frac{Z_2}{a} + 1 \right) (a, q) a^\varepsilon. \quad (7.5)$$

Доказательство см. в [24; теорема 2].

СЛЕДСТВИЕ 7.5. Предположим, что выполняются условия предложения 7.4 и при $(x, y) \in I$ значения функции $f(x, y)$ содержатся в отрезке $[Z_3, Z_3 + V]$, где $Z_3 > 0$ и $V \ll Z_3$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{(x,y) \in I} \sum_z [az - xy = q, (a, x, y, z) = 1] f(x, y) \\ &= \frac{K_a^\times(q)}{a^2} \int_I f(x, y) dx dy + O(a^{-1+\varepsilon} Z_1 Z_2 V) + O(Z_3 R(Z_1, Z_2)), \end{aligned}$$

где $R(Z_1, Z_2)$ определено равенством (7.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя в данной сумме $f(x, y)$ на Z_3 и $Z_3 + V$, получаем соответственно нижнюю и верхнюю оценки на данную сумму. Применяя предложение 7.4, оценки (6.20) и

$$\int_{Y_1}^{Y_1+Z_1} dx \int_{Y_2}^{Y_2+Z_2} dy (f(x, y) - (Z_3 + \theta V)) \ll Z_1 Z_2 V \quad (\theta = 0, 1),$$

приходим к утверждению следствия.

СЛЕДСТВИЕ 7.6. Предположим, что выполняются условия предложения 7.4 и при $(x, y) \in I$ значения функции $f(x, y)$ содержатся в отрезке $[0, Z_3]$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{(x,y) \in I} \sum_z [az - xy = q, (a, x, y, z) = 1] f(x, y) \\ & \ll a^{-1+\varepsilon} Z_1 Z_2 Z_3 + Z_3 R(Z_1, Z_2). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.7. Для любых натуральных $r_1, r_2 \leq a$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\ell(a, q, P) &= \varphi^2(P) \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{K_a^\times(q)}{a^2} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{[X''' \in \mathcal{M}_\ell'''(a, q, P)]}{(\det X''')^3} d\alpha d\beta d\gamma \\ &+ O(R_2(a, q, P)), \end{aligned} \quad (7.6)$$

где

$$R_2(a, q, P) = r_1^3 \sum_{a_2, b_1} R_A\left(\frac{a}{r_1}, \frac{b}{r_1}, \frac{c}{r_1}, c\right) + \frac{P^{2+\varepsilon}}{r_1 a q} + r_2^2 \frac{P^2}{q^2} R\left(\frac{a}{r_2}, \frac{b}{r_2}\right) + \frac{P^{2+\varepsilon}}{r_2 a q},$$

а остатки $R(Z_1, Z_2)$, $R_A(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ определяются равенствами (7.5), (7.3) соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.8. Для параметра $\lambda_2(A^T)$, определенного в (7.1), будем использовать тривиальную оценку $\lambda_2(A^T) \ll q/a$. Использование аналогичной оценки для $\lambda_2(A)$ не позволяет выделить главный член в теореме 3.3. В дальнейшем будет доказано (см. п. 9.1), что в среднем по A выполняется верхняя оценка $\lambda_2(A) \leq q^{1/2+\varepsilon}$, близкая к нижней. Этим обусловлена необходимость сохранения суммирования по a_2 и b_1 в остаточном члене $R_2(a, q, P)$. Аналогичная ситуация возникнет в предложении 8.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7.7. Переход от (7.10) к (7.11) будет осуществляться в два этапа. Сначала с помощью следствия 7.3 будет сделан переход от суммирования к интегрированию по переменным a_3, b_3, c_1, c_2 , затем с помощью следствия 7.5 – переход от суммирования к интегрированию по переменным a_2, b_1 .

Интервалы (их длины оценивались в лемме 5.6)

$$I_\nu = [Y_\nu, Y_\nu + Z_\nu) \quad (\nu = 1, 2, 3; \quad Z_1 = a + 1, \quad Z_2 = \frac{4q}{a} + 1, \quad Z_3 = \frac{4P}{q} + 1), \quad (7.7)$$

внутри которых соответственно меняются переменные a_3, b_3, c_1 , разобьем на r_1 равных интервалов, а интервалы $I_\nu = [Y_\nu, Y_\nu + Z_\nu)$ ($\nu = 4, 5; \quad Z_4 = a + 1, \quad Z_5 = 4q/a + 1$), внутри которых меняются a_2, b_1 , на r_2 равных интервалов:

$$I_\nu = \bigcup_{j=0}^{r_1-1} I_\nu(j), \quad I_\nu(j) = \left[Y_\nu + \frac{j}{r_1} Z_\nu, Y_\nu + \frac{j+1}{r_1} Z_\nu \right) \quad (\nu = 1, 2, 3);$$

$$I_\nu = \bigcup_{j=0}^{r_2-1} I_\nu(j), \quad I_\nu(j) = \left[Y_\nu + \frac{j}{r_2} Z_\nu, Y_\nu + \frac{j+1}{r_2} Z_\nu \right) \quad (\nu = 4, 5).$$

Определим функцию

$$H(j_1, j_2; b_1) = \frac{r_1}{q} \inf_{(a_3, b_3) \in I_1(j_1) \times I_2(j_2)} |a_1 b_3 - a_3 b_1| \quad (0 \leq j_1, j_2 < r_1). \quad (7.8)$$

Из оценок $0 \leq H(j_1, j_2; b_1) \ll a$ следует, что прямоугольник $I_1 \times I_2$ можно представить в виде $I_1 \times I_2 = \bigsqcup_{k=0}^m W_k(b_1)$, где $m \ll \log a$ и

$$W_k(b_1) = \bigsqcup_{\substack{j_1, j_2=0 \\ H(j_1, j_2; b_1) \in (2^{k-1}, 2^k]}}^{r_1-1} I_1(j_1) \times I_2(j_2) \quad (k > 0),$$

$$W_0(b_1) = \bigsqcup_{\substack{j_1, j_2=0 \\ H(j_1, j_2; b_1) \in [0, 1]}}^{r_1-1} I_1(j_1) \times I_2(j_2).$$

Данную сумму $\mathcal{N}_\ell(a, q, P)$ соответственно запишем в виде

$$\mathcal{N}_\ell(a, q, P) = \sum_{k=0}^m \mathcal{N}_{\ell, k}(a, q, P), \quad (7.9)$$

где

$$\mathcal{N}_{\ell, k}(a, q, P) = \sum_{a_2, b_1} \sum_{(a_3, b_3) \in W_k(b_1)} \sum_{c_1, c_2}^\# [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)]. \quad (7.10)$$

Тогда предложение 7.7 будет доказано, если мы установим справедливость равенства

$$\mathcal{N}_{\ell,k}(a, q, P) = \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{K_a^\times(q)}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} F_k(a_2, b_1) da_2 db_1 + O(R_2(a, q, P)), \quad (7.11)$$

где

$$F_k(a_2, b_1) = \int_{W_k(b_1)} da_3 db_3 \int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] dc_1 dc_2. \quad (7.12)$$

Действительно, из (7.11) и (7.9) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\ell(a, q, P) &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{K_a^\times(q)}{a^2} \int_{\mathbb{R}^6} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] da_2 da_3 db_1 db_3 dc_1 dc_2 \\ &\quad + O(R_2(a, q, P)). \end{aligned}$$

Таким образом, для получения равенства (7.6) остается перейти от переменных $a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2$ к переменным $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$, воспользовавшись соотношениями (6.21), (6.16) и

$$\frac{da_2 da_3}{(\det X'')^3} = \frac{d\alpha_2 d\alpha_3}{a(\det X''')^3}.$$

Оценим число прямоугольников разбиения

$$I_1 \times I_2 = \bigsqcup_{j_1, j_2=0}^{r_1-1} I_1(j_1) \times I_2(j_2) \quad (7.13)$$

в каждом из множеств $W_k(b_1)$. Если $I_1(j_1) \times I_2(j_2) \subset W_k(b_1)$, то найдется точка $(a_3, b_3) \in I_1(j_1) \times I_2(j_2)$, для которой будет выполняться неравенство $|a_1 b_3 - a_3 b_1| \leq 2^{k+1} q / r_1$. Так как $a_1 = a$, то это неравенство на плоскости $Oa_3 b_3$ задает полосу ширины $2^{k+2} q / (ar_1) \ll 2^k b / r_1$ (в направлении оси Ob_3). Значит, над каждой точкой оси Oa_3 лежит $O(2^k)$ прямоугольников разбиения (7.13), имеющих с этой полосой общие точки. Следовательно, множество $W_k(b_1)$ состоит из $O(r_1 \cdot 2^k)$ прямоугольников этого разбиения.

Представим сумму $\mathcal{N}_{\ell,k}(a, q, P)$ в виде

$$\mathcal{N}_{\ell,k}(a, q, P) = \sum_{a_2, b_1} G_k(a_2, b_1), \quad (7.14)$$

где

$$G_k(a_2, b_1) = \sum_{(a_3, b_3) \in W_k(b_1)} \sum_{c_1, c_2}^\# [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)].$$

Докажем асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} G_k(a_2, b_1) &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} F_k(a_2, b_1) \\ &\quad + O\left(r_1^3 R_A\left(\frac{a}{r_1}, \frac{b}{r_1}, \frac{c}{r_1}, c\right)\right) + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{r_1 q^2}\right), \end{aligned} \quad (7.15)$$

где $F_k(a_2, b_1)$ определено равенством (7.12).

Отметим, что число точек в каждом из параллелепипедов разбиения (7.13) можно оценить как $O(qr_1^{-2})$. Поэтому из равенства (6.10) (см. следствие 6.5) следует, что для любого прямоугольника $I_1(j_1) \times I_2(j_2)$ можно пользоваться следующей формулой с тривиальной оценкой остаточного члена:

$$\begin{aligned} & \sum_{(a_3, b_3) \in I_1(j_1) \times I_2(j_2)} \sum_{c_1, c_2}^{\#} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] = \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \\ & \times \int_{I_1(j_1) \times I_2(j_2)} da_3 db_3 \int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] dc_1 dc_2 + O\left(\frac{P^2}{q^2 r_1^2}\right). \end{aligned} \quad (7.16)$$

При $k = 0$ равенство (7.15) следует из (7.16). Поэтому будем в дальнейшем предполагать, что $k > 0$.

При фиксированных a_2, b_1 по определению матриц Минковского (3.3), (3.4) пара переменных (a_3, b_3) может меняться внутри некоторого прямоугольника $\Pi(a_2, b_1)$. Обозначим через $\Omega_{1,2}(a_2, b_1)$ область, состоящую из тех прямоугольников разбиения (7.13), которые полностью содержатся в $\Pi(a_2, b_1)$, а через $\Omega'_{1,2}(a_2, b_1)$ – область, состоящую из прямоугольников разбиения (7.13), имеющих общие точки с границей $\Pi(a_2, b_1)$. Очевидно, что $\Omega'_{1,2}(a_2, b_1)$ состоит из $O(r_1)$ прямоугольников разбиения (7.13), и по формуле (7.16)

$$\begin{aligned} & \sum_{(a_3, b_3) \in \Omega'_{1,2}(a_2, b_1)} \sum_{c_1, c_2}^{\#} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] \\ & = \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{\Omega'_{1,2}(a_2, b_1)} da_3 db_3 \int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] dc_1 dc_2 + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{q^2 r_1}\right). \end{aligned}$$

Поэтому для доказательства равенства (7.15) достаточно проверить, что

$$\begin{aligned} & \sum_{(a_3, b_3) \in \widetilde{W}_k(a_2, b_1)} \sum_{c_1, c_2}^{\#} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] \\ & = \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{\widetilde{W}_k(a_2, b_1)} da_3 db_3 \int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] dc_1 dc_2 \\ & \quad + O\left(r_1^3 R_A\left(\frac{a}{r_1}, \frac{b}{r_1}, \frac{c}{r_1}, c\right)\right) + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{q^2 r_1}\right), \end{aligned} \quad (7.17)$$

где $\widetilde{W}_k(a_2, b_1) = W_k(b_1) \cap \Omega_{1,2}(a_2, b_1)$.

Зафиксируем произвольный прямоугольник $I_1(j_1) \times I_2(j_2) \subset \widetilde{W}_k(a_2, b_1)$. На каждом из параллелепипедов $I_1(j_1) \times I_2(j_2) \times I_3(j_3)$ применим следствие 7.3. Так как $(a_3, b_3) \in W_k(b_1)$ ($k > 0$), то $|a_1 b_3 - a_3 b_1| \gg U = 2^k q / r_1$, и по лемме 5.7 для каждой из функций f_i , задающих границу множества $\Omega(\bar{A})$, выполняются оценки

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_3} \ll \frac{r_1}{2^k} \frac{P}{aq}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial b_3} \ll \frac{r_1}{2^k} \frac{P}{bq}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial c_1} \ll \frac{r_1}{2^k} \frac{P}{cq}. \quad (7.18)$$

Значит, на каждом из параллелепипедов $I_1(j_1) \times I_2(j_2) \times I_3(j_3)$ значения функции f_i (при условии, что ее график задает границу) содержатся в интервале

длины $V = O(P \cdot 2^{-k} q^{-1})$. Согласно следствию 7.3

$$\begin{aligned} & \sum_{(a_3, b_3, c_1) \in I_1(j_1) \times I_2(j_2) \times I_3(j_3)} \sum_{c_2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] \\ &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{I_1(j_1) \times I_2(j_2) \times I_3(j_3)} da_3 db_3 dc_1 \int_{\mathbb{R}} dc_2 [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] \\ &+ O\left(R_A\left(\frac{a}{r_1}, \frac{b}{r_1}, \frac{c}{r_1}, c\right)\right) + O\left(\frac{P^2}{r_1^3 q^2 \cdot 2^k}\right). \end{aligned}$$

Суммируя последнее равенство по j_3 и по прямоугольникам $I_1(j_1) \times I_2(j_2) \subset \widetilde{W}_k(a_2, b_1)$ (число которых есть $O(r_1 \cdot 2^k)$), приходим к равенству (7.17). Таким образом, равенство (7.15) тоже доказано.

Подставляя (7.15) в (7.14), получаем, что для доказательства основной формулы (7.6) достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\begin{aligned} \sum_{a_2, b_1}^\times F_k(a_2, b_1) &= \frac{K_a^\times(q)}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} F_k(a_2, b_1) da_2 db_1 + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{ar_1}\right) \\ &+ O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{ar_2}\right) + O\left(r_2^2 \frac{P^2}{q} R\left(\frac{a}{r_2}, \frac{b}{r_2}\right)\right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Отметим, что

$$\int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] dc_1 dc_2 \ll \frac{P^2}{q^2}, \quad (7.20)$$

поэтому для функции F_k всегда выполняется тривиальная оценка

$$F_k(a_2, b_1) \ll \frac{2^k}{r_1} \frac{P^2}{q}. \quad (7.21)$$

Поэтому, согласно следствию 7.6, в каждом из прямоугольников разбиения

$$I_4 \times I_5 = \bigsqcup_{j_4, j_5=0}^{r_2-1} I_4(j_4) \times I_5(j_5) \quad (7.22)$$

можно применять формулу

$$\begin{aligned} \sum_{(a_2, b_1) \in I_4(j_4) \times I_5(j_5)}^\times F_k(a_2, b_1) &= \frac{K_a^\times(q)}{a^2} \int_{I_4(j_4) \times I_5(j_5)} F_k(a_2, b_1) da_2 db_1 \\ &+ O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{ar_2^2}\right) + O\left(\frac{P^2}{q} R\left(\frac{a}{r_2}, \frac{b}{r_2}\right)\right). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Граница области изменения пары переменных (a_2, b_1) определяется условиями $b_2 \geq a_1$ и $b_2 \geq |b_1|$ (где $b_2 = (q + a_2 b_1)/a_1$) и поэтому состоит из участков графиков функций

$$b_1(a_2) = \frac{q - a_1^2}{a_2}, \quad b_1(a_2) = \frac{q}{\pm a_1 - a_2}. \quad (7.24)$$

Обозначим через $\Omega_{4,5}$ область, состоящую из тех прямоугольников разбиения (7.22), которые полностью содержатся в области изменения (a_2, b_1) , а через $\Omega'_{4,5}$ – область, состоящую из тех прямоугольников разбиения (7.22), которые пересекают границу области изменения (a_2, b_1) . Из монотонности функций (7.24) следует, что $\Omega'_{4,5}$ состоит из $O(r_2)$ прямоугольников разбиения (7.22). Применяя в каждом из них формулу (7.23), получаем равенство

$$\sum_{(a_2, b_1) \in \Omega'_{4,5}}^{\times} F_k(a_2, b_1) = \frac{K_a^{\times}(q)}{a^2} \int_{\Omega'_{4,5}} F_k(a_2, b_1) da_2 db_1 + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{ar_2}\right) + O\left(\frac{P^2}{q} R\left(\frac{a}{r_2}, \frac{b}{r_2}\right)\right).$$

Поэтому для доказательства равенства (7.19) достаточно проверить справедливость асимптотической формулы

$$\sum_{(a_2, b_1) \in \Omega_{4,5}}^{\times} F_k(a_2, b_1) = \frac{K_a^{\times}(q)}{a^2} \int_{\Omega_{4,5}} F_k(a_2, b_1) da_2 db_1 + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{ar_1}\right) + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{ar_2}\right) + O\left(r_2^2 \frac{P^2}{q} R\left(\frac{a}{r_2}, \frac{b}{r_2}\right)\right).$$

Это равенство в свою очередь является следствием того, что для любого прямоугольника $I_4(j_4) \times I_5(j_5) \subset \Omega_{4,5}$

$$\sum_{(a_2, b_1) \in I_4(j_4) \times I_5(j_5)}^{\times} F_k(a_2, b_1) = \frac{K_a^{\times}(q)}{a^2} \int_{I_4(j_4) \times I_5(j_5)} F_k(a_2, b_1) da_2 db_1 + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{ar_1 r_2^2}\right) + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{ar_2^3}\right) + O\left(\frac{P^2}{q} R\left(\frac{a}{r_2}, \frac{b}{r_2}\right)\right).$$

Последнее соотношение вытекает из следствия 7.5 при условии, что значения $F_k(a_2, b_1)$ меняются внутри интервала длины

$$V \ll \frac{P^2}{q} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (7.25)$$

Проверим справедливость этого условия.

Так как $(a_3, b_3) \in W_k(b_1)$, то по лемме 5.7 каждая из функций f_i , задающих границу области $\Omega(\bar{A})$ (при $b_2 = (q - a_2 b_1) a_1^{-1}$), удовлетворяет оценкам, аналогичным оценкам (7.18):

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_2} \ll \frac{r_1}{2^k} \frac{P}{aq}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial b_1} \ll \frac{r_1}{2^k} \frac{P}{bq}.$$

Поэтому при $(a_2, b_1) \in I_4(j_4) \times I_5(j_5)$ площадь области $\Omega(\bar{A})$ может меняться внутри интервала длины $O\left(\frac{r_1}{2^k} \frac{P^2}{r_2 q^2}\right)$. Это приводит к тому, что значения $F_k(a_2, b_1)$ могут меняться в интервале длины

$$O\left(\text{Area}(W_k(b_1)) \frac{r_1}{2^k} \frac{P^2}{r_2 q^2}\right) = O\left(\frac{P^2}{r_2 q}\right),$$

что согласуется с оценкой (7.25).

Значения $F_k(a_2, b_1)$ могут меняться и из-за того, что меняется область W_k . Пусть разным значениям b_1 соответствуют разные области $W_k(b_1)$. Предположим, что $b_1, b'_1 \in I_5(j_5)$ и $W_k(b_1) \neq W_k(b'_1)$. Пусть, например, $I_1(j_1) \times I_2(j_2) \subset W_k(b_1) \setminus W_k(b'_1)$, т. е.

$$H(j_1, j_2; b_1) \in (2^{k-1}, 2^k], \quad H(j_1, j_2; b'_1) \notin (2^{k-1}, 2^k], \quad (7.26)$$

где функция H определена равенством (7.8). Значения функции H при фиксированных j_1, j_2 и разных b_1, b'_1 могут отличаться на $O(r_1/r_2)$. Кроме того, $H(j_1, j_2 + 1; b_1) - H(j_1, j_2; b_1) \gg 1$. Поэтому при фиксированном j_1 число номеров j_2 , для которых могут выполняться условия (7.26), можно оценить как $O(r_1/r_2 + 1)$. Таким образом, площади фигур $W_k(b_1)$ и $W_k(b'_1)$ отличаются не более чем на

$$O\left(\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)r_1 \frac{q}{r_1^2}\right) = O\left(q\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right).$$

Отсюда и из оценки (7.20) следует, что значения $F_k(a_2, b_1)$ при этом могут меняться в интервале длины

$$O\left(\frac{P^2}{q^2}q\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right) = O\left(\frac{P^2}{q}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right),$$

что снова согласуется с оценкой (7.25).

8. Третий вариант оценки остатка

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ и коэффициент a_3 фиксированы, $q = \det A \neq 0$, $(a_1, a_2, b_1, b_2) = 1$, $D = (a_1, a_2)$, $(D, a_3) = 1$, и матрица X имеет вид (1.8). Тогда для любого прямоугольника

$$I = [Y_2, Y_2 + Z_2) \times [Y_3, Y_3 + Z_3) \times [Y_4, Y_4 + Z_4),$$

размеры которого удовлетворяют условиям $1 \leq Z_2 \leq q$, $1 \leq Z_3, Z_4 \leq Pq$, выполняется равенство

$$\sum_{(b_3, c_1, c_2) \in I} \sum_{c_3}^{\#} [\det X = P] = \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{D}{\varphi(D)} Z_2 Z_3 Z_4 + O(R_A(Z_2, Z_3, Z_4)), \quad (8.1)$$

где

$$R_A(Z_2, Z_3, Z_4) = (P, q)(Pq)^\varepsilon \left(\frac{Z_2 Z_3 Z_4}{q} \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) D + q^{1/2} + \lambda_2^{1/2}(A)(Z_3 + Z_4) \right)$$

и $\lambda_2(A)$ определено в (7.1).

Доказательство см. в [23].

СЛЕДСТВИЕ 8.2. Пусть выполнены условия теоремы 8.1, размеры прямоугольника

$$I' = [Y_2, Y_2 + Z_2) \times [Y_3, Y_3 + Z_3)$$

удовлетворяют неравенствам $1 \leq Z_2 \leq q$, $1 \leq Z_3 \leq Pq$ и при $(b_3, c_1) \in I'$ значения неотрицательной функции $f(b_3, c_1)$ меняются внутри интервала $[Z_4, Z_4 + V)$, где $1 \leq V \ll Z_4 \leq Pq$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{(b_3, c_1) \in I'} \sum_{0 < c_2 \leq f(b_3, c_1)} \sum_{c_3}^{\#} [\det X = P] &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{D}{\varphi(D)} \int_{I'} f(b_3, c_1) db_3 dc_1 \\ &+ O(R_A(Z_2, Z_3, Z_4)) + O\left(\frac{Z_2 Z_3 V}{q}\right). \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 7.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Пусть r – натуральное число и $1 \leq r \leq a$. Тогда для суммы $\mathcal{N}_\ell(a, q, P)$, задаваемой равенством (5.7), справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\ell(a, q, P) &= \varphi^2(P) \left(\frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{\mathbb{R}^4} d\beta d\gamma \sum_{a_2, a_3}^{\#} c(q, D) \frac{[X'' \in \mathcal{M}_\ell''(a, q, P)]}{(\det X'')^3} + \rho_3(a, q) \right) \\ &+ O(R_3(a, q, P)), \end{aligned}$$

где $c(q, D)$ определено равенством (6.18), $\rho_3(a, q) \ll aq^{-2+\varepsilon}$,

$$R_3(a, q, P) = r^2 a \sum_{a_2, b_1} R_A\left(\frac{b}{r}, \frac{c}{r}, c\right) + \frac{P^{2+\varepsilon}}{raq}$$

и $R_A(Z_2, Z_3, Z_4)$ – остаток из теоремы 8.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть доказательства по сути повторяет доказательство предложения 7.7.

Интервалы $I_2 = [Y_2, Y_2 + Z_2)$, $I_3 = [Y_3, Y_3 + Z_3)$ (см. (7.7)), внутри которых соответственно меняются переменные b_3, c_1 , разобьем на r равных интервалов:

$$I_\nu = \bigsqcup_{j=0}^{r-1} I_\nu(j), \quad I_\nu(j) = \left[Y_\nu + \frac{j}{r} Z_\nu, Y_\nu + \frac{j+1}{r} Z_\nu \right) \quad (\nu = 2, 3). \quad (8.2)$$

Определим функцию

$$H(j; b_1) = \frac{r}{q} \inf_{b_3 \in I_2(j)} |a_1 b_3 - a_3 b_1| \quad (0 \leq j < r).$$

Интервал I_2 представим в виде $I_2 = \bigsqcup_{k=0}^m W_k(b_1)$, где $m \ll \log a$,

$$W_k(b_1) = \bigsqcup_{\substack{j=0 \\ H(j; b_1) \in (2^{k-1}, 2^k]}}^{r-1} I_2(j) \quad (k > 0), \quad W_0(b_1) = \bigsqcup_{\substack{j=0 \\ H(j; b_1) \in [0, 1]}}^{r-1} I_2(j).$$

Данную сумму $\mathcal{N}_\ell(a, q, P)$ запишем в виде

$$\mathcal{N}_\ell(a, q, P) = \sum_{k=0}^m \mathcal{N}_{\ell,k}(a, q, P), \quad (8.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\ell,k}(a, q, P) &= \sum_{a_2, a_3, b_1} G_k(a_2, a_3, b_1), \\ G_k(a_2, a_3, b_1) &= \sum_{b_3 \in W_k(b_1)} \sum_{c_1, c_2}^\# [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)]. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Проверим справедливость асимптотической формулы

$$\begin{aligned} G_k(a_2, a_3, b_1) &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{D}{\varphi(D)} \int_{W_k(b_1)} db_3 \int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] dc_1 dc_2 \\ &\quad + O\left(r \cdot 2^k R\left(\frac{b}{r}, \frac{c}{r}, c\right)\right) + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{raq^2}\right). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Для этого оценим сначала число интервалов $I_2(j)$, содержащихся в каждом из множеств $W_k(b_1)$. Если $I_2(j) \subset W_k(b_1)$, то найдется точка $b_3 \in I_2(j)$, для которой будет выполняться неравенство

$$|a_1 b_3 - a_3 b_1| \leq \frac{2^{k+1}q}{r}. \quad (8.6)$$

Так как $a_1 = a$, то это неравенство на оси Ob_3 задает отрезок длины $2^{k+2}q/(ar)$. Значит, существует $O(2^k)$ интервалов $I_2(j)$, которые имеют общие точки с этим отрезком, т. е. множество $W_k(b_1)$ состоит из $O(2^k)$ интервалов разбиения.

Из равенства (6.10) следует, что для любого интервала $I_2(j)$ выполняется асимптотическая формула с тривиальной оценкой остаточного члена:

$$\begin{aligned} \sum_{b_3 \in I_2(j)} \sum_{c_1, c_2}^\# [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{D}{\varphi(D)} \\ &\quad \times \int_{I_2(j)} db_3 \int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] dc_1 dc_2 + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{raq^2}\right). \end{aligned} \quad (8.7)$$

При $k = 0$ равенство (8.5) следует из (8.7). Поэтому будем в дальнейшем предполагать, что $k > 0$.

Равенство (8.5) будет доказано, если для любого интервала $I_2(j) \subset W_k(b_1)$ будет установлена справедливость формулы

$$\begin{aligned} \sum_{b_3 \in I_2(j)} \sum_{c_1, c_2}^\# [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] \\ = \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{D}{\varphi(D)} \int_{I_2(j)} db_3 \int_{\mathbb{R}^2} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] dc_1 dc_2 \\ + O\left(rR\left(\frac{b}{r}, \frac{c}{r}, c\right)\right) + O\left(\frac{P^{2+\varepsilon}}{r \cdot 2^k a q^2}\right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

(Для интервалов $I_2(j)$, которые пересекаются с $W_k(b_1)$ лишь частично, достаточно применить (8.7).)

Если $b_3 \in W_k(b_1)$, то $|a_1 b_3 - a_3 b_1| \gg U = 2^k q/r$. Поэтому из условий (5.6) следует, что для каждой из функций f_i , графики которых задают границу множества $\Omega(\bar{A})$, выполняются оценки

$$\frac{\partial f_i}{\partial b_3} \ll \frac{r}{2^k} \frac{P}{bq}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial c_1} \ll \frac{r}{2^k}.$$

Значит на каждом из прямоугольников $I_2(j_2) \times I_3(j_3)$ значения функций f_i (при условии, что соответствующая часть графика задает границу) содержатся в интервале длины $V = O(Pq^{-1} \cdot 2^{-k})$. На каждом из параллелепипедов $I(j_2, j_3) = I_2(j_2)$, где $I_2(j_2) \subset W_k$, применим следствие 8.2:

$$\begin{aligned} & \sum_{(b_3, c_1) \in I_2(j_2) \times I_3(j_3)} \sum_{c_2}^{\#} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] \\ &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{D}{\varphi(D)} \int_{I_2(j_2) \times I_3(j_3)} db_3 dc_1 \int_{\mathbb{R}} dc_2 [X \in \mathcal{M}_\ell(P)] \\ &+ O\left(R\left(\frac{b}{r}, \frac{c}{r}, c\right)\right) + O\left(\frac{P^2}{2^k r^2 a q^2}\right). \end{aligned}$$

Суммируя полученное равенство по j_3 , приходим к (8.8). Тем самым, равенство (8.5) доказано.

Дальнейшие шаги будут отличаться от доказательства предложения 7.7.

Из равенств (8.3)–(8.5) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\ell(a, q, P) &= \frac{\varphi^2(P)}{P^2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{a_2, a_3, b_1}^{\#} \frac{D}{\varphi(D)} \int_{\mathbb{R}^3} [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)] db_3 dc_1 dc_2 \\ &+ O(R_3(a, q, P)). \end{aligned}$$

С помощью равенств (6.21) перейдем к переменным γ_1, γ_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\ell(a, q, P) &= \varphi^2(P) \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{a_2, a_3, b_1}^{\#} \frac{D}{\varphi(D)} \int_{\mathbb{R}^2} d\gamma \int_{\mathbb{R}} \frac{db_3 [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)]}{(\det X')^3} \\ &+ O(R_3(a, q, P)) \\ &= \varphi^2(P) \frac{\varphi(q)}{q} \int_{\mathbb{R}^2} S(a, q, \gamma) d\gamma + O(R_3(a, q, P)), \end{aligned}$$

где

$$S(a, q, \gamma) = \sum_{a_2, a_3, b_1}^{\#} \frac{D}{\varphi(D)} \int_{\mathbb{R}} \frac{db_3 [X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)]}{(\det X')^3}. \quad (8.9)$$

Для доказательства предложения остается проверить, что для суммы $S(a, q, \gamma)$ справедлива асимптотическая формула

$$S(a, q, \gamma) = \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^2} d\beta \sum_{a_2, a_3}^{\#} c(q, D) \frac{[X'' \in \mathcal{M}_\ell''(a, q, P)]}{(\det X'')^3} + O(aq^{-2+\varepsilon}), \quad (8.10)$$

где $c(q, D)$ определено равенством (6.18).

Предположим, что значения a_2, a_3, b_3, γ_1 и γ_2 фиксированы, и рассмотрим сумму

$$\sigma(I) = \sum_{b_1 \in I} \frac{[(a_1, a_2, b_1, b_2) = 1]}{(\det X')^3}.$$

Пусть (u_0, v_0) – частное решение уравнения $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ u & v \end{vmatrix} = D$. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ u_0 q/d & v_0 q/d \end{vmatrix} = q$$

и все решения уравнения $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = q$ относительно неизвестных b_1, b_2 можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 q/D + t a_1/D \\ v_0 q/D + t a_2/D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1/D & u_0 \\ a_2/D & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ q/D \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

Так как $\begin{pmatrix} a_1/D & u_0 \\ a_2/D & v_0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, то $(b_1(t), b_2(t)) = (t, q/D)$ и $(a_1, a_2, b_1(t), b_2(t)) = (D, t, q/D)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma(I) &= \sum_{t: b_1(t) \in I} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1(t) & b_2(t) & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}^{-3} \left[\left(D, t, \frac{q}{D} \right) = 1 \right] \\ &= \sum_{\delta | (D, q/D)} \mu(\delta) \sum_{t: b_1(\delta t) \in I} F(t), \end{aligned}$$

где

$$F(t) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1(\delta t) & b_2(\delta t) & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}^{-3}.$$

Эта функция имеет конечное число участков монотонности и удовлетворяет оценке $F(t) \ll q^{-3}$. По лемме 6.6

$$\begin{aligned} \sigma(I) &= \sum_{\delta | (D, q/D)} \mu(\delta) \left(\frac{D}{\delta a} \int_I \frac{db_1}{(\det X')^3} + O\left(\frac{1}{q^3}\right) \right) \\ &= \frac{D}{a} \frac{\varphi((D, q/D))}{(D, q/D)} \int_I \frac{db_1}{(\det X')^3} + O(q^{-3+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Полученная формула для $\sigma(I)$ позволяет в равенстве (8.9) заменить суммирование по переменной b_1 интегрированием. Пользуясь определением величины $c(q, D)$ (6.18), находим, что

$$S(a, q, \gamma) = \sum_{a_2, a_3}^{\#} \frac{c(q, D)}{a} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{db_1 db_3 [X' \in \mathcal{M}'_{\ell}(a, q, P)]}{(\det X')^3} + O(aq^{-2+\varepsilon}).$$

Переходя от переменных b_1, b_3 к переменным β_1, β_3 и пользуясь равенствами (6.16), получаем нужную формулу (8.10). Предложение 8.3 доказано.

9. Завершение доказательства основного результата

9.1. О приведенных базисах в плоских решетках.

ЛЕММА 9.1. Пусть Q – натуральное число, $a_1, \dots, a_Q$ и $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_Q$ – действительные числа, а g – непрерывно дифференцируемая функция, заданная на отрезке $[\lambda_1, \lambda_Q]$. Тогда

$$\sum_{j=1}^Q a_j g(\lambda_j) = g(\lambda_1) \sum_{j=1}^Q a_j + \int_{\lambda_1}^{\lambda_Q} g'(\lambda) \sum_{j=1}^Q a_j [\lambda_j \geq \lambda] d\lambda. \quad (9.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки утверждения леммы достаточно преобразовать интеграл, стоящий в правой части равенства (9.1):

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1}^{\lambda_Q} g'(\lambda) \sum_{j=1}^Q a_j [\lambda_j \geq \lambda] d\lambda &= \sum_{j=1}^Q a_j \int_{\lambda_1}^{\lambda_Q} [\lambda \leq \lambda_j] g'(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{j=1}^Q a_j \int_{\lambda_1}^{\lambda_j} g'(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^Q a_j (g(\lambda_j) - g(\lambda_1)). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Предположим, что выполняются условия леммы 9.1 и $a_1 = \dots = a_Q = 1$. Тогда

$$\sum_{j=1}^Q g(\lambda_j) = Qg(\lambda_1) + \int_{\lambda_1}^{\lambda_Q} g'(\lambda) \sum_{j=1}^Q [\lambda_j \geq \lambda] d\lambda.$$

ЛЕММА 9.3. Пусть $t \geq 1$ – действительное число. Тогда количество решеток $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ таких, что $\det \Lambda = q$ и $\lambda_2(\Lambda) \geq t\sqrt{q}$, можно оценить как $O(q^{1+\varepsilon}t^{-2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\lambda_2(\Lambda) \leq q$, то утверждение леммы, очевидно, справедливо при $t > \sqrt{q}$. Поэтому будем в дальнейшем предполагать, что $t \leq \sqrt{q}$. Пусть (e_1, e_2) – приведенный базис решетки Λ с определителем q (т. е. e_1 – кратчайший вектор решетки и проекция e_2 на e_1 лежит в пределах от $-e_1/2$ до $e_1/2$). Тогда из неравенства $\|e_2\| \geq t\sqrt{q}$ следует, что $\|e_1\| \leq 2\sqrt{q}/t$. Для фиксированного вектора $e_1 = (x_1, y_1)$ конец вектора $e_2 = (x_2, y_2)$ должен лежать на

прямой $\{(x, y): xy_1 - yx_1 = q\}$ и удовлетворять условию $-\|e_1\|^2/2 < (e_1, e_2) \leq \|e_1\|^2/2$. Поэтому вектор e_2 можно выбрать (x_1, y_1) способами. Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda: \det \Lambda = q} [\lambda_2(\Lambda) \geq t\sqrt{q}] &\ll \sum_{0 \leq x_1, y_1 \leq 2\sqrt{q}/t} (x_1, y_1) \\ &\ll \sum_{d|q, d \leq 2\sqrt{q}/t} d \sum_{0 \leq x_1, y_1 \leq 2\sqrt{q}/t} [d \mid (x_1, y_1)] \\ &\ll \sum_{d|q, d \leq 2\sqrt{q}/t} d \left(\frac{\sqrt{q}}{dt} + 1 \right)^2 \ll q^{1+\varepsilon} t^{-2}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 9.4. Пусть $\beta \leq 2$. Тогда

$$\sum_{\Lambda: \det \Lambda = q} \lambda_2^\beta(\Lambda) \ll q^{1+\beta/2+\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следствием 9.2, полагая $g(\lambda) = \lambda^\beta$. В качестве $\lambda_1, \dots, \lambda_Q$ выберем числа $\lambda_2(\Lambda)$, взятые для всех решеток Λ с определителем q и упорядоченные в порядке возрастания. При этом $Q = \sigma(q) \ll q^{1+\varepsilon}$ и $\lambda_1 \ll \sqrt{q}$ (всегда можно выбрать вектор e_1 длины порядка $\sqrt{q}$ и дополнить его до приведенного базиса с определителем q). Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda: \det \Lambda = q} \lambda_2^\beta(\Lambda) &\ll q^{1+\beta/2+\varepsilon} + \int_{\sqrt{q}}^q \lambda^{\beta-1} \sum_{\Lambda: \det \Lambda = q} [\lambda_2(\Lambda) \geq \lambda] d\lambda \\ &\ll q^{1+\beta/2+\varepsilon} + \sqrt{q} \int_1^{\sqrt{q}} (t\sqrt{q})^{\beta-1} \sum_{\Lambda: \det \Lambda = q} \left[\frac{\lambda_2(\Lambda)}{\sqrt{q}} \geq t \right] dt. \end{aligned}$$

Подставляя в последний интеграл оценку из леммы 9.3, приходим к утверждению леммы.

СЛЕДСТВИЕ 9.5. Пусть $\beta \leq 2$ и

$$\mathcal{A}_\ell(a, q) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P) \right\}.$$

Тогда

$$\sum_{a, a_2, b_1} \lambda_2^\beta(A) [A \in \mathcal{A}_\ell(a, q)] \ll q^{1+\beta/2+\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем данную сумму:

$$\begin{aligned} &\sum_{\Lambda: \det \Lambda = q} \lambda_2^\beta(\Lambda) \sum_{a, a_2, b_1} [A \in \mathcal{A}_\ell(a, q), \Lambda(A) = \Lambda] \\ &\leq \sum_{\Lambda: \det \Lambda = q} \lambda_2^\beta(\Lambda) \sum_{a, a_2, b_1} [A \in \mathcal{A}_\ell(a, q), \Lambda(A) = \Lambda]. \end{aligned}$$

Согласно свойству 3° приведенных матриц, каждому слагаемому во внутренней сумме соответствует некоторый базис Вороного решетки Λ , причем каждому

базису Вороного соответствует не более 4 матриц A . Следовательно, внутреннюю сумму с точностью до константы можно оценить числом минимальных базисов, то есть

$$\sum_{a, a_2, b_1} [A \in \mathcal{A}_\ell(a, q), \Lambda(A) = \Lambda] \ll l \left(\frac{a}{q} \right) \ll \log(q+1).$$

Оценивая оставшуюся сумму с помощью леммы 9.4, приходим к утверждению следствия.

СЛЕДСТВИЕ 9.6. Пусть $\beta \leq 2$, $0 < A_1 \leq A_2$ и α – произвольное действительное число. Тогда

$$\sum_{A_1 \leq a < A_2} a^\alpha \sum_{a_2, b_1} \lambda_2^\beta(A) [A \in \mathcal{A}_\ell(a, q)] \ll (A_1^\alpha + A_2^\alpha) q^{1+\beta/2+\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужная оценка получается из следствия 9.5 с помощью преобразования Абеля

$$\sum_{A_1 \leq a < A_2} f(a)g(a) = f(A_2) \sum_{A_1 \leq a < A_2} g(a) - \sum_{A_1 \leq x < A_2} \Delta f(x) \sum_{A_1 \leq a \leq x} g(a).$$

Полагая $f(a) = a^\alpha$ и $g(a) = \sum_{a_2, b_1} \lambda_2^\beta(A) [A \in \mathcal{A}_\ell(a, q)]$, получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{A_1 \leq a < A_2} a^\alpha \sum_{a_2, b_1} \lambda_2^\beta(A) [A \in \mathcal{A}_\ell(a, q)] \\ & \ll \left(A_2^\alpha + \sum_{A_1 \leq x < A_2} x^{\alpha-1} \right) \sum_{a, a_2, b_1} \lambda_2^\beta(A) [A \in \mathcal{A}_\ell(a, q)] \\ & \ll (A_1^\alpha + A_2^\alpha) q^{1+\beta/2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

9.2. Оценка остаточного члена.

ЛЕММА 9.7. Пусть a – натуральное число, α, Q_1, Q_2 – действительные числа и $0 < Q_1 < Q_2$. Тогда

$$\sum_{Q_1 < q \leq Q_2} (a, q) q^\alpha \ll (Q_1^{\alpha+1+\varepsilon} + Q_2^{\alpha+1+\varepsilon}) a^\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $d = (a, q)$, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{Q_1 < q \leq Q_2} (a, q) q^\alpha & \leq \sum_{d|a} d \sum_{\substack{Q_1 < q \leq Q_2 \\ d|q}} q^\alpha \leq \sum_{d|a} d^{1+\alpha} \sum_{Q_1/d < q_1 \leq Q_2/d} q_1^\alpha \\ & \ll \sum_{d|a} d^{1+\alpha} \left(\left(\frac{Q_1}{d} \right)^{\alpha+1+\varepsilon} + \left(\frac{Q_2}{d} \right)^{\alpha+1+\varepsilon} \right) \\ & \ll (Q_1^{\alpha+1+\varepsilon} + Q_2^{\alpha+1+\varepsilon}) a^\varepsilon. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.8. *Справедливы оценки*

$$\sum_{(a,q) \in \Omega_i} R_i(a, q, P) \ll P^{2-1/34+\varepsilon} \quad (i = 1, 2, 3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Просуммируем остаток $R_1(a, q, P) = \frac{P^{1+\varepsilon}q}{a^2}$ (см. предложение 6.10) по точкам $(a, q) \in \Omega_1$:

$$\begin{aligned} \sum_{(a,q) \in \Omega_1} \frac{P^{1+\varepsilon}q}{a^2} &\ll P^{1+\varepsilon} \sum_{a \leq P^{1/3}} \frac{1}{a^2} \sum_{q \leq P^{33/68} a^{1/2}} q \\ &\ll P^{2-1/34+\varepsilon} \sum_{a \leq P^{1/3}} \frac{1}{a} \ll P^{2-1/34+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Оценим сумму остатков $R_2(a, q, P)$. Согласно предложению 7.7

$$\begin{aligned} R_2(a, q, P) &\ll \frac{(P, q)P^{1+\varepsilon}}{q} \left(\sum_{a_2, b_1} \left(\frac{r_1^2 \lambda_2(A) q^{1/2}}{a^{3/2}} + \frac{r_1^3 \lambda_2(A)}{q^{1/2}} \right) + \frac{r_1 P}{a^2} + \frac{P}{r_1 a} \right) \\ &\quad + \frac{P^2}{q^2} \left(r_2 \frac{q}{a^2} + r_2^2 a^{1/2} + \frac{q}{r_2 a} \right) (a, q) a^\varepsilon. \end{aligned}$$

Выберем значения параметров r_1, r_2 исходя из равенств

$$\begin{aligned} r_1^2 \frac{P}{a^{3/2} q^{1/2}} \lambda_2(A) &= \frac{P^2}{r_1 q^2}, \\ r_2^2 a^{1/2} &= \frac{q}{r_2 a} \quad (\text{при } q \leq a^3), \\ r_2 \frac{q}{a^2} &= \frac{q}{r_2 a} \quad (\text{при } q > a^3), \end{aligned}$$

предполагая, что $\lambda_2(A) \asymp q^{1/2}$:

$$r_1 = \lfloor P^{1/3} a^{1/2} q^{-2/3} \rfloor, \quad r_2 = \begin{cases} \lfloor q^{1/3} a^{-1/2} \rfloor & \text{при } q \leq a^3; \\ \lfloor a^{1/2} \rfloor & \text{при } q > a^3. \end{cases}$$

(Отметим, что в области Ω_2 выполняются оценки $r_1, r_2 \leq a$, поэтому предложение 7.7 действительно применимо.) Тогда из неравенства $\lambda_2(A) \geq q^{1/2}$ следует, что при $(a, q) \in \Omega_2$

$$\begin{aligned} R_2(a, q, P) &\ll (P, q) P^{5/3+\varepsilon} a^{-1/2} q^{-11/6} \sum_{a_2, b_1} \lambda_2(A) \\ &\quad + (a, q) P^{2+\varepsilon} (a^{-1/2} q^{-4/3} + a^{-3/2} q^{-1}). \end{aligned}$$

Оценим сумму каждого из слагаемых по парам $(a, q) \in \Omega_2$. Для первого слагаемого

$$\begin{aligned} & P^{5/3+\varepsilon} \sum_{(a,q) \in \Omega_2} (P, q) a^{-1/2} q^{-11/6} \sum_{a_2, b_1} \lambda_2(A) \\ & \leq P^{5/3+\varepsilon} \left(\sum_{q \leq P^{10/17}} (P, q) q^{-11/6} \sum_{a \geq P^{3/17}} a^{-1/2} \sum_{a_2, b_1} \lambda_2(A) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{q > P^{10/17}} (P, q) q^{-11/6} \sum_{a \gg q^2 P^{-1}} a^{-1/2} \sum_{a_2, b_1} \lambda_2(A) \right). \end{aligned}$$

Применяя к внутренним суммам следствие 9.6 и лемму 9.7, приходим к нужной оценке:

$$P^{5/3+\varepsilon} \left(P^{-3/34} \sum_{q \leq P^{10/17}} (P, q) q^{-1/3} + P^{1/2} \sum_{q > P^{10/17}} (P, q) q^{-4/3} \right) \ll P^{2-1/34+\varepsilon}.$$

Просуммируем оставшуюся часть остатка $R_2(a, q, P)$. Необходимая оценка также проверяется с помощью леммы 9.7:

$$\begin{aligned} & \sum_{a \geq P^{3/17}} (a, q) a^{-3/2} \sum_{q \leq P} q^{-1} \ll P^\varepsilon \sum_{a > P^{3/17}} a^{-3/2} \ll P^{-3/34+\varepsilon}, \\ & \sum_{a \geq P^{3/17}} (a, q) a^{-1/2} \sum_{q \geq a^2} q^{-4/3} \ll P^\varepsilon \sum_{a \geq P^{3/17}} a^{-7/6} \ll P^{-1/34+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Рассмотрим третий остаток (см. предложение 8.3):

$$R_3(a, q, P) \ll (P, q) P^\varepsilon \left(\frac{r D P^2}{q^2} + \frac{P^2}{r a q} + \frac{r^2 a P}{q} \sum_{a_2, b_1} \lambda_2^{1/2}(A) \right).$$

Значение $r = \lfloor P^{1/3} a^{-1/3} q^{-5/12} \rfloor$ выберем исходя из равенства

$$r^2 \frac{a P}{q} \lambda_2^{1/2}(A) = \frac{P^2}{r q^2},$$

снова предполагая, что $\lambda_2(A) \asymp q^{1/2}$. При таком выборе r и при $(a, q) \in \Omega_3$

$$R_3(a, q, P) \ll (P, q) P^{5/3+\varepsilon} a^{1/3} q^{-11/6} \sum_{a_2, b_1} \lambda_2^{1/2}(A).$$

Применяя последовательно следствие 9.6 и лемму 9.7, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{(a,q) \in \Omega_3} R_3(a, q, P) & \ll P^{5/3+\varepsilon} \sum_{q \leq P^{10/17}} (P, q) q^{-11/6} \sum_{a \leq P^{3/17}} a^{1/3} \sum_{a_2, b_1} \lambda_2^{1/2}(A) \\ & \ll P^{5/3+\varepsilon} \sum_{q \leq P^{10/17}} (P, q) P^{1/17} q^{-7/12} \ll P^{2-1/34+\varepsilon}. \end{aligned}$$

9.3. Вспомогательные утверждения. Наряду с функцией Эйлера $\varphi(q)$ будем использовать функции

$$\varphi_+(q) = q \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad \text{и} \quad \varphi_2(q) = \frac{\varphi(q)\varphi_+(q)}{q} = q \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

ЛЕММА 9.9. Пусть $Q \geq 2$. Тогда

$$\sum_{q \leq Q} \frac{\varphi_2(q)}{q^2} = \frac{1}{\zeta(3)} \left(\log Q + \gamma - \frac{\zeta'(3)}{\zeta(3)} \right) + O\left(\frac{1}{Q}\right), \quad (9.2)$$

$$\sum_{q \leq Q} \frac{\varphi_2(q)}{q^2} \log q = \frac{1}{2\zeta(3)} \log^2 Q + c_0 + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right), \quad (9.3)$$

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ \Delta|q}} \frac{\varphi(q)}{q^2} = \frac{\log Q}{\zeta(2)\varphi_+(\Delta)} + \psi(\Delta) + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right), \quad (9.4)$$

где c_0 – абсолютная константа,

$$\psi(\Delta) = \frac{1}{\Delta} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2} \left(\log \frac{(d, \Delta)}{d\Delta} + \gamma \right) \quad (9.5)$$

и γ – постоянная Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим равенство (9.2). Выражая $\varphi_2(q)$ через функцию Мёбиуса, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq Q} \frac{\varphi_2(q)}{q^2} &= \sum_{q \leq Q} \frac{1}{q} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{\substack{q \leq Q \\ d|q}} \frac{1}{q} = \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)}{d^3} \left(\log \frac{Q}{d} + \gamma + O\left(\frac{d}{Q}\right) \right) \\ &= (\log Q + \gamma) \left(\frac{1}{\zeta(3)} + O\left(\frac{1}{Q^2}\right) \right) - \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d) \log d}{d^3} + O\left(\frac{1}{Q}\right). \end{aligned}$$

Для вычисления возникшей суммы достаточно воспользоваться тем, что

$$\left(\frac{1}{\zeta(s)} \right)' = - \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d) \log d}{d^s} = - \frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)}$$

и, в частности,

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d) \log d}{d^3} = \frac{\zeta'(3)}{\zeta^2(3)}.$$

Преобразуем вторую сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq Q} \frac{\varphi_2(q)}{q^2} \log q &= \sum_{q \leq Q} \frac{\log q}{q} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{\substack{q \leq Q \\ d|q}} \frac{\log q}{q} \\ &= \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)}{d^3} \sum_{q \leq Q/d} \frac{\log q + \log d}{q}. \end{aligned}$$

Пользуясь равенством (см. [127; раздел 2.21])

$$\sum_{k \leq T} \frac{\log k}{k} = \frac{\log^2 T}{2} + \gamma_1 + O\left(\frac{\log T}{T}\right) \quad (T \geq 2), \quad (9.6)$$

где γ_1 – первая константа Стильтьеса, находим, что

$$\sum_{q \leq Q} \frac{\varphi_2(q)}{q^2} \log q = \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)}{d^3} \left(\frac{\log^2 Q}{2} + \gamma_1 - \frac{\log^2 d}{2} + \gamma \log d \right) + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right).$$

Полагая

$$c_0 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^3} \left(\gamma_1 - \frac{\log^2 d}{2} + \gamma \log d \right),$$

получаем вторую формулу леммы.

Доказательство равенства (9.4) см. в [24; лемма 9].

ЛЕММА 9.10. Пусть D – натуральное число и $c(q, D)$ определено равенством (6.18). Тогда для суммы

$$S_D(Q_1, Q_2) = \sum_{\substack{Q_1 \leq q \leq Q_2 \\ D|q}} \frac{\varphi(q)}{q^2} c(q, D)$$

справедлива асимптотическая формула

$$S_D(Q_1, Q_2) = \frac{\log(Q_2/Q_1)}{\zeta(2)} + O\left(D^{1+\varepsilon} Q_1^{-1+\varepsilon}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $q = Dq_1$, для данной суммы получаем представление

$$S_D(Q_1, Q_2) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{Q_1 \leq Dq_1 \leq Q_2} \frac{\varphi(Dq_1)\varphi((D, q_1))}{(D, q_1)q_1^2}.$$

Преобразуем полученную сумму, вводя параметры $\Delta = (D, q_1)$, $q_2 = q_1 \Delta^{-1}$ и $q_3 = q_2 \delta^{-1}$:

$$\begin{aligned} S_D(Q_1, Q_2) &= \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\Delta|D} \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta^3} \sum_{\substack{Q_1 \leq D\Delta q_2 \leq Q_2 \\ (D/\Delta, q_2)=1}} \frac{\varphi(D\Delta q_2)}{q_2^2} \\ &= \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\Delta|D} \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta^3} \sum_{Q_1 \leq D\Delta q_2 \leq Q_2} \frac{\varphi(D\Delta q_2)}{q_2^2} \sum_{\delta|(D/\Delta, q_2)} \mu(\delta) \\ &= \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\Delta|D} \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta^3} \sum_{\delta|D/\Delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{Q_1 \leq D\Delta\delta q_3 \leq Q_2} \frac{\varphi(D\Delta\delta q_3)}{q_3^2} \\ &= \frac{D^2}{\varphi(D)} \sum_{\delta\Delta|D} \frac{\varphi(\Delta)\mu(\delta)}{\Delta} \sum_{\substack{Q_1 \leq q \leq Q_2 \\ D\Delta\delta|q}} \frac{\varphi(q)}{q^2}. \end{aligned}$$

Применим к внутренней сумме равенство (9.4):

$$\begin{aligned}
 S_D(Q_1, Q_2) &= \frac{D^2}{\varphi(D)} \sum_{\delta \Delta | D} \frac{\varphi(\Delta) \mu(\delta)}{\Delta} \left(\frac{\log(Q_2/Q_1)}{\zeta(2) \varphi_+(D \Delta \delta)} + O(Q_1^{-1+\varepsilon}) \right) \\
 &= \frac{\log Q_2/Q_1}{\zeta(2)} \frac{D^2}{\varphi(D)} \sum_{\delta \Delta | D} \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} \frac{\mu(\delta)}{\Delta \delta \varphi_+(D)} + O(D^{1+\varepsilon} Q_1^{-1+\varepsilon}) \\
 &= \frac{\log Q_2/Q_1}{\zeta(2)} \frac{D}{\varphi_2(D)} \sum_{\delta \Delta | D} \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta^2} \frac{\mu(\delta)}{\delta} + O(D^{1+\varepsilon} Q_1^{-1+\varepsilon}) \\
 &= \frac{\log Q_2/Q_1}{\zeta(2)} \frac{D}{\varphi_2(D)} \sum_{\Delta | D} \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta^2} \frac{\varphi(D/\Delta)}{D/\Delta} + O(D^{1+\varepsilon} Q_1^{-1+\varepsilon}).
 \end{aligned}$$

Подставляя в последнюю формулу равенство (см. [24; лемма 8])

$$\sum_{\Delta | D} \frac{\varphi(\Delta) \varphi(D/\Delta)}{\Delta} = \varphi_2(D),$$

приходим к утверждению леммы.

9.4. Подсчет главного члена. Для завершения доказательства теоремы 5.5 остается перейти к интегрированию по переменным из первой строки матрицы X . Предварительно необходимо выполнить суммирование по переменной q .

Условия $a \leq b \leq c$, которым удовлетворяют матрицы $X \in \mathcal{M}_\ell(a, q, P)$, не инвариантны относительно левого действия $D_3(\mathbb{R})$. Выразим c и b из равенств

$$abc = \frac{P}{\det X'''} , \quad ab = \frac{q}{\det A''} ,$$

где $A'' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда неравенства $a \leq b \leq c$ после перехода к множеству $\mathcal{M}_\ell'''(a, q, P)$ примут вид

$$a \leq \frac{q}{a \det A''} \leq \frac{P \det A''}{q \det X'''} . \quad (9.7)$$

Поэтому при заданных коэффициентах матрицы X''' для каждого $i = 1, 2, 3$ область $\Omega_i(X''')$, в которой могут меняться a и q , задается равенством

$$\Omega_i(X''') = \left\{ (a, q) \in \Omega_i : a^2 \det A'' \leq q \leq \left(\frac{aP}{\det X'''} \right)^{1/2} \det A'' \right\} \quad (i = 1, 2, 3).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.11. Как и в двумерном случае (см. п. 4.7), для тех пар (a, q) , для которых множества $\mathcal{M}_\ell(a, q, P)$ пусты, значения функций $\rho_{2,3}(a, q)$ естественно доопределить нулем. Поэтому будем считать, что значения $\rho_{2,3}(a, q)$ определены для всех натуральных a и q .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.12. Для величины $\mathcal{N}_\ell^{(2)}(P)$, определенной равенством (5.9), справедлива асимптотическая формула

$$\frac{\mathcal{N}_\ell^{(2)}(P)}{\varphi^2(P)} = \frac{1}{\zeta(2)} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\alpha d\beta d\gamma [X''' \in \mathcal{M}_\ell''']}{(\det X''')^3} \times \sum_a \left(\frac{\varphi_2(a)}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} [(a, q) \in \Omega_2(X''')] + \rho_2(a) \right) + O(P^{-1/34+\varepsilon}),$$

где $\rho_2(a) \ll a^{-2+\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложениям 7.7 и 9.8

$$N_\ell^{(2)}(P) = \varphi^2(P) \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{(\det X''')^3} S_\ell^{(2)}(P, \alpha, \beta, \gamma) + O(P^{-1/34+\varepsilon}), \quad (9.8)$$

где

$$S_\ell^{(2)}(P, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{(a,q) \in \Omega_2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{K_a^\times(q)}{a^2} [X''' \in \mathcal{M}_\ell'''(a, q, P)].$$

Множество $\widetilde{\mathcal{M}}_\ell'''$ получается из $\mathcal{M}_\ell'''(a, q, P)$ отбрасыванием условий (9.7) с сохранением остальных (инвариантных) неравенств. Поэтому

$$[X''' \in \mathcal{M}_\ell'''(a, q, P), (a, q) \in \Omega_i] = [X''' \in \mathcal{M}_\ell''', (a, q) \in \Omega_i(X''')] \quad (9.9)$$

и

$$S_\ell^{(2)}(P, \alpha, \beta, \gamma) = [X''' \in \mathcal{M}_\ell'''] \sum_{a,q} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{K_a^\times(q)}{a^2} [(a, q) \in \Omega_2(X''')].$$

Применим к возникшей сумме равенство (см. [24; следствие 3])

$$\sum_{Q_1 \leq q \leq Q_2} \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{K_a^\times(q)}{a^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{\varphi_2(a)}{a^2} \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{dq}{q} + O(a^{-1+\varepsilon} Q_1^{-1+\varepsilon}).$$

Для нижнего предела суммирования Q_1 выполняется оценка $Q_1 \gg a^2$. Поэтому

$$S_\ell^{(2)}(P, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{[X''' \in \mathcal{M}_\ell''']}{\zeta(2)} \sum_a \left(\frac{\varphi_2(a)}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} [(a, q) \in \Omega_2(X''')] + O(a^{-3+\varepsilon}) \right).$$

Подставляя последнюю формулу в (9.8), приходим к нужному равенству.

ЛЕММА 9.13. Пусть $\Omega \subset [-a, a]^2$ и граница области Ω имеет длину $O(a)$. Тогда для суммы

$$S(\Omega) = \sum_{\substack{(a_2, a_3) \in \Omega \\ (a, a_2, a_3) = 1}} \frac{1}{(\det X'')^3}$$

справедлива асимптотическая формула

$$S(\Omega) = \frac{\varphi_2(a)}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[(\alpha_2, \alpha_3) \in a^{-1}\Omega] d\alpha}{(\det X''')^3} + O(a^{-2+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Избавимся от условия взаимной простоты с помощью функции Мёбиуса:

$$S(\Omega) = \sum_{d|a} \mu(d) \sum_{\substack{(a_2, a_3) \in \Omega \\ d|a_2, d|a_3}} \begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^{-3} = \sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d^3} \sum_{(a'_2, a'_3) \in d^{-1}\Omega} \begin{vmatrix} a' & a'_2 & a'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^{-3}.$$

Пусть

$$G(u, v) = \begin{vmatrix} a' & u & v \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^{-3}.$$

Тогда

$$G(u, v) \asymp (a')^{-3}, \quad \frac{\partial G}{\partial u} \ll \frac{1}{(a')^4}, \quad \frac{\partial G}{\partial v} \ll \frac{1}{(a')^4}.$$

Следовательно,

$$G(u, v) = \int_{[0,1]^2} G(u+t_1, v+t_2) dt_1 dt_2 + O\left(\frac{1}{(a')^4}\right).$$

Число единичных квадратов, пересекаемых границей области $d^{-1}\Omega$, есть $O(a')$. В каждом из таких квадратов можно воспользоваться формулой с тривиальной оценкой остаточного члена

$$G(u, v) = \int_{[0,1]^2} G(u+t_1, v+t_2) [(u+t_1, v+t_2) \in d^{-1}\Omega] dt_1 dt_2 + O\left(\frac{1}{(a')^3}\right).$$

Значит,

$$\begin{aligned} S(\Omega) &= \sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d^3} \left(\int_{d^{-1}\Omega} \begin{vmatrix} a' & a'_2 & a'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^{-3} da'_2 da'_3 + O(d^2 a^{-2}) \right) \\ &= \frac{1}{a} \sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d^2} \int_{a^{-1}\Omega} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^{-3} d\alpha + O(a^{-2+\varepsilon}) \\ &= \frac{\varphi_2(a)}{a^2} \int_{a^{-1}\Omega} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^{-3} d\alpha + O(a^{-2+\varepsilon}). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.14. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N}_\ell^{(1,3)}(P)}{\varphi^2(P)} &= \frac{1}{\zeta(2)} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\alpha d\beta d\gamma [X''' \in \mathcal{M}_\ell''']}{(\det X''')^3} \\ &\quad \times \sum_a \frac{\varphi_2(a)}{a^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} [(a, q) \in \Omega_{1,3}(X''')] + \rho_{1,3}(a) \right) \\ &\quad + O(P^{-1/34+\varepsilon}), \end{aligned}$$

где $\rho_{1,3}(a) \ll a^{-5/4+\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложениям 6.10, 8.3 и 9.8

$$\mathcal{N}_\ell^{(1,3)}(P) = \varphi^2(P) \left(\int_{\mathbb{R}^4} d\beta d\gamma S_\ell^{(1,3)}(P, \beta, \gamma) + \sum_{(a,q) \in \Omega_{1,3}} \rho_{1,3}(a, q) \right) + O(P^{-1/34+\varepsilon}), \quad (9.10)$$

где

$$S_\ell^{(1,3)}(P, \beta, \gamma) = \sum_{(a,q) \in \Omega_{1,3}} \sum_{a_2, a_3}^\# \frac{\varphi(q)}{q^2} c(q, D) \frac{[X'' \in \mathcal{M}_\ell''(a, q, P)]}{(\det X'')^3}.$$

Из равенства (9.9) следует, что

$$S_\ell^{(1,3)}(P, \beta, \gamma) = \sum_{a, a_2, a_3}^\# \frac{[X''' \in \mathcal{M}_\ell''']}{(a \det X''')^3} \sum_q \frac{\varphi(q)}{q^2} c(q, D) [(a, q) \in \Omega_{1,3}(X''')].$$

К сумме по q применим лемму 9.10:

$$\begin{aligned} S_\ell^{(1,3)}(P, \beta, \gamma) &= \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{a, a_2, a_3}^\# \frac{[X''' \in \mathcal{M}_\ell''']}{(a \det X''')^3} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} [(a, q) \in \Omega_{1,3}(X''')] + O(Da^{-2+\varepsilon}) \right). \end{aligned}$$

По лемме 9.7

$$\sum_{a_2, a_3 \leq a} Da^{-5+\varepsilon} = \sum_{a_2, a_3 \leq a} (a_2, a) a^{-5+\varepsilon} \ll a^{-3+\varepsilon}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} S_\ell^{(1,3)}(P, \beta, \gamma) &= \frac{1}{\zeta(2)} \sum_a \left(\frac{1}{a^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} \sum_{a_2, a_3}^\# \frac{[X''' \in \mathcal{M}_\ell''']}{(\det X''')^3} \right. \\ &\quad \left. \times [(a, q) \in \Omega_{1,3}(X''')] + O(a^{-3+\varepsilon}) \right). \end{aligned}$$

Применяя лемму 9.13, приходим к асимптотической формуле

$$S_{\ell}^{(1,3)}(P, \beta, \gamma) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_a \left(\frac{\varphi_2(a)}{a^2} \times \int_{\mathbb{R}^2} d\alpha \frac{[X''' \in \mathcal{M}_{\ell}''']}{(\det X''')^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} [(a, q) \in \Omega_{1,3}(X''')] + O(a^{-2+\varepsilon}) \right). \quad (9.11)$$

Кроме того, по лемме 9.7

$$\sum_q \rho_1(a, q) [(a, q) \in \Omega_1] \ll \sum_{q \geq a^2} (a, q) a^{-1/4} q^{-3/2+\varepsilon} \ll a^{-5/4+\varepsilon}, \quad (9.12)$$

$$\sum_q \rho_3(a, q) [(a, q) \in \Omega_3] \ll \sum_{q \geq a^4} a q^{-2+\varepsilon} \ll a^{-3+\varepsilon}. \quad (9.13)$$

Подставляя (9.11), (9.12) и (9.13) в формулу (9.10), приходим к нужному равенству.

СЛЕДСТВИЕ 9.15. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{\mathcal{N}_{\ell}(P)}{\varphi^2(P)} = \frac{1}{\zeta(2)} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\alpha d\beta d\gamma [X''' \in \mathcal{M}_{\ell}''']}{(\det X''')^3} \times \sum_a \frac{\varphi_2(a)}{a^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} [(a, q) \in \Omega(X''')] + \rho(a) \right) + O(P^{-1/34+\varepsilon}),$$

где $\rho(a) \ll a^{-5/4+\varepsilon}$.

Для доказательства достаточно подставить асимптотические формулы из предложений 9.12 и 9.14 в равенство (5.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.5. Так как

$$\sum_{a \ll P^{1/3}} \rho(a) = \sum_{a=1}^{\infty} \rho(a) + O(P^{-1/12+\varepsilon}),$$

то, согласно следствию 9.15,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N}_{\ell}(P)}{\varphi^2(P)} &= \frac{1}{\zeta(2)} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\alpha d\beta d\gamma [X''' \in \mathcal{M}_{\ell}''']}{(\det X''')^3} \sum_a \frac{\varphi_2(a)}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} [(a, q) \in \Omega(X''')] \\ &\quad + \sum_{a=1}^{\infty} \rho(a) + O(P^{-1/34+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Преобразуем интеграл по переменной q :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} [(a, q) \in \Omega(X''')] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} \left[a^2 \det A'' \leq q \leq \left(\frac{aP}{\det X'''} \right)^{1/2} \det A'' \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{q} \left[a^2 \leq q \leq \left(\frac{aP}{\det X'''} \right)^{1/2} \right] = \frac{1}{2} \log P - \frac{3}{2} \log a - \frac{1}{2} \log X'''. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в формулу для $\mathcal{N}_{\ell}(P)$ и пользуясь равенствами (9.2), (9.3), приходим к утверждению теоремы.

Список литературы

- [1] W. M. Schmidt, "The density of integer points on homogeneous varieties", *Acta Math.*, **154**:3-4 (1985), 243–296.
- [2] B. Z. Moroz, "On the number of integral points on a norm-form variety in a cube-like domain", *J. Number Theory*, **27**:1 (1987), 106–110.
- [3] J. Franke, Yu. I. Manin, Yu. Tschinkel, "Rational points of bounded height on Fano varieties", *Invent. Math.*, **95**:2 (1989), 421–435.
- [4] Yu. V. Linnik, "Additive problems and eigenvalues of the modular operators", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Stockholm, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, 270–284.
- [5] P. C. Sarnak, "Diophantine problems and linear groups", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. I (Kyoto, 1990), Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991, 459–471.
- [6] W. Duke, Z. Rudnick, P. Sarnak, "Density of integer points on affine homogeneous varieties", *Duke Math. J.*, **71**:1 (1993), 143–179.
- [7] В. А. Быковский, "О распределении целых точек на детерминантной поверхности", *Дальневост. матем. журн.*, **14**:2 (2014), 156–159.
- [8] Ю. В. Линник, Б. Ф. Скубенко, "Асимптотическое распределение целочисленных матриц третьего порядка", *Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон.*, **3**:13 (1964), 25–36.
- [9] Ю. В. Линник, *Эргодические свойства алгебраических полей*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1967, 208 с.; англ. пер.: Yu. V. Linnik, *Ergodic properties of algebraic fields*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **45**, Springer-Verlag, New York, 1968, ix+192 pp.
- [10] Wee Teck Gan, Hee Oh, "Equidistribution of integer points on a family of homogeneous varieties: a problem of Linnik", *Compositio Math.*, **136**:3 (2003), 323–352.
- [11] Б. Ф. Скубенко, "К распределению целочисленных матриц и вычислению объема фундаментальной области унимодулярной группы матриц", *Алгебраическая теория чисел и представления*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **80**, Наука, М.–Л., 1965, 129–144; англ. пер.: B. F. Skubenko, "The distribution of integer matrices and calculation of the volume of the fundamental domain of a unimodular group of matrices", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **80** (1965), 147–163.
- [12] А. М. Истамов, "Асимптотика целочисленных матриц второго порядка, лежащих в данной гиперболической области и принадлежащих заданному классу вычетов", *Исследования по теории чисел*. 6, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **93**, Наука, Ленингр. отд., Л., 1980, 25–29; англ. пер.: A. M. Istamov, "Asymptotics of second-order integral matrices lying in a given hyperbolic region and belonging to a given residue class", *J. Soviet Math.*, **19**:2 (1982), 1085–1088.
- [13] А. М. Истамов, "Асимптотическое распределение целочисленных матриц n -го порядка, принадлежащих заданному классу вычетов", *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 4, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **112**, Наука, Ленингр. отд., Л., 1981, 85–111; англ. пер.: A. M. Istamov, "Asymptotic distribution of n -th-order integral matrices belonging to a given residue class", *J. Soviet Math.*, **25**:2 (1984), 1030–1051.
- [14] Е. В. Подсыпанин, "Распределение целых точек на детерминантной поверхности", *Исследования по теории чисел*. 6, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **93**, Наука, Ленингр. отд., Л., 1980, 30–40; англ. пер.: E. V. Podsypanin, "Distribution of integral points on the determinant surface", *J. Soviet Math.*, **19**:2 (1982), 1088–1095.
- [15] Н. М. Коробов, *Тригонометрические суммы и их приложения*, Наука, М., 1989, 240 с.; англ. пер.: N. M. Korobov, *Exponential sums and their applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **80**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, xvi+209 pp.

- [16] I. E. Shparlinski, “Modular hyperbolas”, *Jpn. J. Math.*, **7**:2 (2012), 235–294.
- [17] Г. Вороной, *Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей*, Типография Варшавского Учебного Округа, Варшава, 1896, 221 с.
- [18] Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, т. 1, Изд-во АН УССР, Киев, 1952, 399 с.
- [19] H. Minkowski, “Généralisation de la théorie des fractions continues”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **13** (1896), 41–60.
- [20] Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, “Теория иррациональностей третьей степени”, *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **11**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, 3–340.
- [21] Б. Н. Делоне, *Петербургская школа теории чисел*, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947, 421 с.
- [22] H. Hancock, *Development of the Minkowski geometry of numbers*, v. 1, Dover Publications, Inc., New York, 1964, xix+452 pp.
- [23] А. В. Устинов, “О распределении решений детерминантного уравнения”, *Матем. сб.*, **206**:7 (2015), 103–134.
- [24] В. И. Берник, А. В. Устинов, “О распределении точек модулярной гиперболы”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:2 (2014), 141–155.
- [25] H. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968, 87–96.
- [26] J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1 (1975), 20–28.
- [27] А. А. Илларионов, “Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток фиксированного определителя”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:3 (2012), 111–138; англ. пер.: А. А. Illarionov, “The average number of relative minima of three-dimensional integer lattices of a given determinant”, *Izv. Math.*, **76**:3 (2012), 535–562.
- [28] А. А. Илларионов, “О статистических свойствах многогранников Клейна трехмерных целочисленных решеток”, *Матем. сб.*, **204**:6 (2013), 23–46; англ. пер.: А. А. Illarionov, “On the statistical properties of Klein polyhedra in three-dimensional lattices”, *Sb. Math.*, **204**:6 (2013), 801–823.
- [29] А. А. Илларионов, “Многомерное обобщение теоремы Хейлбронна о средней длине конечной непрерывной дроби”, *Матем. сб.*, **205**:3 (2014), 119–132; англ. пер.: А. А. Illarionov, “A multidimensional generalization of Heilbronn’s theorem on the average length of a finite continued fraction”, *Sb. Math.*, **205**:3 (2014), 419–431.
- [30] А. А. Илларионов, “О среднем количестве наилучших приближений линейных форм”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:2 (2014), 61–86; англ. пер.: А. А. Illarionov, “On the average number of best approximations of linear forms”, *Izv. Math.*, **78**:2 (2014), 268–292.
- [31] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, 6-е изд., перераб. и доп., Наука, М., 1988, 448 с.; англ. пер.: B. V. Gnedenko, *The theory of probability*, Moscow, Mir, 1988, 392 pp.
- [32] R. O. Kuz’mín, “Sur un problème de Gauss”, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, v. 6 (Bologna, 1928), Zanichelli, Bologna, 1932, 83–89.
- [33] P. Lévy, “Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d’une fraction continue”, *Bull. Soc. Math. France*, **57** (1929), 178–194.
- [34] E. Wirsing, “On the theorem of Gauss–Kusmin–Lévy and a Frobenius-type theorem for function spaces”, *Acta Arith.*, **24** (1973/1974), 507–528.
- [35] К. И. Бабенко, “Об одной задаче Гаусса”, *Докл. АН СССР*, **238**:5 (1978), 1021–1024; англ. пер.: K. I. Babenko, “On a problem of Gauss”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:1 (1978), 136–140.

- [36] M. Iosifescu, C. Kraaikamp, *Metrical theory of continued fractions*, Math. Appl., **547**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, xx+383 pp.
- [37] G. Lochs, “Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmäßigen Kettenbrüche”, *Monatsh. Math.*, **65**:1 (1961), 27–52.
- [38] R. Adler, M. Keane, M. Smorodinsky, “A construction of a normal number for the continued fraction transformation”, *J. Number Theory*, **13**:1 (1981), 95–105.
- [39] В.И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000, х+452 с.; англ. пер.: V.I. Arnold, *Arnold’s problems*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg; PHASIS, Moscow, 2004, xvi+639 pp.
- [40] М.О. Авдеева, В.А. Быковский, *Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина*, Препринт ИПМ № 2002-8, Изд-во “Дальнаука” ДВО РАН, Владивосток, 2002, 12 с.
- [41] М.О. Авдеева, “О статистиках неполных частных конечных цепных дробей”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:2 (2004), 1–11; англ. пер.: M. O. Avdeeva, “On the statistics of partial quotients of finite continued fractions”, *Funct. Anal. Appl.*, **38**:2 (2004), 79–87.
- [42] А.В. Устинов, “О статистических свойствах конечных цепных дробей”, *Труды по теории чисел*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **322**, ПОМИ, СПб., 2005, 186–211; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the statistical properties of finite continued fractions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137**:2 (2006), 4722–4738.
- [43] А.В. Устинов, “О статистиках Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 195–208; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On Gauss–Kuz’m statistics for finite continued fractions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **146**:2 (2007), 5771–5781.
- [44] А.В. Устинов, “О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod{q}$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, *Алгебра и анализ*, **20**:5 (2008), 186–216; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the number of solutions of the congruence $xy \equiv l \pmod{q}$ under the graph of a twice continuously differentiable function”, *St. Petersburg Math. J.*, **20**:5 (2009), 813–836.
- [45] А.В. Устинов, “Спиновые цепочки и задача Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина для квадратичных иррациональностей”, *Матем. сб.*, **204**:5 (2013), 143–160; англ. пер.: A. V. Ustinov, “Spin chains and Arnold’s problem on the Gauss–Kuz’m statistics for quadratic irrationals”, *Sb. Math.*, **204**:5 (2013), 762–779.
- [46] H. Petersson, “Über eine Funktion von G. Lochs und die Diskriminante der elliptischen Funktionen”, *Monatsh. Math.*, **67**:3 (1963), 243–258.
- [47] А.В. Устинов, “О статистиках Гаусса–Кузьмина в коротких интервалах”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 93–98.
- [48] G. J. Rieger, “Über die mittlere Schrittzahl bei Divisionsalgorithmen”, *Math. Nachr.*, **82**:1 (1978), 157–180.
- [49] А.В. Устинов, “О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с выбором минимального по модулю остатка”, *Матем. заметки*, **85**:1 (2009), 153–156; англ. пер.: A. V. Ustinov, “The mean number of steps in the Euclidean algorithm with least absolute-value remainders”, *Math. Notes*, **85**:1 (2009), 142–145.
- [50] G. J. Rieger, “Ein Heilbronn–Satz für Kettenbrüche mit ungeraden Teilennern”, *Math. Nachr.*, **101**:1 (1981), 295–307.
- [51] А.В. Устинов, “О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными”, *Матем. заметки*, **88**:4 (2010), 594–604; англ. пер.: A. V. Ustinov, “The mean number of steps in the Euclidean algorithm with odd partial quotients”, *Math. Notes*, **88**:4 (2010), 574–584.

- [52] F. P. Boca, J. Vandehey, “On certain statistical properties of continued fractions with even and with odd partial quotients”, *Acta Arith.*, **156**:3 (2012), 201–221.
- [53] Е. Н. Жабицкая, “Средняя длина приведенной регулярной непрерывной дроби”, *Матем. сб.*, **200**:8 (2009), 79–110; англ. пер.: E. N. Zhabitskaya, “The average length of reduced regular continued fractions”, *Sb. Math.*, **200**:8 (2009), 1181–1214.
- [54] Д. А. Фроленков, “Асимптотическое поведение первого момента для числа шагов в алгоритме Евклида по избытку и недостатку”, *Матем. сб.*, **203**:2 (2012), 143–160; англ. пер.: D. A. Frolenkov, “Asymptotic behaviour of the first moment of the number of steps in the by-excess and by-deficiency Euclidean algorithms”, *Sb. Math.*, **203**:2 (2012), 288–305.
- [55] D. E. Knuth, A. C. Yao, “Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors”, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **72**:12 (1975), 4720–4722.
- [56] Е. Н. Жабицкая, “Среднее значение сумм неполных частных непрерывной дроби”, *Матем. заметки*, **89**:3 (2011), 472–476; англ. пер.: E. N. Zhabitskaya, “Mean value of sums of partial quotients of continued fractions”, *Math. Notes*, **89**:3 (2011), 450–454.
- [57] О. А. Горкуша, “О средней длине диагональных дробей Минковского”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 10–27.
- [58] О. А. Горкуша, “О конечных цепных дробях специального вида”, *Чебышевский сб.*, **9**:1(25) (2008), 80–107.
- [59] F. P. Boca, R. N. Gologan, A. Zaharescu, “The statistics of the trajectory of a certain billiard in a flat two-torus”, *Comm. Math. Phys.*, **240**:1-2 (2003), 53–73.
- [60] F. P. Boca, A. Zaharescu, “The distribution of the free path lengths in the periodic two-dimensional Lorentz gas in the small-scatterer limit”, *Comm. Math. Phys.*, **269**:2 (2007), 425–471.
- [61] В. А. Быковский, А. В. Устинов, “Статистика траекторий частиц в однородной задаче Синай для двумерной решетки”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:3 (2008), 10–22; англ. пер.: V. A. Bykovskii, A. V. Ustinov, “The statistics of particle trajectories in the homogeneous Sinai problem for a two-dimensional lattice”, *Funct. Anal. Appl.*, **42**:3 (2008), 169–179.
- [62] В. А. Быковский, А. В. Устинов, “Статистика траекторий частиц в неоднородной задаче Синай для двумерной решетки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:4 (2009), 17–36; англ. пер.: V. A. Bykovskii, A. V. Ustinov, “The statistics of particle trajectories in the inhomogeneous Sinai problem for a two-dimensional lattice”, *Izv. Math.*, **73**:4 (2009), 669–688.
- [63] F. P. Boca, C. Cobeli, A. Zaharescu, “Distribution of lattice points visible from the origin”, *Comm. Math. Phys.*, **213**:2 (2000), 433–470.
- [64] А. В. Устинов, “О распределении точек целочисленной решетки”, *Дальневост. матем. журн.*, **9**:1-2 (2009), 176–181.
- [65] Ж. Бургейн, Я. Г. Синай, “Предельное поведение больших чисел Фробениуса”, *УМН*, **62**:4(376) (2007), 77–90; англ. пер.: J. Bourgain, Ya. G. Sinai, “Limit behaviour of large Frobenius numbers”, *Russian Math. Surveys*, **62**:4 (2007), 713–725.
- [66] V. Shchur, Ya. Sinai, A. Ustinov, “Limiting distribution of Frobenius numbers for $n = 3$ ”, *J. Number Theory*, **129**:11 (2009), 2778–2789.
- [67] А. В. Устинов, “Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 131–160; англ. пер.: A. V. Ustinov, “The solution of Arnold’s problem on the weak asymptotics of Frobenius numbers with three arguments”, *Sb. Math.*, **200**:4 (2009), 597–627.

- [68] А. В. Устинов, “О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:5 (2010), 145–170; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the distribution of Frobenius numbers with three arguments”, *Izv. Math.*, **74**:5 (2010), 1023–1049.
- [69] Д. А. Фроленков, “Среднее значение чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:4 (2012), 125–184; англ. пер.: D. A. Frolenkov, “The mean value of Frobenius numbers with three arguments”, *Izv. Math.*, **76**:4 (2012), 760–819.
- [70] W. B. Jurkat, J. W. Van Horne, “The proof of the central limit theorem for theta sums”, *Duke Math. J.*, **48**:4 (1981), 873–885.
- [71] W. B. Jurkat, J. W. Van Horne, “On the central limit theorem for theta series”, *Michigan Math. J.*, **29**:1 (1982), 65–77.
- [72] W. B. Jurkat, J. W. Van Horne, “The proof of the central limit theorem for theta sums”, *Duke Math. J.*, **48**:4 (1981), 873–885.
- [73] E. Demirci Akarsu, J. Marklof, “The value distribution of incomplete Gauss sums”, *Mathematika*, **59**:2 (2013), 381–398.
- [74] V. Baladi, B. Vallée, “Euclidean algorithms are Gaussian”, *J. Number Theory*, **110**:2 (2005), 331–386.
- [75] B. Vallée, “A unifying framework for the analysis of a class of Euclidean algorithms”, *LATIN 2000: theoretical informatics*, Proceedings of the 4th Latin American Symposium (Punta del Este, April 10–14, 2000), Lecture Notes in Comput. Sci., **1776**, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 343–354.
- [76] B. Vallée, “Dynamical analysis of a class of Euclidean algorithms”, *Theoret. Comput. Sci.*, **297**:1–3 (2003), 447–486.
- [77] J. Marklof, A. Strömbergsson, “The distribution of free path lengths in the periodic Lorentz gas and related lattice point problems”, *Ann. of Math. (2)*, **172**:3 (2010), 1949–2033.
- [78] J. Marklof, A. Strömbergsson, “The periodic Lorentz gas in the Boltzmann–Grad limit: asymptotic estimates”, *Geom. Funct. Anal.*, **21**:3 (2011), 560–647.
- [79] J. Marklof, A. Strömbergsson, “Free path lengths in quasicrystals”, *Comm. Math. Phys.*, **330**:2 (2014), 723–755.
- [80] J. Marklof, “The asymptotic distribution of Frobenius numbers”, *Invent. Math.*, **181**:1 (2010), 179–207.
- [81] I. Aliev, M. Henk, “Integer knapsacks: average behavior of the Frobenius numbers”, *Math. Oper. Res.*, **34**:3 (2009), 698–705.
- [82] I. Aliev, M. Henk, A. Hinrichs, “Expected Frobenius numbers”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **118**:2 (2011), 525–531.
- [83] A. Strömbergsson, “On the limit distribution of Frobenius numbers”, *Acta Arith.*, **152** (2012), 81–107.
- [84] J. Marklof, “Limit theorems for theta sums”, *Duke Math. J.*, **97**:1 (1999), 127–153.
- [85] F. Cellarosi, “Limiting curlicue measures for theta sums”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist.*, **47**:2 (2011), 466–497.
- [86] M. L. Kontsevich, Yu. M. Suhov, “Statistics of Klein polyhedra and multidimensional continued fractions”, *Pseudoperiodic topology*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **197**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 9–27.
- [87] О. Н. Карпенков, “Об инвариантной мере Мёбиуса и распределении граней Гаусса–Кузьмина”, *Анализ и особенности. Часть 1*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр.

- МИАН, **258**, Наука, М., 2007, 79–92; англ. пер.: O. N. Karpenkov, “On an invariant Möbius measure and the Gauss–Kuzmin face distribution”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **258** (2007), 74–86.
- [88] F. Klein, “Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung”, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.*, **1895:3** (1895), 357–359.
- [89] F. Klein, “Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire”, *Nouv. Ann. Math.* (3), **15** (1896), 327–331.
- [90] H. J. S. Smith, *The collected mathematical papers*, v. 2, Clarendon Press, Oxford, 1894, vii+719 pp.
- [91] H. Minkowski, “Zur Theorie der Kettenbrüche”, *Gesammelte Abhandlungen*, v. 1, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1911, 278–292.
- [92] В. А. Быковский, “Относительные минимумы решеток и вершины многогранников Клейна”, *Функц. анализ и его прил.*, **40:1** (2006), 69–71; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “Local minima of lattices and vertices of Klein polyhedra”, *Funct. Anal. Appl.*, **40:1** (2006), 56–57.
- [93] О. Н. Герман, “Полиэдры Клейна и относительные минимумы решеток”, *Матем. заметки*, **79:4** (2006), 546–552; англ. пер.: O. N. German, “Klein polyhedra and relative minima of lattices”, *Math. Notes*, **79:4** (2006), 505–510.
- [94] А. В. Устинов, “Минимальные системы векторов в трехмерных решетках и аналог теоремы Валена для трехмерных цепных дробей Минковского”, *Математика и информатика*, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 103–128; англ. пер.: A. V. Ustinov, “Minimal vector systems in three-dimensional lattices and an analog of Vahlen’s theorem for three-dimensional Minkowski continued fractions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **280:**, suppl. 2 (2013), S91–S116.
- [95] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, “Аналог теоремы Валена для совместных приближений пары чисел”, *Матем. сб.*, **194:7** (2003), 3–14; англ. пер.: M. O. Avdeeva, V. A. Bykovskii, “An analogue of Vahlen’s theorem for simultaneous approximations of a pair of numbers”, *Sb. Math.*, **194:7** (2003), 955–967.
- [96] В. А. Быковский, О. А. Горкуша, “Минимальные базисы трехмерных полных решеток”, *Матем. сб.*, **192:2** (2001), 57–66; англ. пер.: V. A. Bykovskii, O. A. Gorkusha, “Minimal bases of three-dimensional complete lattices”, *Sb. Math.*, **192:2** (2001), 215–223.
- [97] Ph. Furtwängler, M. Zeisel, “Zur Minkowskischen Parallelepipedapproximation”, *Monatsh. Math. Phys.*, **30:1** (1920), 177–198.
- [98] P. M. Pepper, “Une application de la géométrie des nombres à une généralisation d’une fraction continue”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **56** (1939), 1–70.
- [99] S. Felsner, F. Zickfeld, “Schnyder woods and orthogonal surfaces”, *Discrete Comput. Geom.*, **40:1** (2008), 103–126.
- [100] O. Karpenkov, A. Ustinov, “Geometry of Minkowski–Voronoi tessellations of the plane”, 2014, 30 pp., arXiv:1407.0135.
- [101] H. Davenport, “On the product of three homogeneous linear forms. IV”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **39:1** (1943), 1–21.
- [102] H. P. F. Swinnerton-Dyer, “On the product of three homogeneous linear forms”, *Acta Arith.*, **18** (1971), 371–385.
- [103] J. W. S. Cassels, H. P. F. Swinnerton-Dyer, “On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, **248:940** (1955), 73–96.

- [104] J. W. S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Corrected reprint of the 1971 ed., Classics Math., Springer-Verlag, Berlin, 1997, viii+344 pp.; рус. пер. 1-го изд.: Дж. В. Касселс, *Введение в геометрию чисел*, Мир, М., 1965, 421 с.
- [105] J. Buchmann, "A generalization of Voronoi's unit algorithm. I", *J. Number Theory*, **20**:2 (1985), 177–191.
- [106] J. Buchmann, "A generalization of Voronoi's unit algorithm. II", *J. Number Theory*, **20**:2 (1985), 192–209.
- [107] J. Buchmann, "The computation of the fundamental unit of totally complex quartic orders", *Math. Comp.*, **48**:117 (1987), 39–54.
- [108] J. Buchmann, "On the computation of units and class numbers by a generalization of Lagrange's algorithm", *J. Number Theory*, **26**:1 (1987), 8–30.
- [109] T. W. Cusick, "Diophantine approximation of ternary linear forms", *Math. Comp.*, **25**:113 (1971), 163–180.
- [110] T. W. Cusick, "The two-dimensional Diophantine approximation constant. II", *Pacific J. Math.*, **105**:1 (1983), 53–67.
- [111] H. C. Williams, G. Cormack, E. Seah, "Calculation of the regulator of a pure cubic field", *Math. Comp.*, **34**:150 (1980), 567–611.
- [112] H. C. Williams, "Some results concerning Voronoi's continued fraction over $\mathcal{Q}(\sqrt[3]{D})$ ", *Math. Comp.*, **36**:154 (1981), 631–652.
- [113] В. А. Быковский, "Теорема Валена для двумерных подходящих дробей", *Матем. заметки*, **66**:1 (1999), 30–37; англ. пер.: V. A. Bykovskii, "Vahlen theorem for two-dimensional convergents", *Math. Notes*, **66**:1 (1999), 24–29.
- [114] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, "Уточнение теоремы Валена для базисов Минковского трехмерных решеток", *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 163–168; англ. пер.: M. O. Avdeeva, V. A. Bykovskii, "Refinement of Vahlen's theorem for Minkowski bases of three-dimensional lattices", *Math. Notes*, **79**:2 (2006), 151–156.
- [115] А. В. Устинов, "К трехмерной теореме Валена", *Матем. заметки*, **95**:1 (2014), 154–156; англ. пер.: A. V. Ustinov, "On the three-dimensional Vahlen theorem", *Math. Notes*, **95**:1 (2014), 136–138.
- [116] G. Ramharter, "On Mordell's inverse problem in dimension three", *J. Number Theory*, **58**:2 (1996), 388–415.
- [117] В. А. Быковский, "О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул", *Чебышевский сб.*, **3**:2(4) (2002), 27–33.
- [118] В. А. Быковский, "О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул", *Докл. РАН*, **389**:2 (2003), 154–155; англ. пер.: V. A. Bykovskii, "On the error of number-theoretic quadrature formulas", *Dokl. Math.*, **67**:2 (2003), 175–176.
- [119] В. А. Быковский, "Алгоритм вычисления локальных минимумов решеток", *Докл. РАН*, **399**:5 (2004), 587–589.
- [120] В. А. Быковский, С. В. Гассан, "Алгоритм вычисления локальных минимумов целочисленных решеток и его приложения", *Вестн. ТОГУ*, 2011, № 1(20), 39–48.
- [121] О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский, "Об оценках гиперболической дзета-функции решеток", *Чебышевский сб.*, **6**:2(14) (2005), 129–137.
- [122] В. А. Быковский, "Отклонение сеток Коробова", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:3 (2012), 19–38; англ. пер.: V. A. Bykovskii, "The discrepancy of the Korobov lattice points", *Izv. Math.*, **76**:3 (2012), 446–465.
- [123] O. Karpenkov, *Geometry of continued fractions*, Algorithms Comput. Math., **26**, Springer, Heidelberg, 2013, xviii+405 pp.

- [124] А. В. Устинов, “О точках модулярной гиперболы под графиком линейной функции”, *Матем. заметки*, **97**:2 (2015), 296–301; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On points of the modular hyperbola under the graph of a linear function”, *Math. Notes*, **97**:2 (2015), 284–288.
- [125] A. Weil, “On some exponential sums”, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **34** (1948), 204–207.
- [126] T. Estermann, “On Kloosterman’s sum”, *Mathematika*, **8**:1 (1961), 83–86.
- [127] S. R. Finch, *Mathematical constants*, Encyclopedia Math. Appl., **94**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, xx+602 pp.

Алексей Владимирович Устинов
(Alexey V. Ustinov)

Хабаровское отделение Института прикладной
математики ДВО РАН

E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Поступила в редакцию
04.12.2014