Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ю. Панина, И. Стрейну, Виртуальные многогранники, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 6, 139–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:46:02

УДК 514.144

Виртуальные многогранники

Г. Ю. Панина, И. Стрейну

Появившиеся в различных областях математики — от алгебры многогранников и торических многообразий до теории вложенных графов с внутренними напряжениями, виртуальные многогранники представляют собой естественное алгебраическое обобщение выпуклых многогранников. Будучи определенными как элементы группы Гротендика, связанной с полугруппой выпуклых многогранников, они, однако, могут быть представлены геометрически.

Данный обзор связывает теорию виртуальных многогранников с другими областями геометрии, содержит описание разнообразных геометрических с взаимными связями, а также дает ряд приложений этой теории.

Библиография: 50 названий.

Ключевые слова: разность Минковского, раскрашенная ломаная, многогранная функция, опорные функции, напряженный граф, алгебра многогранников Мак-Маллена, многогранник Максвелла.

DOI: 10.4213/rm9639

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	140
2. Основное определение.....	143
2.1. Выпуклые многогранники и сложение по Минковскому.....	143
2.2. Виртуальные многогранники как группа Гротендика.....	144
2.3. Грани виртуальных многогранников.....	146
3. Виртуальные многогранники в размерности два.....	147
3.1. Группа виртуальных многоугольников: геометрические представления.....	149
3.2. Примеры виртуальных многоугольников.....	151
3.3. Некрашенные виртуальные многоугольники.....	153
4. Виртуальные многоугольники в произвольной размерности.....	154
4.1. Алгебра многогранных функций.....	154
4.2. Алгебра многогранников Мак-Маллена.....	159
4.3. Опорные функции.....	161
4.4. Комбинаторная группа Пикара: системы сдвинутых конусов....	166

Работа выполнена при поддержке Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, программ Research-in-Pairs (2009, 2014), NSF, Smith College и Международного математического института им. Л. Эйлера (Санкт-Петербург).

© Г. Ю. Панина, И. Стрейну, 2015

5. Трехмерные виртуальные многогранники	171
5.1. Виртуальные многогранники как графы с внутренним напряжением	171
5.2. Виртуальные многогранники, представленные многогранниками Максвелла	175
5.3. Распознавание виртуальных многогранников	179
5.4. Примеры трехмерных виртуальных многогранников	181
5.5. Опорная функция и поднятие графа с внутренним напряжением	184
6. Приложения	185
6.1. Задача А. Д. Александрова и гиперболические виртуальные многогранники	185
6.2. Валюации виртуальных многогранников. Объем и подсчет целых точек	190
6.3. Смешанные объемы виртуальных многогранников	193
6.4. Разложение Минковского	195
6.5. Проективные торические многообразия, группа Пикара и теорема Римана–Роха	196
7. Заключительные замечания	199
Список литературы	199

1. Введение

Выпуклые многогранники в евклидовом пространстве образуют полугруппу относительно сложения по Минковскому. Эта полугруппа не является группой, так как большинство ее элементов не обратимы. Однако в ней выполняется закон сокращения, что дает возможность расширить полугруппу до ее группы Гротендика. По определению последняя является *группой виртуальных многогранников*. С чисто алгебраической точки зрения виртуальные многогранники обобщают естественным образом выпуклые многогранники: говоря коротко, виртуальный многогранник есть *формальная разность Минковского* двух выпуклых многогранников.

Первая цель обзора – связать формальное определение с различными геометрическими представлениями (геометризациями). Вторая цель – представить спектр приложений, а также дать представление о задачах, мотивировавших появление этой теории. Мы покажем, что предложенные конструкции дают аппарат, позволяющий решать задачи, лежащие как внутри, так и вне теории виртуальных многогранников.

Один из основных выводов обзора состоит в том, что виртуальные многогранники наследуют многие свойства выпуклых: для виртуального многогранника корректно определены грани, опорная функция, внешний нормальный веер, объем, число целых точек. Однако опорная функция виртуального многогранника не обязательно выпукла, объем может оказаться отрицательным, внешний нормальный веер может содержать невыпуклые конусы и т. д.

В математике обычной является ситуация, когда различный формализм приводит по существу к одним и тем же понятиям. Таковыми являются теория гомотопий, теория (ориентированных) матроидов, комбинаторно жесткие структуры, абстрактные многогранники и другие теории, допускающие крипоморфные определения, т. е. внешне различные системы аксиом. Каждое определение мотивировано той или иной областью математики, и имеются правила, связывающие один формализм с другим.

Наша теория также вписывается в эти рамки: виртуальные многогранники могут быть определены как кусочно линейные функции, как наборы сдвинутых конусов, как обратимые пучки на торическом многообразии и (в размерности 3) как графы с внутренним напряжением, вложенные в единичную сферу, а также (в размерности 2) – как особый тип замкнутых ломаных. Однако в каждом случае мы получаем одну и ту же группу (с точностью до канонического изоморфизма) – группу виртуальных многогранников.¹

Говоря точнее, для каждого из представлений мы опишем группу некоторых геометрических объектов, изоморфную группе виртуальных многогранников. Канонические изоморфизмы между различными представлениями появляются автоматически: от одного представления мы переходим к группе виртуальных многогранников, а от нее – к другому представлению. Однако в некоторых ситуациях имеются прямые переходы от одного представления к другому.

Исторические замечания. Впервые виртуальные многогранники были введены и систематически изучены в статье А. Г. Хованского и А. В. Пухликова [1]. Их работа мотивирована идеями, пришедшими из геометрии торических многообразий.² А именно, известно, что обратимые пучки на проективном торическом многообразии образуют группу (группу Пикара). Известно также, что очень обильные пучки соответствуют выпуклым многогранникам (и образуют полугруппу). Естественным является вопрос: *какой геометрический объект соответствует прочим элементам группы Пикара?* Если опустить технические детали, ответ таков: *группа Пикара изоморфна группе виртуальных многогранников.*

Неявно идея вычитания многогранников по Минковскому появилась в литературе уже достаточно давно. Например, в своей работе 1939 г. [2] А. Д. Александров рассматривает поточечные разности опорных функций. Эта конструкция, хотя в статье об этом явно не говорится, дает один из способов ввести понятие виртуальных многогранников, представленный в п. 4.3.

Х. Грёмер [3] в работе 1977 г. пишет: *“Оказывается, при сложении невыпуклых множеств... необходимо принимать во внимание кратности точек, что немедленно приводит к рассмотрению функций вместо обычных множеств”*. Он также отмечает: *“Сложение по Минковскому оказывается по своему смыслу ближе к умножению в некоторой алгебре, чем к операции сложения”*. Мы объясним эту точку зрения в п. 4.1.

Сравнительно недавно Л. Родригес и Х. Розенберг [4] ввели некоторый класс полиэдральных поверхностей – так называемых *подиэдральных ежей*³, который оказывается подклассом виртуальных многогранников. В дальнейшем

¹ Строгие определения приведены в разделе 2.

² Подробности см. в п. 6.5.

³ Исходный французский термин – *hérissons*.

ежи изучались В. А. Александровым в статье [5]. Мы опишем похожую (но не идентичную) конструкцию, покрывающую всю группу виртуальных многогранников, в разделе 5. И. Мартинес-Мор также определил и изучал полиэдральные ежи, предложив в [6] в качестве определения индуктивную (по размерности) конструкцию. В разделе 5 мы опишем конструкцию, основанную на схожих идеях.

Кроме вышеуказанного, виртуальные многогранники появляются неявно в алгебре многогранников Питера Мак-Маллена [7], о чем будет рассказано в п. 4.2.

Необходимое предостережение. Теория виртуальных многогранников базируется на некотором специальном понимании *вычитания по Минковскому*, которое нельзя путать с другими трактовками. Дело в том, что в имеющейся литературе под этим названием понимаются существенно различные конструкции. Например, в книге Р. Шнайдера [8] под вычитанием Минковского подразумевается нечто совершенно иное, чем наше определение из раздела 2. В частности, определение Шнайдера не дает группу: с его определением $P - P \neq 0$.

Краткое резюме обзора. Мы начнем (см. раздел 2) с основного определения виртуальных многогранников как формальных разностей выпуклых многогранников. Некоторые важные свойства и конструкции следуют непосредственно из определения.

Первая геометризация виртуальных многогранников, действенная лишь в размерности 2, описана в разделе 3: мы представляем виртуальные многоугольники как *раскрашенные ломаные*. Хотя это “игрушечное” представление возможно лишь для двумерных многогранников, оно уже дает представление о разнообразии примеров.

В разделе 4 описаны четыре геометризации, имеющие место в любой размерности: 1) представление виртуальных многогранников некоторыми кусочно постоянными функциями (элементами алгебры Пухликова и Хованского); 2) представление элементами первого весового пространства алгебры многогранников Мак-Маллена; 3) представление опорными функциями и, наконец, 4) представление системами сдвинутых конусов.

В разделе 5 мы обращаемся к размерности три. Предложенная геометризация базируется на теории жесткости. В этом контексте виртуальные многогранники появляются как равновесные пружинные графы на сфере. Более интуитивную геометризацию виртуальных многогранников дают *многогранники Максвелла*, обобщающие замкнутые полиэдральные поверхности. Мы увидим, что грани многогранника Максвелла являются плоскими многоугольниками, но могут (как и сам многогранник) иметь самопересечения и обладать прочими нетипичными свойствами.

Обзор завершается разделом 6 с несколькими приложениями предложенной теории. А именно, мы обсудим: 1) задачи, обобщающие теоремы А. Д. Александрова для гладких выпуклых тел и выпуклых многогранников; 2) объем и смешанный объем виртуальных многогранников; 3) разложение Минковского многогранников и 4) связь с геометрией алгебраических торических многообразий.

2. Основное определение

В этом разделе мы определим виртуальные многогранники как формальные разности Минковского выпуклых многогранников и сформулируем их свойства, следующие непосредственно из определения.

2.1. Выпуклые многогранники и сложение по Минковскому. На протяжении всей статьи мы подразумеваем, что объемлющее пространство есть евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ с фиксированной системой координат и стандартным скалярным произведением, обозначаемым через $\langle x, y \rangle$.

Мы отождествляем точки пространства и их радиус-векторы, что, в частности, дает право говорить о сумме точек.

Кроме того, мы часто позволяем себе вольность не различать аффинные и векторные подпространства $\mathbb{R}^d$. Дело в том, что все наши конструкции инвариантны относительно параллельных переносов, т.е. не зависят от выбора начала координат.

Выпуклые многогранники. *Выпуклый многогранник* есть выпуклая оболочка конечного непустого подмножества $\mathbb{R}^d$. Для краткости в дальнейшем мы будем иногда опускать термин “выпуклый” и писать просто “многогранник”. Множество выпуклых многогранников в пространстве $\mathbb{R}^d$ будем обозначать через $\mathcal{P}_d$, опуская иногда “ d ” для краткости: $\mathcal{P} := \mathcal{P}_d$.

Размерностью выпуклого многогранника K называется размерность его *аффинной оболочки*, т.е. минимального по включению аффинного подпространства, содержащего K . Таким образом, размерность выпуклого многогранника, живущего в $\mathbb{R}^d$, не обязательно равна d ; в частности, многогранник может вырождаться до точки.

Сложение Минковского. Сложение Минковского ставит в соответствие двум выпуклым многогранникам K и L некоторый новый выпуклый многогранник $K \otimes L$, задаваемый формулой

$$K \otimes L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$$

(см. пример на рис. 1).

Рис. 1. Сумма Минковского пятиугольника и треугольника

Замечание об обозначениях. Для обозначения суммы Минковского в большинстве работ используется аддитивный знак “+” или “ $\oplus$ ”. Однако, как мы увидим, в алгебре многогранников (см. п. 4.1) эта операция является умножением, а не сложением. По этой причине стали использоваться мультипликативные обозначения: “ $\times$ ” в [3], “ $\ast$ ” в [1] и “ $\cdot$ ” в [7]. В настоящей статье мы

пользуемся обозначением “ $\otimes$ ”, чтобы подчеркнуть связь с тензорным произведением обратимых пучков (см. п. 6.5).

Основные свойства. Перечислим базовые свойства суммы Минковского.

1. Сумма многогранника K и точки p есть параллельный перенос многогранника K на вектор p , обозначаемый через $K + p$.
2. Сумма Минковского допускает факторизацию по параллельным переносам. А именно, для всех p_1 и p_2 выполнено равенство

$$(K_1 + p_1) \otimes (K_2 + p_2) = (K_1 \otimes K_2) + (p_1 + p_2).$$

3. Закон сокращения: равенство $K \otimes L = K' \otimes L$ влечет за собой равенство $K = K'$.

За исключением нескольких (особо оговоренных) случаев, мы **факторизуем по параллельным переносам**, т. е. отождествляем многогранники K и $K + p$.

Сумма Минковского снабжает множество $\mathcal{P}$ выпуклых многогранников (рассматриваемых с точностью до параллельного переноса) структурой коммутативной полугруппы, в который выполняется закон сокращения. *Нейтральным (единичным) элементом* E является одноточечный многогранник. Поскольку все одноточечные многогранники отличаются на параллельный перенос, то мы можем считать, что единичный элемент представлен началом координат: $E = \{O\}$.

2.2. Виртуальные многогранники как группа Гротендика.

Группа Гротендика: общая конструкция. Всякая коммутативная полугруппа S (мы пользуемся мультипликативной нотацией) с единичным элементом e может быть расширена до группы тогда и только тогда, когда выполнен закон сокращения:

$$kl = ml \implies k = m.$$

Единственная (с точностью до изоморфизма) минимальная абелева группа, содержащая S в качестве подполугруппы, называется *группой Гротендика полугруппы* S .⁴ Ее элементами являются классы эквивалентности формальных выражений (или *формальных дробей*) kl^{-1} , где $k, l \in S$, и, кроме того, две дроби $k_1l_1^{-1}$ и $k_2l_2^{-1}$ отождествляются тогда и только тогда, когда $k_1l_2 = k_2l_1$.

Вложение отождествляет всякий элемент k полугруппы с дробью ke^{-1} .

Элементарным примером служит группа ненулевых рациональных чисел, содержащая мультипликативную полугруппу целых чисел. Если продолжить эту аналогию, то выпуклые многогранники соответствуют целым числам, тогда как виртуальные многогранники соответствуют дробным рациональным числам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Группа $\mathcal{P}^*$ виртуальных многогранников* есть группа Гротендика полугруппы выпуклых многогранников $\mathcal{P}$.

Обратный элемент к выпуклому многограннику K будем обозначать через $K^{\otimes -1}$. Перефразируем определение:

⁴Понятие “группа Гротендика” определено для любой коммутативной полугруппы. Однако в отсутствие закона сокращения полугруппа не вкладывается в свою группу Гротендика.

- 1) виртуальный многогранник есть формальное выражение (формальная дробь) вида $K \otimes L^{\otimes -1}$;
- 2) два виртуальных многогранника, представленные дробями $K_1 \otimes L_1^{\otimes -1}$ и $K_2 \otimes L_2^{\otimes -1}$, являются равными тогда и только тогда, когда $K_1 \otimes L_2 = K_2 \otimes L_1$;
- 3) умножение в группе виртуальных многогранников есть в точности правило умножения дробей:

$$(K_1 \otimes L_1^{\otimes -1}) \otimes (K_2 \otimes L_2^{\otimes -1}) := (K_1 \otimes K_2) \otimes (L_1 \otimes L_2)^{\otimes -1};$$

- 4) единичный элемент представлен формальной дробью $E \otimes E^{\otimes -1}$, где E – единичный элемент полугруппы $\mathcal{P}$, т. е. одноточечный многогранник; единичный элемент также представлен формальными дробями вида $K \otimes K^{\otimes -1}$.

Естественное вложение выпуклых многогранников в группу виртуальных многогранников

$$\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{P}^*$$

ставит в соответствие каждому выпуклому многограннику $K \in \mathcal{P}$ формальную дробь $K_1 \otimes E^{\otimes -1}$.

Размерность виртуального многогранника. Поскольку виртуальный многогранник не является множеством точек, определение его размерности требует некоторой аккуратности. Мы задаем *размерность виртуального многогранника* P как наименьшее число k такое, что P может быть представлен дробью $P = K \otimes L^{\otimes -1}$, где выпуклые многогранники K и L лежат в одном и том же k -мерном подпространстве $\mathbb{R}^k$.

Сделаем необходимое замечание. С одной стороны, говоря о выпуклых (и виртуальных) многогранниках, мы, как правило, имеем в виду некоторое определенное объемлющее пространство. С другой стороны, всякое фиксированное вложение $\mathbb{R}^d$ в некоторое $\mathbb{R}^{d'}$ дает вложение $\mathcal{P}_d$ в $\mathcal{P}_{d'}$, которое продолжается на все прочие конструкции обзора. Иными словами, если думать не о всей группе целиком, а о геометризации одного конкретного виртуального многогранника или о сумме (разности) двух конкретных многогранников, то об объемлющем пространстве можно не заботиться.

В последующих разделах будут представлены различные геометрические представления виртуальных многогранников (*геометризации виртуальных многогранников*). В качестве необходимой разминки обсудим простейшие геометризации – для объемлющего пространства размерности нуль и один.

Виртуальные многогранники в размерности нуль. Эта группа состоит из одного элемента E , который соответствует единственному нульмерному многограннику.

Виртуальные многогранники в размерности один. Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^1$ – это отрезок. После факторизации по параллельным переносам мы можем отождествить каждый отрезок с неотрицательным вещественным числом – его длиной. Легко видеть, что сумма Минковского соответствует сумме длин. Таким образом, полугруппа $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^1$ изоморфна полугруппе $\mathbb{R}_{\geq 0}$ с полугрупповой операцией “+”. Следовательно, группа виртуальных отрезков $\mathcal{P}^*$ изоморфна группе $\mathbb{R}$.

В дальнейшем окажется полезным следующая классификация виртуальных отрезков:

- отрезок длины нуль, т.е. одноточечный многогранник, представляющий единичный элемент E ;
- отрезки положительной длины, т.е. обычные невырожденные выпуклые отрезки;
- элементы, обратные к выпуклым отрезкам.

Можно думать, что обратные к выпуклым отрезкам суть отрезки, снабженные отрицательным знаком, однако геометрически удобнее пользоваться раскраской, а не знаками.

Виртуальные многогранники в размерности один как раскрашенные отрезки. Простое представление виртуальных отрезков таково: выпуклые отрезки (соответствующие положительным числам) мы красим в красный цвет, а обратные к выпуклым (соответствующие отрицательным числам) – в синий.

Это представление является базой индуктивной конструкции и будет использовано в геометризации виртуальных многогранников в больших размерностях.

Сформулируем очевидные правила сложения по Минковскому виртуальных отрезков в терминах раскрашенных отрезков:

- сумма двух отрезков одного и того же цвета есть отрезок, имеющий длину, равную сумме длин слагаемых, и наследующий цвет слагаемых;
- два разноцветных отрезка одной и той же длины дают в сумме одноточечный (неокрашенный) отрезок,
- два разноцветных отрезка разной длины дают в сумме отрезок, цвет которого совпадает с цветом более длинного из слагаемых, а длина равна разности длин (в частности, обратный к отрезку есть отрезок той же длины, но другого цвета).

2.3. Грани виртуальных многогранников. Виртуальные многогранники, так же как и выпуклые многогранники, обладают хорошо определенной структурой граней. Напомним необходимые определение и свойства граней выпуклых многогранников, многие из которых сохраняются для виртуальных многогранников, тогда как некоторые (выпуклость и иногда – топология) утрачиваются.

Грани выпуклых многогранников. Пусть K – выпуклый многогранник в размерности d . Для вектора $v \in \mathbb{R}^d$ определим *грань многогранника K в направлении v* как подмножество K , на котором скалярное произведение $\langle v, \cdot \rangle$ принимает максимальное значение. Например, $v = 0$ влечет $K^v = K$. Другими словами, грань K^v есть пересечение K с опорной к K гиперплоскостью, чей внешний нормальный вектор равен v .

ТЕОРЕМА 1. *Грани виртуальных многогранников обладают следующими свойствами [9].*

- *Выпуклость граней: грань выпуклого многогранника есть выпуклый многогранник.*
- *“Быть гранью” есть наследуемое свойство: грань грани выпуклого многогранника K есть некоторая грань K .*

• Грани ведут себя аддитивно: *грань суммы в направлении v есть сумма граней слагаемых, т. е.*

$$(K \otimes L)^v = K^v \otimes L^v.$$

Грани выпуклого многогранника, упорядоченные по включению, образуют частично упорядоченное множество, несущее полную информацию о комбинаторике многогранника и называемое *решеткой граней*.

Обратимся к граням виртуальных многогранников. Конкретные примеры и геометризационные конструкции появятся позже.

Грани виртуальных многогранников. Для фиксированного вектора v мы имеем полугрупповой гомоморфизм $K \rightarrow K^v$, отправляющий выпуклый многогранник в выпуклый многогранник, лежащий в гиперплоскости с нормальным вектором v . В [10] показано, что полугрупповой гомоморфизм можно единственным образом продолжить до гомоморфизма между двумя группами Гротендика.

Это соображение позволяет определить *грань виртуального многогранника P в направлении v* как образ P под действием этого группового гомоморфизма. Более явная конструкция такова.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $P = K \otimes L^{\otimes -1}$ – виртуальный многогранник, где K и L – выпуклые многогранники, и пусть v – некоторый вектор. *Грань P^v определена равенством*

$$P^v = K^v \otimes (L^v)^{\otimes -1}.$$

С этим определением мы имеем следующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Грани виртуальных многогранников обладают следующими свойствами [10].*

- Грани “виртуальны”: *грань виртуального многогранника есть виртуальный многогранник.*
- Свойство “быть гранью” наследуется: *грань грани виртуального многогранника P есть грань P .*
- Грани ведут себя аддитивно: *грань суммы (двух виртуальных многогранников) в направлении v есть сумма граней слагаемых, т. е. $(K \otimes L)^v = K^v \otimes L^v$.*

Эта теорема позволяет ввести отношение частичного порядка на множестве граней виртуального многогранника: *грань F виртуального многогранника P меньше грани F' того же самого виртуального многогранника P , если F является гранью F' .*

Грани можно сортировать по размерности. Как обычно, k -мерную грань мы называем для краткости *k -гранью*, 0-грани называются *вершинами*, 1-грани – *ребрами*, а $(d - 1)$ -грани d -мерного многогранника – *гипергранями*.

3. Виртуальные многогранники в размерности два

В этом разделе мы рассмотрим первую несложную (однако интересную) геометризацию виртуальных многогранников. Это не просто полезное упражнение, но необходимый шаг для геометризации трехмерных многогранников в разделе 5.

Раскрашенные звезды. *Раскрашенная звезда* есть конечный набор ориентированных отрезков на плоскости, для которого выполнены следующие условия:

- (а) один из концов каждого отрезка совпадает с началом координат O ;
- (б) отрезки раскрашены в два цвета (разбиты на два класса) – красный и синий;
- (с) каждый красный отрезок ориентирован в направлении от начала координат O , а каждый синий – в сторону O ; тем самым, у нас имеется набор векторов;
- (д) сумма получившихся векторов равна нулю;
- (е) никакие два отрезка не пересекаются (за исключением точки O).

На раскрашенной звезде имеется естественный циклический порядок против часовой стрелки.

От звезды к ломаной. Беря векторы один за другим, в порядке против часовой стрелки, и прикладывая начало следующего вектора к концу предыдущего, мы получим ориентированную замкнутую ломаную с раскраской на ребрах (см., например, рис. 3).

Условимся, что с пустой звездой ассоциирована одноточечная (вырожденная) замкнутая ломаная. В этом случае раскраска отсутствует, так как мы красим лишь ребра (но не вершины).

Раскрашенные замкнутые ломаные. *Замкнутая ломаная* есть циклически упорядоченное множество точек на плоскости $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, для которого $p_i \neq p_{i+1}$.⁵ Циклический порядок означает, что две замкнутые ломаные считаются равными, если одна получается из другой перенумерацией точек, соответствующей степени циклической перестановки $(2, 3, \dots, n, 1)^k$.

Тем самым, на замкнутой ломаной возникает индуцированная ориентация, обращение которой (в большинстве случаев) дает другую замкнутую ломаную. Точки с соседними номерами мы соединяем ребром, которое, согласно определению, есть отрезок ненулевой длины. Подчеркнем, что мы не запрещаем ни совпадение несоседних пар точек, ни взаимное пересечение ребер.

Раскрашенная замкнутая ломаная есть замкнутая ломаная $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ с ребрами, раскрашенными в два цвета – красный и синий, которая получается вышеописанной процедурой “от звезды к ломаной” из некоторой раскрашенной звезды.

От ломаной к звезде. Очевидно, что всякая раскрашенная ломаная однозначно восстанавливает раскрашенную звезду.

Выпуклые многоугольники, раскрашенные ломаные и раскрашенные звезды. Граница выпуклого многоугольника представляет собой замкнутую ломаную, образованную вершинами многоугольника, идущими в направлении против часовой стрелки. Если покрасить все ребра многоугольника в красный цвет, то получится раскрашенная ломаная. Нам будет удобно иногда не различать выпуклый многоугольник и ломаную, являющуюся его границей.

Нам также потребуются вырождения: *одноточечный многоугольник* $\{p_1\}$, у которого нет ребер, и отрезок $\{p_1, p_2\}$, чью границу мы представляем как

⁵Мы нумеруем точки индексами по модулю n .

двухреберную ломаную, (красные) ребра $\overrightarrow{p_1p_2}$ и $\overrightarrow{p_2p_1}$ которой противоположно направлены.

Следующий линейный алгоритм вычисляет сумму Минковского, используя представление многоугольника звездой (см. рис. 2).

Рис. 2. (а) Сумма Минковского двух выпуклых многоугольников.
(б) Сумма соответствующих выпуклых звезд.

Алгоритм: сумма Минковского двух выпуклых многоугольников.

1. *От многоугольника к звезде*: представим многоугольники звездами.
2. *Геометрическое слияние*: объединим звезды и сложим векторы, имеющие общий определяющий угол.
3. *От звезды к многоугольнику*: восстановим выпуклый многоугольник из получившейся звезды.

После этих приготовлений мы готовы определить *виртуальные многоугольники*.

3.1. Группа виртуальных многоугольников: геометрические представления. В этом пункте мы опишем несколько геометрических представлений виртуальных многоугольников – в виде *раскрашенных звезд* и в виде *раскрашенных замкнутых ломаных* (см. рис. 3). В каждом случае операция суммирования (и вычитания) по Минковскому также будет геометризована.

Соглашение о рисунках. В дальнейшем в рисунках часто будут существенны цвета ребер. Чтобы различать красный и синий в черно-белой печати, мы обозначаем синие ребра линией $- \cdot - \cdot -$.

Рис. 3. Виртуальный многоугольник, представленный (а) раскрашенной замкнутой ломаной и (б) раскрашенной звездой

Итак, мы описали два множества (раскрашенные звезды и раскрашенные замкнутые ломаные) вместе со связывающими их биекциями. Наш следующий шаг – ввести групповые операции, превращающие эти биекции в групповые изоморфизмы.

Сумма Минковского раскрашенных звезд. Сумма Минковского двух раскрашенных звезд (см. рис. 4) есть раскрашенная звезда, задаваемая следующим алгоритмом.

1. Объединим звезды.
2. Если нашлись два отрезка с общим определяющим углом (т. е. два перекрывающихся отрезка), сложим их в соответствии с правилами сложения одномерных виртуальных многогранников, представленных раскрашенными отрезками. Мы получим ориентированный отрезок с тем же определяющим углом.
3. Если сумма оказывается нулевой, удалим соответствующий отрезок из звезды.

Рис. 4. Сумма Минковского двух виртуальных многоугольников, представленных раскрашенными звездами

Сумма Минковского раскрашенных замкнутых ломаных. Сумма Минковского раскрашенных замкнутых ломаных (см. рис. 5) задана следующим алгоритмом.

1. Возьмем раскрашенные звезды, ассоциированные с раскрашенными ломаными.
2. Сложим их по Минковскому.
3. Восстановим раскрашенную ломаную по суммарной звезде.

Рис. 5. Сумма Минковского двух виртуальных многоугольников, представленных раскрашенными замкнутыми ломаными

Обращение по Минковскому. Вышеописанные операции являются групповыми, так как все элементы обратимы (см. рис. 6):

- обратный элемент к раскрашенной звезде получается из исходной заменой цветов и ориентаций всех отрезков;

Рис. 6. Виртуальный многоугольник, обратный к виртуальному многоугольнику, изображенному на рис. 3 как (a) раскрашенная ломаная и (b) раскрашенная звезда

- обратная раскрашенная ломаная есть поворот исходной на угол π с обращением цветов всех ребер.

Подведем итог.

ТЕОРЕМА 3. *Группы раскрашенных замкнутых ломаных и раскрашенных звезд изоморфны. Изоморфизмами являются описанные выше соответствия “от ломаной к звезде” и “от звезды к ломаной”. Кроме того, обе группы канонически изоморфны группе виртуальных многогранников в размерности два.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полугруппа выпуклых многоугольников вкладывается в каждую из групп, причем каждая из групп порождена образом соответствующего вложения.

Грани двумерных виртуальных многогранников, представленных раскрашенными ломаными. У двумерного виртуального многогранника K , представленного раскрашенной ломаной $(p_1, \dots, p_k)$, имеется три типа граней. Нульмерные грани (вершины) суть в точности точки $p_1, \dots, p_k$. Единственная двумерная грань есть сам виртуальный многогранник K . Одномерные грани (ребра) суть раскрашенные отрезки, ребра ломаной. При этом красные ребра представляют одномерные выпуклые многогранники, а синие ребра – обратные к выпуклым, как обсуждалось в разделе 2.

3.2. Примеры виртуальных многоугольников. Для выработки некоторой интуиции дадим ряд примеров виртуальных многоугольников, представленных раскрашенными ломаными.

ПРИМЕР 1 (обратный к выпуклому многоугольнику). Чтобы обратить по Минковскому выпуклый многогранник, следует повернуть его на угол π и покрасить все ребра в синий цвет.

ПРИМЕР 2 (раскрашивание выпуклых ломаных). Всякая раскраска треугольника дает виртуальный многоугольник (см. рис. 7); разные раскраски дают разные виртуальные многоугольники. Лишь четыре раскраски четырехугольной ломаной дают виртуальный многоугольник (см. рис. 8).

Рис. 7. Все восемь способов раскраски треугольника дают ломаную, представляющую виртуальный многогранник (на рисунке изображены четыре из них)

Рис. 8. Четыре раскраски четырехугольника, дающие виртуальные многоугольники

ПРИМЕР 3 (шестиугольник и дважды покрытый треугольник). Дважды покрытый треугольник (рис. 9, справа) есть вырождение шестизвенной ломаной, изображенной слева. Обе ломаные получаются процедурой “от звезды к ломаной”. Мы видим, что ломаная, представляющая виртуальный многоугольник, может иметь самопересечения и наложения ребер; однако в звезде параллельные ребра обязаны иметь противоположные направления.

Рис. 9. Слева: виртуальный шестиугольник с тремя парами параллельных ребер и его звезда. Справа: вырождение этого примера дает дважды покрытый треугольник.

ПРИМЕР 4 (параллельные соседние ребра). Рис. 10 дает два примера виртуальных многоугольников с парой параллельных соседних ребер. Слева: пары

Рис. 10. Слева: пара соседних параллельных одноцветных ребер. Справа: пара соседних параллельных разноцветных ребер.

параллельных ребер одного цвета; в этом случае они обязаны перекрываться. Справа: параллельные ребра имеют разные цвета; в этом случае они не могут перекрываться.

ПРИМЕР 5 (множественные самопересечения). Ломаная, представляющая виртуальный многоугольник, может иметь сколь угодно много самопересечений (см. рис. 11).

Рис. 11. Разность Минковского двух правильных шестиугольников

3.3. Некрашенные виртуальные многоугольники. Виртуальные многоугольники получили геометрическое представление как раскрашенные замкнутые ломаные, обладающие некоторыми особыми свойствами. Естественно спросить: можно ли “забыть” цвета? Иначе говоря, является ли свойство “представлять виртуальный многогранник” свойством (некрашенной) ломаной? Мы покажем, что забывающее отображение из группы виртуальных многогранников в множество некрашенных ломаных не является ни инъективным, ни сюръективным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *v-ломаная* – это некрашенная ломаная допускающая раскраску, представляющую некоторый виртуальный многоугольник.

ПРИМЕР 6 (не все замкнутые ломаные суть *v-ломаные*). Две ломаные на рис. 12 не являются *v-ломаными*. Первая ломаная содержит три параллельных ребра. Это немедленно указывает на то, что при любой раскраске ассо-

Рис. 12. Две ломаные, не представляющие виртуальные многоугольники. (a): у этой ломаной три параллельных ребра; (b₁): перебор показывает, что эту ломаную невозможно правильно раскрасить; (b₂): например, первые ее восемь ребер допускают правильную раскраску (индуцирующую порядок против часовой стрелки), но эта раскраска не продолжается до правильной раскраски всей ломаной.

цированная звезда не будет существовать: в звезде не допускается перекрывание отрезков. Во втором примере попытка раскрасить ребра заканчивается неудачей: никакая раскраска не дает звезду с порядком ребер против часовой стрелки.

В контексте приведенных примеров естественно задать вопрос: *как распознать ломаные, обладающие правильной раскраской, т. е. представляющие виртуальный многоугольник?* Перебор всех возможных 2^n раскрасок неэффективен. Однако нетрудно построить линейный алгоритм, решающий эту задачу.

Итак, мы видели, что некоторые ломаные не допускают раскраски, дающей виртуальный многоугольник. У некоторых же ломаных есть несколько вариантов раскраски.

ЗАМЕЧАНИЕ. Правильные раскраски одной и той же ломаной идут парами: если некоторая раскраска дает некоторый виртуальный многогранник K , то обращение всех цветов дает виртуальный многоугольник, обратный центрально-симметричному образу K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. v -ломаная, имеющая более трех правильных раскрасок, называется избыточной.

ПРИМЕР 7 (существуют избыточные v -ломаные). Треугольник на рис. 7 и четырехугольник на рис. 8 избыточны.

В заключение подчеркнем, что описанные выше представления виртуальных многогранников существуют лишь в размерности два и не обобщаются на большие размерности.

4. Виртуальные многоугольники в произвольной размерности

Обратимся к четырем представлениям виртуальных многогранников, имеющим место в любой размерности. Для каждого представления мы опишем некоторую группу геометрических объектов, а также их канонический изоморфизм с группой виртуальных многогранников. Каждый раз мы (а) вначале определяем множество с групповой операцией, (b) затем показываем, что подгруппа выпуклых многогранников вкладывается в эту группу, и (с) наконец, показываем, что предложенная группа порождена образом этого вложения, т. е. порождена выпуклыми многогранниками. В некоторых случаях мы описываем непосредственные, прямые изоморфизмы между представлениями.

4.1. Алгебра многогранных функций. Виртуальные многогранники появляются в *алгебре многогранных функций*, построенной А. Г. Хованским и А. В. Пухликовым [1]. Конструкция мотивирована вопросами геометрии торических алгебраических многообразий; мы обсудим это подробнее в п. 6.5. Мы сравним представление двумерного виртуального многогранника раскрашенной ломаной и его же представление многогранной функцией. Кроме того, мы укажем прямой изоморфизм этого представления с представлением комбинаторной группой Пикара (см. п. 4.4).

Характеристические функции выпуклых многогранников. Начнем строить алгебру, определив характеристическую функцию $I_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклого многогранника K формулой

$$I_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Многогранные функции. *Многогранная функция* – это функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, представляемая конечной линейной комбинацией $f = \sum \alpha_i I_{K_i}$ характеристических функций некоторых выпуклых многогранников K_i . Коэффициенты α_i (называемые *весами*) суть произвольные (возможно, отрицательные) целые числа. Слагаемые I_{K_i} могут соответствовать “частям” разных размерностей, включая одноточечные многогранники.

Подчеркнем, что в алгебре многогранных функций *мы не факторизуем по параллельным переносам*, т. е. мы различаем многогранник и его сдвиг.

Упомянутое разложение многогранной функции никогда не единственно (см. например, рис. 13): здесь характеристическая функция большого прямоугольника представлена как “прямоугольник плюс прямоугольник минус отрезок”, а также как “треугольник плюс треугольник минус диагональный отрезок”.

Рис. 13. Многогранная функция разложима многими способами

Кольцевая структура. На множестве всех многогранных функций введем поточечное сложение, а также умножение $\otimes$, порожденное сложением Минковского выпуклых многогранников.

Произведение многогранных функций. Произведение $f \otimes g$ двух многогранных функций $f = \sum_i \alpha_i I_{K_i}$ и $g = \sum_j \beta_j I_{L_j}$ мы определяем формулой

$$f \otimes g = \left(\sum_i \alpha_i I_{K_i} \right) \otimes \left(\sum_j \beta_j I_{L_j} \right) := \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j I_{K_i \otimes L_j}. \quad (1)$$

Приведенное в [1] доказательство корректности этого определения (т. е. независимости правой части от разложений сомножителей) основано на эквивалентном определении произведения двух функций f, g как свертки относительно эйлеровой характеристики χ :

$$(f \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) d\chi(y).$$

Интегрирование по эйлеровой характеристике – красивая техника, описанная впервые О. Виро [11]. Ее основополагающая идея такова: будучи аддитивной, эйлерова характеристика в некотором смысле ведет себя как мера.

В частности, некоторые кусочно постоянные функции можно интегрировать по χ . Поскольку в дальнейшем мы не пользуемся этой конструкцией, отошлем читателя за подробностями к [11].

Только что определенные операции сложения и умножения превращают множество многогранных функций в коммутативное кольцо. Тожественно нулевая функция играет роль нуля кольца, а характеристическая функция начала координат, т.е. I_E , где $E = \{0\}$, является единичным элементом кольца.

В данном обзоре нам важна именно кольцевая структура, поэтому мы опускаем структуру алгебры над рациональными числами.

Выпуклые многогранники обратимы. Замечательное свойство выпуклых многогранников состоит в том, что их характеристические функции обратимы в построенном кольце.

Покажем это, начав со вспомогательной конструкции. Пусть K – выпуклый многогранник. Внутренность K , взятая в его же аффинной оболочке, называется *относительной внутренностью* и обозначается через $\text{Rint}(K)$. Нам потребуется центральная симметрия Symm относительно начала координат O .

Несложно показать, что характеристическая функция относительной внутренности

$$I_{\text{Rint}(K)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \text{Rint}(K); \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

есть многогранная функция.

ТЕОРЕМА 4 [1]. *Для всякого выпуклого многогранника K его характеристическая функция I_K обратима в кольце многогранных функций. Обратная функция есть*

$$(I_K)^{\otimes -1}(x) = (-1)^{\dim K} I_{\text{Rint}(\text{Symm } K)} = \begin{cases} (-1)^{\dim K}, & \text{если } x \in \text{Rint}(\text{Symm } K); \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 5 [1]. *Алгебра многогранных функций содержит мультипликативную подгруппу, фактор которой по параллельным переносам изоморфен группе виртуальных многогранников. Канонический изоморфизм ставит в соответствие каждому выпуклому многограннику K его характеристическую функцию I_K . В частности, изоморфизм переводит многогранник $K^{\otimes -1}$, обратный к выпуклому, в многогранную функцию, описанную в теореме 4.*

Теперь можно говорить о виртуальных многогранниках, представленных многогранными функциями. В статье [1] показано, что виртуальные многогранники почти исчерпывают класс обратимых элементов кольца.

ТЕОРЕМА 6 [1]. *Всякий обратимый элемент алгебры многогранных функций есть с точностью до знака виртуальный многогранник. Точнее, если многогранная функция f обратима, то либо f , либо $-f$ есть виртуальный многогранник.*

Необходимое и достаточное условие обратимости получено в той же статье [1].

Рис. 14. Слева: многогранная функция, представляющая выпуклый треугольник. Справа: обратная к ней.

Примеры. Для выработки интуиции дадим ряд примеров виртуальных многогранников в размерности два, представленных многогранными функциями. Поскольку все наши функции кусочно постоянны, на рисунках мы отмечаем области постоянства и ставим соответствующие значения. На рис. 14 изображена функция, равная 1 строго внутри треугольника и 0 на границе и вне треугольника. На рис. 15 изображена функция, равная -2 внутри треугольника, -1 на границе и 0 вне треугольника.

Рис. 15. Дважды покрытый треугольник (см. рис. 9), представленный многогранной функцией

Рис. 16 иллюстрирует умножение многогранных функций. Цель конкретного вычисления – найти сумму выпуклого треугольника и открытого отрезка, взятого с весом -1 .

Вначале мы представляем открытый отрезок с весом -1 в виде “*вершина плюс вершина минус замкнутый отрезок*”. Затем мы раскрываем скобки и выполняем сложение по Минковскому. В результате у нас имеются два треугольника и трапеция с весом -1 . Мы рисуем их отдельно, хотя в действительности они перекрываются. Далее мы складываем их веса, что дает нам последнюю из картинок.

Как мы знаем, открытый отрезок с весом -1 представляет обратный по Минковскому к выпуклому отрезку. Поэтому в данном примере вычислено представление разности по Минковскому треугольника и отрезка.

Приведем еще один пример для сравнения двух представлений виртуальных многоугольников: рис. 17 представляет многогранной функцией виртуальный многогранник, изображенный на рис. 3.

Рис. 16. Умножение в алгебре многогранных функций

Рис. 17. Представление многогранной функцией виртуального многоугольника, изображенного на рис. 3

Исторические замечания. Алгебра многогранников определена А. Г. Хованским и А. В. Пухликовым в [1], хотя основополагающие идеи встречаются у Х. Грёмера в [3]. Отметим, что в настоящем обзоре мы пользуемся терми-

нологией, отличной от терминологии оригинальной статьи, где многогранные функции назывались *выпуклыми цепями*. Термин “многогранная функция” использовался Г. Ю. Паниной в [10], [12].

Мы ограничились описанием лишь кольцевой структуры, оставив структуру $\mathbb{Q}$ -алгебры за рамками статьи и адресуя читателя к [1].

4.2. Алгебра многогранников Мак-Маллена. Обратимся теперь ко второму представлению виртуальных многогранников, а именно к алгебре многогранников П. Мак-Маллена [7]. Она тесно связана с алгеброй многогранных функций Хованского и Пухликова, но не идентична ей. Существенное различие состоит в том, что в этот раз мы факторизуем по параллельным переносам, что влечет существенные алгебраические последствия. В частности, здесь появляется много нильпотентов, что, в свою очередь, дает много обратимых элементов (упомянем для контраста, что в алгебре многогранных функций нильпотенты отсутствуют).

Группа виртуальных многогранников $\mathcal{P}^*$ появляется здесь иначе, и теперь она не изоморфна группе обратимых элементов алгебры. Мы покажем, что $\mathcal{P}^*$ изоморфна некоторой аддитивной подгруппе алгебры многогранников, называемой *первым весовым пространством*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (алгебра многогранников Мак-Маллена [7]). Алгебра многогранников $(\Pi, +, \otimes)$ порождена формальными символами $[K]$, где K пробегает множество выпуклых многогранников $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^d$. Образующими соотношениями являются:

$$[K] + [L] = [K \cap L] + [K \cup L], \quad \text{если } K, L, K \cup L \in \mathcal{P}, \quad (2)$$

$$[K] = [K + t], \quad \text{если } K \in \mathcal{P} \text{ и } t - \text{вектор переноса}. \quad (3)$$

Умножение задается для выпуклых многогранников K, L как сумма Минковского $[K] \otimes [L] := [K \otimes L]$, а затем переносится по линейности на все элементы Π .

Таким образом, элементы алгебры многогранников суть формальные линейные комбинации вида $\sum \alpha_i [K_i]$, рассматриваемые по модулю образующих соотношений (2) и (3). Рис. 18 и 19 иллюстрируют эти соотношения. Единичным элементом E является одноточечный многогранник, что схоже с алгеброй многогранных функций.

Рис. 18. В алгебре Мак-Маллена многогранники присутствуют с точностью до параллельного переноса. Поэтому эти два элемента алгебры равны.

Рис. 19. Образующие соотношения в алгебре Мак-Маллена

Умножение на рациональное число в алгебре многогранников возможно не всегда. Но если оно возможно, то определено единственным способом. Сформулируем необходимое и достаточное условие его существования.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [7]. Если элемент $\sum \alpha_i [K_i]$ алгебры многогранников и целое $a \neq 0$ таковы, что $\sum \alpha_i$ делится на a , то существует единственный f такой, что $af = \sum \alpha_i [K_i]$ (в этом случае мы пишем $f = \frac{1}{a} \sum \alpha_i [K_i]$).

Если же $\sum \alpha_i$ не делится на a , то такой элемент f не существует.

Из алгебры многогранных функций в алгебру многогранников имеется сюръективный кольцевой гомоморфизм, что делает эти алгебры схожими. Однако в алгебре многогранников группа единиц (группа обратимых элементов) гораздо больше. Причина заключается в том, что условие $\sum a_i = 0$ влечет за собой нильпотентность элемента $f = \sum a_i [K_i]$, а значит, обратимость $1 - f$. Обратный элемент $(1 - f)^{-1} = 1 + f + f^2 + \dots$ определен корректно, так как в нашем случае сумма конечна. Отсюда следует, что элемент $\sum a_i [K_i]$ обратим в алгебре многогранников тогда и только тогда, когда $\sum a_i = \pm 1$.

Весовые пространства. Алгебра многогранников Π может быть снабжена структурой (почти) градуированной алгебры, т.е. разложена в прямую сумму однородных компонент, называемых *весовыми пространствами*. Эта градуировка непосредственно связана с градуировкой кольца Чжоу торического многообразия (см. п. 6.5). О других аспектах разложения на весовые пространства можно прочесть в [7].

Разложение f в сумму однородных компонент сходно со стандартной градуировкой в алгебре многочленов. k -я однородная компонента в алгебре многочленов состоит из однородных многочленов степени k . Последние могут быть распознаны по следующему свойству: однородные многочлены степени k суть в точности такие многочлены, для которых тождество $p(\lambda x) \equiv \lambda^k p(x)$ справедливо при любом вещественном λ . Имея в виду эту аналогию, будем говорить, что элемент f алгебры многогранников *однороден степени один*, если для всякого положительного целого λ образ элемента f при гомотетии с коэффициентом λ (обозначим его через $(\lambda)f$) совпадает с суммой λ копий элемента f :

$$(\lambda)f = \underbrace{f + \dots + f}_{\lambda}.$$

Стоит заметить, что выпуклый многогранник не однороден.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Первое весовое пространство* алгебры Π есть множество всех однородных элементов степени один.

Очевидно, что первое весовое пространство есть аддитивная группа.

ПРИМЕР 8 (однородный элемент в размерности один). Если K – отрезок, а P – точка, то $[K] - [P]$ однороден степени один, т. е. принадлежит первому весовому пространству.

ТЕОРЕМА 8 [13; лемма 2.2]. *Группа виртуальных многогранников изоморфна первому весовому пространству алгебры многогранников.*

Изоморфизм переводит выпуклый многогранник K в

$$\log K = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{([K] - E)^i}{i},$$

где E – одноточечный многогранник, т. е. единичный элемент алгебры Π .

Отметим, что поскольку $[K] - E$ – нильпотент, мы имеем дело с конечной суммой.

В п. 6.5 мы с помощью этой теоремы свяжем группу Пикара торического многообразия и группу виртуальных многогранников.

Исторические замечания. Алгебра многогранников “выросла” из задачи о равновесности, которая, в свою очередь, получается из третьей проблемы Гильберта при замене группы всех изометрий пространства на группу параллельных переносов. В этом свете на алгебру многогранников можно смотреть как на универсальную группу инвариантных относительно переносов конечно аддитивных мер на выпуклых многогранниках (такие меры называются трансляционно-инвариантными valuationами).

Алгебра многогранников имеет несколько замечательных изоморфных представлений. Одно из них – прямой предел колец Чжоу торических многообразий [14], другое использует кусочно полиномиальные (относительно некоторого веера) функции [15].

Замечательна связь алгебры Мак-Маллена с g -теоремой о характеристизации числа граней простого многогранника. Гипотеза о необходимых и достаточных условиях была сформулирована в 1970 г. П. Мак-Малленом. Самое первое доказательство необходимости условий Мак-Маллена принадлежит Р. Стенли [16] и использует алгебро-геометрический подход. Впоследствии появились другие доказательства необходимости: (чисто комбинаторное) доказательство Стенли, а также доказательство Мак-Маллена [17], использующее разложение алгебры многогранников на весовые пространства. Упомянем также доказательство В. А. Тиморина (см. [18]).

Выпуклые многогранники производят и другие интересные алгебраические структуры, например кольцо простых многогранников (см. [19] и [20]). Однако последнее не содержит группу виртуальных многогранников.

4.3. Опорные функции. Опорная функция выпуклого тела – базовое понятие выпуклой геометрии. Для нас важно, что опорная функция ведет себя аддитивно относительно сложения Минковского и, следовательно, естественно ожидать, что вычитанию Минковского соответствует вычитание опорных функций.

Мы покажем, что виртуальные многогранники обладают, как и выпуклые, корректно определенной кусочно линейной опорной функцией, а следовательно, и внешним нормальным веером. Хотя при переходе к виртуальным многогранникам мы теряем выпуклость опорной функции и веера, многие прочие свойства сохраняются.

Конусы, веера и сферические веера. Конус $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ – это замкнутое множество точек, сохраняющееся при гомотетиях с центром в начале координат: для всякого $x \in \sigma$ и всякого неотрицательного λ точка λx лежит в σ . В большинстве публикаций (например, в [9]) предполагается, что конус – выпуклое множество, так как выпуклые конусы традиционно появляются в контексте выпуклых многогранников. В нашем случае мы опускаем это предположение: конус может быть невыпуклым.

Мы работаем с *полиэдральными конусами*, т. е. предполагаем, что граница конуса кусочно линейна. Объемлющее пространство $\mathbb{R}^n$ и одноточечное множество $\{O\}$ являются конусами. *Веером* называется конечный набор конусов Σ в $\mathbb{R}^n$, обладающий следующими свойствами: (а) каждая грань конуса $\sigma \in \Sigma$ принадлежит Σ ; (b) для каждых двух конусов $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ их пересечение $\sigma_1 \cap \sigma_2$ есть объединение граней σ_1 и σ_2 ; (с) объединение всех конусов есть пространство $\mathbb{R}^n$. *Выпуклый веер* содержит только выпуклые конусы.

Чтобы проще представить веер, определим *сферический веер* как пересечение веера и (стандартной единичной) сферы. Сферический веер есть разбиение сферы на сферические многогранники (не обязательно выпуклые). Каждый сферический веер можно продолжить до веера, поэтому у нас есть простое соответствие между этими объектами.

Говорят, что веер Σ *грубее* веера Σ' или что Σ' – *измельчение* веера Σ , если $\sigma \in \Sigma'$ влечет существование такого конуса $\tau \in \Sigma$, что $\sigma \subseteq \tau$ (см. пример на рис. 20).

Опорная функция выпуклого многогранника K есть функция

$$h_K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

определенная формулой

$$h_K(x) = \max_{y \in K} \langle x, y \rangle,$$

где $\langle x, y \rangle$ – стандартное скалярное произведение.

Для вектора общего положения x максимум скалярного произведения $\langle x, \cdot \rangle$ достигается на одной из вершин многогранника. Например, на рис. 20, если x лежит в закрашенном конусе, то соответствующий максимум достигается на вершине p . Следовательно, в закрашенном конусе опорная функция многоугольника совпадает с опорной функцией точки p , т. е. с некоторой линейной функцией $\langle p, x \rangle$ (см. рис. 21).

Приведем ряд общеизвестных свойств опорной функции.

ЛЕММА 9. Пусть K, L – выпуклые многогранники. Пусть $K + t$ – перенос K на вектор t . Тогда:

- 1) h_K – выпуклая кусочно линейная функция;
- 2) опорные функции h_K и h_{K+t} отличаются на линейное слагаемое;

3) h_K положительно однородна: $h_K(\lambda x) = \lambda h_K(x)$ для $\lambda \geq 0$; в частности, h_K равна нулю в начале координат O ;

4) опорная функция суммы Минковского равна сумме опорных функций слагаемых:

$$h_{K \oplus L} = h_K + h_L.$$

Внешний нормальный веер выпуклого многогранника. Веер выпуклого многогранника можно задать двумя эквивалентными способами. (Чтобы задать веер виртуального многогранника, мы будем пользоваться вторым определением.)

- Для выпуклого многогранника K области линейности его опорной функции h_K порождают веер Σ_K , называемый *внешним нормальным веером многогранника K* или, для краткости, просто *веером многогранника K* .

- Другой способ определить веер таков. Для каждой грани F многогранника K зададим конус

$$\sigma_F := \{v \in \mathbb{R}^n : K^v = F\},$$

состоящий из всех векторов v , для которых грань K^v равна F . Замыкание всех таких конусов, когда F пробегает множество всех граней K , является веером многогранника K .

На рис. 20 показаны примеры внешнего нормального веера.

Рис. 20. Два выпуклых многоугольника и их внешние нормальные веера

Непосредственно из определения вытекает следующая двойственность.

ЛЕММА 10. Грани выпуклого многогранника K находятся в биективном соответствии с конусами веера Σ_K . При этом:

- 1) k -мерные грани K соответствуют $(n - k)$ -мерным конусам веера;
- 2) аффинная оболочка грани и аффинная оболочка соответствующего конуса ортогональны;
- 3) эта биекция обращает включения.

ПРИМЕР 9. На рис. 21 изображен пятиугольник, его веер и график опорной функции.

Рис. 21. Выпуклый пятиугольник, его веер и график опорной функции

Группа опорных функций. Рассмотрим множество всех непрерывных, положительно однородных, выпуклых, кусочно линейных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$. С операцией поточечного сложения это множество становится полугруппой. Каждая такая функция является опорной для некоторого единственным образом определенного выпуклого многогранника. Обозначим через $\mathcal{S}$ эту полугруппу, профакторизованную по (глобально) линейным функциям. Отображение, ставящее в соответствие выпуклому многограннику его опорную функцию, является полугрупповым изоморфизмом, связывающим полугруппу выпуклых многогранников $\mathcal{P}$ и полугруппу $\mathcal{S}$.

Расширим $\mathcal{S}$ до *группы опорных функций*, т.е. до ее группы Гротендика. Она состоит из всех непрерывных, положительно однородных, кусочно линейных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$ и рассматриваемых с точностью до линейных слагаемых. Переход к группе Гротендика означает, что мы разрешаем вычитать функции и, следовательно, теряем выпуклость. Однако остальные свойства из леммы 9 сохраняются.

Следующее определение описывает канонический изоморфизм между группой виртуальных многогранников и группой опорных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $K = L \oplus M^{\otimes -1}$ – виртуальный многогранник, а h_L и h_M – опорные функции L и M соответственно. *Опорная функция* виртуального многогранника K есть разность опорных функций: $h_K := h_L - h_M$.

Поскольку группа опорных функций порождена выпуклыми функциями, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 11. *Группа виртуальных многогранников и группа опорных функций канонически изоморфны. Изоморфизм ставит в соответствие виртуальному многограннику его опорную функцию.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. У виртуального многогранника K каждая грань F порождает конус

$$\sigma_F := \{v \in \mathbb{R}^n: K^v = F\},$$

состоящий из всех векторов v , для которых грань K^v равна F . Совокупность замыканий всех таких конусов, когда F пробегает множество граней K , называется *веером* виртуального многогранника K .

Рис. 22. Слева: виртуальный многоугольник, представленный раскрашенной ломаной. В центре: его веер. Справа: график его опорной функции. В этом случае веер является выпуклым, но опорная функция – нет.

Рис. 23. Слева: виртуальный многоугольник, представленный раскрашенной ломаной. В центре: его веер. Справа: график его опорной функции. В этом случае ни веер, ни его опорная функция не являются выпуклыми.

В отличие от выпуклого случая, конусы веера не обязательно выпуклы (см. рис. 22 и 23).

У виртуального многогранника K конусы веера максимальной размерности соответствуют вершинам K . Из этого следует простая, однако важная лемма.

ЛЕММА 12. *Виртуальный многогранник K однозначно восстанавливается по своему вееру, множеству вершин и соответствию между вершинами и максимальными конусами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в этом случае легко восстановить опорную функцию $h_K(x)$ как кусочно линейную функцию, ограничение которой на каждый максимальный конус σ_i равно скалярному произведению (p_i, x) . Здесь p_i – вершина, соответствующая конусу σ_i .

ПРИМЕР 10. В размерности два веер получается поворотом по часовой стрелке на угол $\pi/2$ звезды, ассоциированной с виртуальным многоугольником. После поворота нужно продлить отрезки, составляющие звезду, до лучей, а цвета раскраски забыть.

В завершение приведем список виртуальных треугольников, представленных многогранниками функциями и раскрашенными ломаными, вместе с их веерами (см. рис. 24).

Рис. 24. Виртуальные треугольники, представленные многогранными функциями и раскрашенными ломаными, вместе с их веерами

Исторические замечания. Идея поточечного вычитания опорных функций выпуклых тел уже встречалась в литературе не раз и не является совершенно новой. Мы особо хотим упомянуть работу А. Д. Александрова 1939 г. [2], в которой такие разности использовались при доказательстве теоремы о характеристизации сферы. Эта теорема будет отправной точкой обсуждения в п. 6.1. Однако такая терминология (“опорная функция виртуального многогранника”) появилась только недавно: первое систематическое исследование опорных функций виртуальных многогранников через опорные функции проведено в [1] (см. также [21]). Веера виртуальных многогранников (только в размерности 3) появляются в [4] и [5], хотя авторы этих работ рассматривают некоторый ограниченный класс виртуальных многогранников, *полиэдральных ежесей*, а именно тех, у которых веера выпуклы. Как мы убедились, последние не покрывают всю группу виртуальных многогранников. Опорные функции и веера активно использовались также в [10], [22]–[24].

4.4. Комбинаторная группа Пикара: системы сдвинутых конусов.

В этом пункте, следуя Г. Эвальду [9], мы опишем представление виртуальных многогранников *системами сдвинутых конусов*. Этот термин мы заимствуем у Эвальда. Отметим, что имеется простое соответствие этого представления и представления элементами алгебры многогранных функций, описанной в п. 4.1.

Двойственный конус. В этом пункте все конусы предполагаются выпуклыми. Это условие необходимо для корректного определения двойственного конуса: для выпуклого конуса σ *двойственный конус* $\check{\sigma}$ определяется так:

$$\check{\sigma} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 0 \text{ для всех } y \in \sigma\}.$$

Сдвинутые конусы, ассоциированные с выпуклым многогранником. Пусть K – выпуклый многогранник, Σ – его веер. Предположим, что конус $\sigma \in \Sigma$ соответствует вершине p_σ многогранника K . Тогда конус, порожденный многогранником K при вершине p_σ , есть параллельный перенос на p_σ двойственного конуса $\check{\sigma}$. Другими словами, он равен сумме Минковского $p_\sigma \otimes \check{\sigma}$.

Аналогично, если конус $\sigma \in \Sigma$ двойственен грани F , то конус, порожденный K при грани F , есть параллельный перенос $\check{\sigma}$ на вектор p_σ , где в качестве p_σ можно выбрать любую точку аффинной оболочки F .

Тем самым, выпуклый многогранник порождает систему сдвинутых конусов (см. рис. 25 и 27).

Рис. 25. Слева: конус σ , соответствующий вершине p_σ многоугольника K . Справа: сдвинутый конус $p_\sigma \otimes \check{\sigma}$.

Классическим является следующее *разложение Бриансона–Грама* [25] (также известное как формула Грама–Соммервиля или уравнение Грама), см. рис. 26.

Рис. 26. Разложение Бриансона–Грама треугольника

ТЕОРЕМА 13 [25]. Для выпуклого многогранника K и ассоциированной с ним системы сдвинутых конусов

$$\{p_\sigma \otimes \check{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$$

характеристическая функция многогранника K равна альтернированной сумме характеристических функций конусов:

$$I_K = \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{\text{codim } \sigma} I_{p_\sigma \otimes \check{\sigma}}.$$

Следующее свойство ортогональности вытекает непосредственно из леммы 10.

ЛЕММА 14. Для всякого конуса $\sigma \in \Sigma$ и всякой его грани τ вектор $p_\sigma - p_\tau$ ортогонален аффинной оболочке $\text{aff}(\tau)$.

Системы сдвинутых конусов. В свете предыдущего обсуждения естественно ввести следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть Σ – некоторый выпуклый веер в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\{p_\sigma \in \mathbb{R}^n : \sigma \in \Sigma\}$ – некоторый набор векторов переносов. Система сдвинутых двойственных конусов

$$\{p_\sigma \otimes \check{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$$

называется *системой сдвинутых конусов, подчиненной вееру Σ* , если выполнено следующее условие согласованности: для всяких конуса $\sigma \in \Sigma$ и его грани τ вектор $p_\sigma - p_\tau$ ортогонален аффинной оболочке $\text{aff}(\tau)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Данное определение несколько отличается от определения Эвальда из [9], а именно, мы не предполагаем, что веер является рациональным. Мы также не предполагаем, что многогранник является решеточным (т. е. с целочисленными координатами вершин). Эти условия с необходимостью появятся позже, когда нам понадобятся торические многообразия. Подчеркнем, однако, что веер обязан быть выпуклым, так как иначе не определены двойственные конусы.

Групповая структура для систем сдвинутых конусов. Предполагая, что веер Σ зафиксирован, зададим групповую операцию на множестве систем сдвинутых конусов:

$$\{p_\sigma \otimes \check{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma} + \{p'_\sigma \otimes \check{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma} = \{(p_\sigma + p'_\sigma) \otimes \check{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}.$$

Мы получаем коммутативную группу с нейтральным элементом $\{O \otimes \check{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$.

Чтобы профакторизовать по параллельным переносам, мы факторизуем построенную группу по всем элементам вида $\{p \otimes \check{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$.

Полученная группа $\mathcal{CP}_\Sigma$ названа (в книге Г. Эвальда [9]) *комбинаторной группой Пикара, подчиненной вееру Σ* .

Группа виртуальных многогранников, подчиненная вееру. Теперь мы готовы связать нашу конструкцию с виртуальными многогранниками. *Группа $\mathcal{P}_\Sigma^*$ виртуальных многогранников, подчиненных вееру Σ* , есть подгруппа $\mathcal{P}^*$ тех виртуальных многогранников, для которых опорная функция линейна на

Рис. 27. (a) Треугольник. (b) Его веер. (c) Двойственные конусы. (d) Сдвинутые двойственные конусы.

каждом из конусов Σ . Другими словами, виртуальный многогранник K подчинен вееру Σ , если веер Σ_K грубее веера Σ .

Следующая теорема устанавливает канонический изоморфизм между двумя группами.

ТЕОРЕМА 15. *Комбинаторная группа Пикара $\mathcal{CP}_\Sigma$ изоморфна группе виртуальных многогранников, подчиненных вееру Σ . Изоморфизм ставит в соответствие выпуклому многограннику ассоциированную систему сдвинутых конусов. Будучи определенным для выпуклых многогранников, изоморфизм продолжается на виртуальные многогранники.*

ПРИМЕР 11. На рис. 28 изображены системы сдвинутых конусов для треугольника и обратного к нему. Веер выпуклого треугольника содержит семь конусов: три двумерных, три одномерных (три луча) и один нульмерный $\{O\}$. Следовательно, двойственные конусы суть три конуса с вершиной, три полу-

Рис. 28. Системы сдвинутых конусов для треугольника и для обратного к треугольнику

плоскости и вся плоскость (т. е. двойственный конус к $\{O\}$). Рис. 27 показывает все конусы, а рис. 28 – только конусы с вершиной.

Перейдем теперь от подгруппы виртуальных многогранников, подчиненных некоторому вееру, ко всей группе. Если Σ' – некоторое измельчение веера Σ , то имеется естественное включение $\mathcal{P}_{\Sigma}^* \rightarrow \mathcal{P}_{\Sigma'}^*$. Это дает нам право говорить об *индуктивном пределе* групп $\mathcal{P}_{\Sigma}^*$. Это означает, что мы берем объединение всех таких групп и отождествляем элементы, пользуясь описанным включением. В результате мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 16. *Группа виртуальных многогранников $\mathcal{P}^*$ изоморфна индуктивному пределу групп $\mathcal{P}_{\Sigma}$.*

Предположим, что виртуальный многогранник задан системой сдвинутых конусов. Существует элегантный способ представить его же многогранной функцией, используя непосредственное обобщение вышеупомянутого разложения Бриансона–Грама.

ТЕОРЕМА 17 [1]. *Для виртуального многогранника, представленного системой сдвинутых конусов*

$$K = \{p_{\sigma} \otimes \check{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma},$$

его каноническим образом в алгебре многогранных функций является следующая функция:

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{\text{codim } \sigma} I_{p_{\sigma} \otimes \check{\sigma}}.$$

В качестве упражнения можно проверить эту формулу для треугольника, пользуясь рис. 27.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичная конструкция будет иметь место, если ограничиться *решеточными многогранниками*, т. е. такими, вершины которых принадлежат стандартной решетке $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае мы получим *группу решеточных виртуальных многогранников $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^*$, группу решеточных виртуальных многогранников, подчиненных вееру $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}, \Sigma}^*$, решеточную комбинаторную группу Пикара $\mathcal{CP}_{\Sigma}^{\mathbb{Z}}$* , а также группу $\mathcal{CP}_{\Sigma}$. Здесь имеет смысл рассматривать лишь рациональные веера.

Итак, мы описали еще одно представление группы виртуальных многогранников. Оно окажется наиболее удобным для работы с торическими многообразиями (см. п. 6.5), так как система сдвинутых конусов дает возможность непосредственно описать обратимый пучок.

Исторические замечания. Термин “группа Пикара” отчетливо указывает на изначальную мотивировку, связанную с группой Пикара торического многообразия. Стоит отметить, что группа Пикара проективного торического многообразия сама имеет различные представления: как группа обратимых пучков, как группа дивизоров и как группа линейных расслоений. Для торического многообразия сдвинутые конусы доставляют еще одно, выпукло-геометрическое представление.

5. Трехмерные виртуальные многогранники

В этом разделе мы опишем две геометризации виртуальных многогранников, являющиеся специфичными для размерности три. В некотором смысле они обобщают двумерную геометризацию раскрашенными ломаными. Поэтому естественно ожидать, что в размерности три появятся некоторые модификации полиэдральных поверхностей. Первая геометризация представляет виртуальный многогранник как *вложенный в сферу граф с внутренним напряжением*. Простые правила превращают множество таких графов в группу, изоморфную группе виртуальных многогранников. Второе представление дает некоторое подмножество *многогранников Максвелла*, называемых так, поскольку впервые многогранники (точнее, полиэдральные поверхности) такого вида появились в работе Дж. К. Максвелла. Обе предложенные геометризации опираются на теорию вложенных графов с внутренним напряжением и полиэдральных подятий, принадлежащую Максвеллу [26].

В математической литературе используются разнообразные понятия многогранника. Иногда многограннику разрешается быть невыпуклым, иногда допускаются невыпуклые грани, иногда разрешается несферическая топология многогранника и т. д. Мы, в некотором смысле, пойдем дальше: в нашей конструкции многогранники Максвелла имеют вершины, ребра и грани. Грани суть плоские замкнутые ломаные, но с возможными самопересечениями.

5.1. Виртуальные многогранники как графы с внутренним напряжением.

Вложенные сферические графы. *Граф* – это пара $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$ – конечное множество вершин, а E – конечное множество ребер. Мы разрешаем параллельные ребра и петли, а также включаем в число графов *однопетельный граф*, состоящий из одного (замкнутого в окружность) ребра, не содержащего ни одной вершины. Мы также допускаем графы, содержащие однопетельный граф в качестве связной компоненты. По техническим причинам (позже станет ясно, по каким именно) мы запрещаем изолированные и двухвалентные вершины.

Сферическая реализация (или *вложение*) графа есть инъективное отображение

$$p: V \rightarrow S^2$$

его вершин в единичную сферу вместе с отображением, ставящим в соответствие каждому ребру отрезок геодезической (дугу большого круга). Образом ребра с концами i и j должен служить отрезок с концами p_i и p_j . Это отображение должно быть *вложением*, т. е. образы ребер не должны пересекаться или перекрываться. Ребро не обязательно реализуется как кратчайшая геодезическая, поэтому при фиксированных концах ребра у нас есть (по крайней мере) две возможности реализовать ребро дугой. Мы также требуем, чтобы образ однопетельного графа был большим кругом.

Сферическое вложение индуцирует *структуру граней*. Гранями мы будем называть компоненты связности, сферические многоугольники, остающиеся

при удалении из сферы образов ребер и вершин. Грани не обязательно являются топологическими дисками, так как могут быть дыры. Например, если граф несвязен, то любое его вложение имеет такую грань.

Рис. 29. Векторы $u_{i,e}$, задающие напряжение

Напряжение. Обозначим через $N(i)$ множество ребер, инцидентных вершине $i \in V$. Пусть $u_{i,e}$ – единичный вектор, касательный к геодезической, соответствующей ребру $e \in N(i)$, в точке p_i и ориентированный по направлению к ребру (см. рис. 29). *Равновесным внутренним напряжением* (или просто *напряжением*) на сферически вложенном графе называется заданная на множестве ребер функция

$$s: E \rightarrow \mathbb{R},$$

для которой выполнено условие равновесия при каждой вершине $i \in V$:

$$\sum_{e \in N(i)} s_e u_{i,e} = 0. \quad (4)$$

Условимся, что напряжением однопетельного графа может быть любое число.

Напряжение *нетривиально*, если оно не есть тождественный нуль. Напряжение *ненулевое*, если оно не обращается в нуль ни на каком ребре графа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это определение несколько отличается от оригинального определения Максвелла для графов, вложенных в плоскость [26], однако в обоих случаях на граф с напряжением надо смотреть как на систему пружин, живущую на сфере (или, как у Максвелла, на плоскости). В зависимости от своего растяжения (или сжатия), пружины производят силы, которые по условию (4) должны находиться в равновесии. Действительно, вектор $s_e u_{i,e}$ равен силе, с которой пружина, представляющая ребро e , действует на вершину p_i .

В дальнейшем, рисуя граф с напряжением, мы красим в красный цвет ребра с положительным напряжением и в синий – ребра с отрицательным напряжением.

Следующее предложение описывает соответствие между выпуклыми многогранниками и графами с положительным напряжением (см. рис. 30).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – выпуклый многогранник. Его сферический ввер порождает вложенный граф G_K , ребра которого двойственны ребрам многогранника K . Пусть функция s_K ставит в соответствие ребру графа G_K длину соответствующего ребра многогранника K . Тогда s_K задает внутреннее равновесное напряжение графа G_K . Обратно, всякий положительно напряженный граф представляет выпуклый многогранник $K \subset \mathbb{R}^3$.

Рис. 30. С выпуклым многогранником связан вложенный граф с положительным равновесным напряжением

Это представление включает одноточечный многогранник (представленный пустым графом) и отрезок, представленный однопетельным графом. “Плоские” многогранники (т. е. двумерные многогранники, живущие в $\mathbb{R}^3$) представлены графами с двумя антиподальными вершинами и по крайней мере тремя ребрами.

Снабдим множество графов с ненулевым напряжением групповой операцией.

Сложение напряженных графов. Сумма вложенных в сферу графов с внутренними равновесными напряжениями, $(G, s) = (G_1, s_1) + (G_2, s_2)$, определяется посредством следующего алгоритма.

Алгоритм: сумма напряженных графов (см. рис. 31, 32).

1. Каждый из вложенных графов индуцирует разбиение сферы S^2 . Возьмем граф G , индуцирующий их общее подразбиение: могут появиться новые вершины и некоторые ребра “разрежутся на части”.

2. На графе G естественно задать сумму напряжений s_1 и s_2 следующим образом. Для ребра e графа G , лежащего на некотором ребре графа G_1 , но не лежащего ни на каком ребре графа G_2 , напряжение заимствуется у s_1 (аналогично, если ребро лежит на некотором ребре графа G_2 , напряжение заимствуется у s_2). Если же ребро лежит одновременно на ребре графа G_1 и на ребре графа G_2 , мы берем сумму напряжений. Поскольку полученное напряжение может оказаться нулевым, необходимы следующие шаги.

3. Удалим из графа G все ребра с нулевым напряжением. Удалим изолированные вершины.

4. Если в графе G присутствуют вершины валентности два, то прилегающие ребра с необходимостью образуют угол π и имеют равное напряжение. В этом случае мы удаляем двухвалентную вершину, склеив прилегающие ребра.

Свойства сложения напряженных графов. Следующие свойства вытекают из алгоритма непосредственно: (а) нулевым элементом (по отношению

Рис. 31. Сумма графов с положительным напряжением

Рис. 32. Сумма двух графов: одного с положительным, а другого – с отрицательным напряжением

к сложению графов) является пустой граф; (b) сумма положительно напряженных графов соответствует сумме Минковского ассоциированных выпуклых многогранников; (c) у каждого графа имеется обратный, получаемый одновременным умножением всех напряжений на -1 ; (d) группа графов с ненулевым напряжением порождена положительно напряженными графами.

Отсюда немедленно вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 19 [23]. *Группа графов с ненулевым напряжением канонически изоморфна группе виртуальных многогранников. Канонический изоморфизм ставит в соответствие формальной разности $K_1 \otimes K_2^{\otimes -1}$ разность ассоциированных графов*

$$(G_1, s_1) - (G_2, s_2).$$

Тем самым, мы можем говорить о виртуальных многогранниках, представленных напряженными графами.

Исторические замечания. Конструкции этого пункта заимствованы из [23]. Одно из преимуществ такого представления заключается в возможности строить трехмерные виртуальные многогранники, просто рисуя картинки на сфере.

5.2. Виртуальные многогранники, представленные многогранниками Максвелла. Мы обращаемся к представлению трехмерных многогранников *многогранниками Максвелла*. По своему духу это представление наиболее близко к (широко понимаемой) теории многогранников. Виртуальные многогранники в размерности два уже дают нам некоторую интуицию, говорящую, что от конструкции естественно ожидать невыпуклости, самопересечений, а также что некоторую роль будут играть цвета.

Мы покажем, что виртуальный многогранник может быть представлен парой, состоящей из многогранника Максвелла и некоторого веера. Мы обсудим свойства такого представления, а также вопрос (аналогичный вопросу из п. 3.3 о представимости ломаной виртуальным многоугольником) о том, какие многогранники Максвелла представляют виртуальные многогранники, а какие – нет.

Графы с гранями и двойственные к ним объекты. Под *графом* $G = (V, E)$ мы понимаем тот же объект, что и в предыдущем пункте. Напомним, что мы разрешаем петли и параллельные ребра, а также однопетельный граф без вершин.

Циклом длины $n \geq 2$ называется циклическая последовательность⁶ $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_n, v_{n+1})$ вершин и ребер, для которой $v_1 = v_{n+1}$ и $e_i = (v_{i-1}v_i)$. Петли с одной вершиной (или вовсе без вершин) суть тоже циклы длины один и нуль соответственно. Цикл называется *простым*, если вершины не повторяются, и *реберно простым*, если не повторяются ребра.

Гранью называется непустое множество реберно простых циклов, не имеющих общих ребер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Граф с гранями* – это граф G вместе с некоторым набором граней $C_1, \dots, C_m$, для которого каждое ребро является ребром самое большее двух граней.

На граф с гранями можно смотреть как на некоторую (комбинаторную) поверхность (возможно, с дырками). Действительно, с ним можно связать таковую, заклеив циклы (т.е. грани, содержащие единственный цикл) дисками. Если грань состоит из $k \geq 2$ циклов, мы заклеиваем ее (топологической) сферой с k дырками; при этом каждый цикл соответствует своей дырке. *Сферическим графом с гранями* назовем такой граф, для которого построенная поверхность является сферой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Для сферического графа с гранями $G = (V, E, F)$ двойственный ему граф с гранями $G^* = (V^*, E^*, F^*)$ по определению имеет $V^* = F$, $F^* = V$ и $E^* = E$. Две вершины двойственного графа (соответствующие граням исходного графа) соединены ребром, если эти грани делят ребро.

Двойственный к сферическому графу с гранями не обязан быть сферическим графом, но всегда является *кактусом сфер*, определенным ниже.

Кактус сфер. Эта поверхность (с особенностями) определяется по индукции. Базой является комбинаторная сфера. На каждом шаге мы приклеиваем

⁶Циклическая последовательность – это линейно упорядоченное конечное множество, порядок на котором определен с точностью до степени циклической перестановки $(2, 3, \dots, n, 1)^n$.

“вершина-к-вершине” еще одну комбинаторную сферу. С кактусом (см. рис. 33) очевидным образом связано дерево: вершинами дерева служат сферы, а ребра соединяют вершины, соответствующие сферам, делящим ребро.

Рис. 33. Кактус и связанное с ним дерево

Нас будут интересовать лишь графы с гранями, двойственные к графам на сфере с внутренним напряжением.

Вложенный граф и его грани. Для вложенного в сферу графа G зададим его грани как компоненты связности дополнения ребер и вершин. Легко убедиться, что граница каждой компоненты есть набор циклов, удовлетворяющий необходимым свойствам. Если G — связный граф, то все грани суть диски. В противном случае мы получим также сферы с дырками. Граничные циклы мы ориентируем согласованно, например так, чтобы грань лежала слева при обходе цикла.

Так определенные грани графа с внутренним напряжением являются компонентами связности элементов сферического веера (см. определение 8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Приведенный веер виртуального многогранника K , представленного графом с внутренним напряжением (G, s) , есть граф с гранями, порожденный вложением G (см. рис. 34).

Рис. 34. (a) Грани графа не обязательно являются дисками. (b) Грань графа может касаться себя.

Граф, двойственный к сферическому графу с гранями. Граф, двойственный к сферическому графу с внутренним напряжением, обладает следующими свойствами:

- 1) все грани двойственного графа суть (топологические) диски;
- 2) если исходный граф связан, то двойственный к нему топологически есть сфера;
- 3) если исходный граф содержит k компонент связности, то двойственный к нему есть кактус k сфер.

Многогранники Максвелла. Дадим теперь основное определение этого пункта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Многогранник Максвелла* – это граф с гранями вместе с (не обязательно инъективным) отображением множества вершин графа в пространство $\mathbb{R}^3$, обладающий следующими свойствами.

- 1) *Невырожденность ребер*: образы концов каждого ребра суть различные точки.
- 2) *Планарность граней*: образы вершин каждой из граней компланарны. Тем самым, образ каждой грани есть плоская замкнутая (возможно, самопересекающаяся) ломаная.
- 3) *Невырожденность граней*: образы вершин каждой из граней не лежат на одной прямой. Иначе говоря, образ каждой из граней однозначно задает некоторую плоскость.

Образы вершин, ребер и граней в контексте этого определения называются *вершинами, ребрами и гранями многогранника Максвелла*.

Под *комбинаторикой многогранника Максвелла* мы будем подразумевать исходный граф с гранями.

Виртуальный многогранник как многогранник Максвелла. Рассмотрим виртуальный многогранник K , не являющийся ни отрезком, ни точкой. Мы уже знаем (см. п. 2.3), что у K есть грани, являющиеся виртуальными многогранниками, – это вершины, ребра и (двумерные) гиперграни.

Нам понадобится опорная функция h многогранника K и приведенный сферический веер Σ . Кроме того, мы будем пользоваться сферическим графом (G, s) с внутренним напряжением, представляющим K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Многогранник Максвелла M , ассоциированный с виртуальным многогранником K* , определяется следующим образом.

- 1) Исходный граф с гранями двойственен приведенному вееру Σ , или, что то же самое, двойственен графу с гранями, порожденному вложением G .
- 2) Вершинами M служат вершины K : вершине графа соответствует (согласно двойственности) грань приведенного веера. Последняя есть область линейности опорной функции, и ей, в свою очередь, соответствует некоторая вершина K .

Проанализируем детальнее вершины, ребра и грани многогранника Максвелла, ассоциированного с виртуальным многогранником.

Вершины. Согласно определению, вершины M суть вершины K .

Ребра. По теореме 1 вершина ребра K есть вершина K . Следовательно, ребра K суть отрезки, соединяющие вершины. Все они являются одномерными

виртуальными многогранниками, для которых имеется представление красными и синими отрезками (см. раздел 2). Ребро многогранника, соответствующее ребру e графа G , ортогонально аффинной оболочке e , и его длина есть модуль напряжения на ребре e . Цвет ребра определяется знаком напряжения.

Грани. Некоторые наборы ребер образуют раскрашенные замкнутые ломаные, представляющие гиперграницы K , – они и есть границы M .

ЗАМЕЧАНИЕ. Виртуальный многогранник K и центрально симметричный образ обратного к нему $\text{Symm}(K^{\otimes -1})$ ассоциированы с одним и тем же многогранником Максвелла, но с противоположной раскраской ребер.

АЛГОРИТМ 20 (от графа с внутренним напряжением к многограннику Максвелла; случай связных графов). Пусть K – виртуальный многогранник, представленный связным графом с внутренним напряжением (G, s) . Ассоциированный с ним многогранник Максвелла строится следующим образом.

1. Пусть p_i – вершина графа G , на которую мы смотрим как на радиус-вектор. Возьмем плоскость π , ортогональную p_i . Поскольку направление вектора p_i задает ее ориентацию, мы можем говорить о вращении по и против часовой стрелки в этой плоскости.

2. Звезда (в графе G) вершины p_i дает раскрашенную звезду в плоскости π .

3. В свою очередь, эта раскрашенная звезда задает раскрашенную замкнутую ломаную P (см. п. 3.1) в плоскости π .

4. Повернув P на угол $\pi/2$, мы получим грань K^{p_i} , представленную раскрашенной ломаной.

5. Предыдущие шаги позволяют получить все грани виртуального многогранника с точностью до параллельных переносов. Комбинаторика графа (G, s) говорит, в частности, о том, какие пары граней должны делить ребро. Сдвинем грани параллельными переносами так, чтобы добиться требуемой инцидентности: начнем с одной грани, расположив ее произвольно. Положения соседних определены единственным образом, и, поскольку граф связан, единственным образом определены положения всех граней.

Прежде чем перейти к произвольным (не обязательно связным) графам с внутренним напряжением, рассмотрим поясняющий пример.

ПРИМЕР 12. Граф с двумя компонентами связности и соответствующий многогранник Максвелла представлены на рис. 35. Многогранник Максвелла есть склейка “вершина-к-вершине” многогранников Максвелла, соответствующих компонентам связности.

Несвязный граф с напряжением (G, s) есть объединение связных компонент G_i . На каждую компоненту можно смотреть как на отдельный виртуальный многогранник, и, следовательно, каждая компонента дает многогранник Максвелла M_i со сферической топологией. Эти многогранники, будучи склеены “вершина-к-вершине”, дают многогранник Максвелла графа (G, s) .

Точнее, имеет место следующий алгоритм.

АЛГОРИТМ 21 (от графа с внутренним напряжением к многограннику Максвелла; случай несвязных графов). Пусть K – виртуальный многогранник, представленный графом с внутренним напряжением (G, s) .

Рис. 35. Слева: многогранник Максвелла. Справа: несвязный сферический граф с напряжением.

1. Разложим G в объединение компонент связности G_i . Каждая компонента приходит со сферическим вложением и с напряжением, унаследованным от (G, s) . Для каждой из компонент алгоритм 20 дает (с точностью до параллельного переноса) многогранник Максвелла M_i .

2. Если графы G_i и G_j имеют ребра, инцидентные одной и той же грани F , то соответствующие многогранники Максвелла M_i и M_j обязаны делить вершину, двойственную грани F . Это условие задает относительное расположение M_i и M_j и, в конце концов, устанавливает структуру кактуса сфер для M .

5.3. Распознавание виртуальных многогранников. Зададимся вопросом: какие многогранники Максвелла порождены виртуальными многогранниками? Ограничимся при этом топологическими сферами (а не кактусами), так как общий случай следует непосредственно из частного. Мы начнем с рассмотрения многогранников Максвелла, представленных трехвалентными графами с напряжением.

Симплициальные выпуклые многогранники в размерности три. Пусть K – виртуальный многогранник, представленный связным трехвалентным графом с внутренним напряжением (G, s) . В этом случае каждая грань виртуального многогранника является виртуальным треугольником и может быть представлена трехзвенной раскрашенной ломаной, т.е. раскрашенным треугольником. Два треугольника склеены “ребро-к-ребру”, если двойственные им вершины графа (G, s) соединены ребром. Иначе говоря, многогранник Максвелла в этом случае есть *симплициальная поверхность* в $\mathbb{R}^3$. Поэтому K естественно называть *симплициальным виртуальным многогранником*. Несколько симплициальных виртуальных многогранников с теми или иными интересными свойствами появятся в примере 16 и на рис. 37 и 43.

Распознавание симплициальных виртуальных многогранников. Рассмотрим произвольную гомеоморфную сфере симплициальную поверхность M , лежащую в $\mathbb{R}^3$. Мы не требуем ни вложенности, ни погруженности поверхности M , т.е. не запрещаем самопересечений. Однако (временно) мы потребуем, чтобы никакие два соседних треугольника не лежали в одной и той же плоскости.

По аналогии с определением 3 введем следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Многогранник Максвелла называется v -многогранником, если он ассоциирован с некоторым виртуальным многогранником.

Большинство симплициальных поверхностей не являются v -многогранниками. На вопрос, *какие симплициальные поверхности являются v -многогранниками*, отвечает следующий алгоритм.

АЛГОРИТМ 22 [24] (является ли симплициальная поверхность v -многогранником?). Пусть M – симплициальная поверхность.

1. Выберем нормальный вектор к каждой из (треугольных) граней. Выбирать нормали можно независимо: мы не требуем, чтобы их совокупность задавала глобальную ориентацию M . Нормали разных граней должны различаться. Если такой выбор невозможен, то ассоциированный виртуальный многогранник не существует.

2. Отметим на сфере S^2 концы всех нормальных векторов.

3. Каждую пару отмеченных точек, соответствующих соседним граням M , соединим геодезическим отрезком (ребром). Мы можем выбрать как кратчайшую геодезическую, так и длиннейшую. Результат обязан оказаться вложенным графом, т. е. ребра не должны пересекаться. В случае успеха мы получим некоторый сферический веер Σ .

4. Если невозможно получить вложенный граф ни при каком выборе нормалей и ребер, то ассоциированный виртуальный многогранник не существует.

5. В противном случае каждый такой веер Σ вместе с поверхностью M задают виртуальный многогранник K , представленный парой (M, Σ) .

Подчеркнем, что разные веера дают разные виртуальные многогранники. Построенный веер Σ является приведенным сферическим веером виртуального многогранника K . Еще раз напомним, что для вершины p поверхности M и для грани A приведенного веера Σ , двойственной вершине p , ограничение опорной функции h_K на A есть линейная функция, тождественная скалярному произведению $\langle p, x \rangle$.

В полученной паре (M, Σ) раскраска ребер M несет в себе избыточную информацию: она однозначно восстанавливается парой (M, Σ) .

Избыточные v -многогранники. Многогранник Максвелла называется *избыточным v -многогранником*, если с ним можно связать более двух виртуальных многогранников. Например, поверхность тетраэдра избыточна: существуют 52 виртуальных многогранника, связанных с ней (см. пример 13 в п. 5.4).

Общий случай (не обязательно трехвалентный граф). Обратимся теперь к наиболее общему случаю. Если граф, представляющий виртуальный многогранник P , не трехвалентен, то многогранник Максвелла не есть симплициальная поверхность. Он может вообще не быть кусочно линейной поверхностью, так как ломаные, представляющие грани, могут иметь самопересечения.

Однако можно сформулировать вопрос: *является ли данный многогранник Максвелла v -многогранником?* Алгоритм, отвечающий на этот вопрос, практически такой же, как алгоритм 22, однако он разбирает случай, когда приходится соединять ребрами антиподальные точки на сфере.

АЛГОРИТМ 23 (является ли многогранник Максвелла v -многогранником?). Пусть M – многогранник Максвелла, без окраски ребер.

1. Выберем нормальный вектор к аффинной оболочке каждой из граней. Выбирать нормали можно независимо: мы не требуем, чтобы их совокупность задавала глобальную ориентацию M . Нормали разных граней должны различаться. Если такой выбор невозможен, то ассоциированный виртуальный многогранник не существует.

2. Следуем алгоритму 22. Необходимое добавление таково: предположим, что две отмеченные антиподальные точки соответствуют граням многогранника, делящим ребро e ; эти точки требуется соединить ребром, но на сей раз возникает дополнительное условие, заключающееся в том, что соединяющая дуга должна быть ортогональна аффинной оболочке. Как и прежде, у нас есть выбор между двумя возможными полукругами.

3. Каждый такой веер Σ вместе с поверхностью M задают виртуальный многогранник K , представленный парой (M, Σ) .

Условие ортогональности в этом алгоритме необходимо. Оно обсуждалось нами в п. 5.2.

Теперь мы можем говорить о виртуальных многогранниках, представленных многогранником Максвелла M вместе с ассоциированным веером Σ .

5.4. Примеры трехмерных виртуальных многогранников. Приведем разнообразные примеры трехмерных виртуальных многогранников. В соответствии с алгоритмом 23 каждый из них представлен многогранником Максвелла и ассоциированным веером.

Рис. 36. (a) Выпуклый тетраэдр. (b) Гиперболический тетраэдр. (c) Еще один виртуальный тетраэдр.

ПРИМЕР 13 (тетраэдр v -избыточен). Существует 52 различных виртуальных многогранника, ассоциированных с поверхностью выпуклого тетраэдра. Три из них изображены отдельно в деталях на рис. 36, а полный список приведен на рис. 37. Второй тетраэдр на рис. 36 представляет семейство гиперболических виртуальных многогранников, которое мы обсудим в п. 6.1.

ПРИМЕР 14 v -многогранник с самопересекающимися гранями изображен на рис. 38.

Рис. 37. Все 52 виртуальных тетраэдра. На рисунке изображены только веера. (Рисунок Влада Щербины.)

Рис. 38. Виртуальный многогранник с самопересекающимися гранями

ПРИМЕР 15 (v -многогранник с лишь двусвязным вершинно-реберным графом). Вершинно-реберный граф виртуального многогранника всегда связан. Теорема Балинского [27] гласит, что вершинно-реберный граф трехмерного многогранника всегда трехсвязен (т.е. удаление любой пары вершин с инцидентными им ребрами не нарушает связности). Мы уже видели виртуальный многогранник с вершинно-реберным графом, не являющимся двусвязным (см. рис. 35). Рис. 39 изображает виртуальный многогранник с двусвязным, но не трехсвязным вершинно-реберным графом.

Рис. 39. Виртуальный многогранник, вершинно-реберный граф которого не трехсвязен

ПРИМЕР 16 (изгибаемый v -многогранник). Теорема Коши гласит, что не существует изгибаемых трехмерных многогранников. Однако если опустить условие выпуклости, то существуют изгибаемые симплициальные поверхности. Нам потребуется изгибаемый октаэдр Брикара второго типа. Это самопересекающийся многоугольник – комбинаторный октаэдр. Построить его можно так: впишем в окружность самопересекающуюся четырехзвенную ломаную с длинами сторон a, b, a, b . Вершины ломаной доставляют четыре вершины будущего октаэдра, а ребра ломаной – ребра октаэдра. Возьмем в качестве двух оставшихся вершин точки такие, что их проекции на плоскость окружности совпадают с ее центром, а сами эти точки равноудалены от этой плоскости и лежат по разные стороны от нее. Соединив описанные шесть точек ребрами согласно октаэдральной комбинаторике, получим изгибаемый октаэдр Брикара второго типа. Для конкретного октаэдра, изображенного на рис. 40, существует ассоциированный веер, который мы строим следуя алгоритму 22.

Рис. 40. Изгибаемый октаэдр Брикара есть изгибаемый виртуальный многогранник. На рисунке изображен сам октаэдр (вместе с нормальными к граням) и его веер.

В п. 6.1 мы встретимся с более сложными примерами виртуальных многогранников.

5.5. Опорная функция и поднятие графа с внутренним напряжением. Представление виртуального многогранника опорной функцией непосредственно связано с представлением сферическим графом с внутренним напряжением. Для полноты картины опишем простое соответствие между ними, следующее из леммы 12.

АЛГОРИТМ 24 (от опорной функции к графу с внутренним напряжением). Пусть виртуальный многогранник K представлен своей опорной функцией h . Тогда ассоциированный граф с внутренним напряжением (G, s) можно получить следующим образом.

1. Области линейности h образуют веер многогранника K . Пересекая веер с единичной сферой, получаем вложенный граф G . Осталось найти внутреннее напряжение.

2. Возьмем ребро e графа G . К нему примыкают две грани, которые соответствуют конусам в веере; назовем их σ_1 и σ_2 . Эти два конуса имеют общую грань $F = \sigma_1 \cap \sigma_2$. Функция h линейна на каждом из конусов. Пусть $h = \langle p_1, \cdot \rangle$ на σ_1 и $h = \langle p_2, \cdot \rangle$ на σ_2 .

3. Напряжение на ребре e положим равным скалярному произведению $\langle p_1 - p_2, v \rangle$, где v — единичный внешний нормальный веер грани F конуса σ_1 (см. рис. 41).

Рис. 41. Нормальный вектор к общей грани двух конусов

АЛГОРИТМ 25 (от графа с напряжением к опорной функции). Для графа с напряжением (G, s) опорная функция соответствующего виртуального многогранника восстанавливается следующим образом.

1. Вложение G порождает веер Σ .

2. Построим функцию h , кусочно линейную относительно Σ : возьмем один из трехмерных конусов веера, скажем, σ_1 , и положим h равной нулю на σ_1 .

3. Возьмем конус σ_2 , делящий грань F с конусом σ_1 . Эта грань отвечает некоторому ребру e графа G . Зададим h на конусе σ_2 формулой

$$h|_{\sigma_2} = h|_{\sigma_1} + s(e)\langle v, \cdot \rangle.$$

Здесь (как и в алгоритме 24) v – единичный внешний нормальный вектор грани F конуса σ_1 , а $s(e)$ – значение напряжения на ребре e .

4. Продолжим, беря каждый раз один из соседних конусов, в произвольном порядке.

Соответствие Максвелла. Свяжем обсуждение конструкции “опорная функция vs граф с внутренним напряжением” с классической конструкцией теории жесткости “поднятие vs напряжение”, построенной Дж. К. Максвеллом в [26].

Пусть G – граф, вложенный в плоскость $\mathbb{R}^2$, так что ребра реализованы отрезками. Вложение разбивает плоскость на области, из которых одна неограничена. Поднятием вложенного графа называется кусочно линейная относительно этого разбиения непрерывная функция $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. График такой функции h есть некоторая кусочно линейная поверхность.

У каждого вложенного графа имеются тривиальные поднятия – глобально линейные функции. Но нетривиальные поднятия есть не у каждого графа. В [26] описано соответствие между поднятиями и внутренними напряжениями вложенного графа, называемое *соответствием Максвелла*. Говоря точнее, для фиксированного вложенного графа указан изоморфизм линейного пространства всех поднятий, профакторизованного по глобально линейным функциям, и пространства равновесных напряжений этого же графа.

Вышеописанные алгоритмы представляют собой некоторую модификацию соответствия Максвелла.

Связь между поднятиями и опорными функциями можно описать еще вот как. Пусть имеется виртуальный многогранник с опорной функцией h , также представленный графом с внутренним напряжением (G, s) . Пересечем вектор многогранника с плоскостью $e \subset \mathbb{R}^3$. Пересечение $\bar{G}$ совпадает с центральной проекцией части графа G , лежащей в полусфере, на плоскость e . Оно напоминает вложенный граф с той лишь разницей, что некоторые ребра, возможно, уходят на бесконечность. Поднятие Максвелла очевидно обобщается на такие объекты. В этой конструкции *ограничение опорной функции h на плоскость e есть поднятие $\bar{G}$* .

6. Приложения

В этом разделе мы демонстрируем возможности применения теории виртуальных многогранников в задачах и приложениях, происходящих из разных областей математики.

6.1. Задача А. Д. Александрова и гиперболические виртуальные многогранники. Необходимое предостережение: гиперболические многогранники – это не многогранники, лежащие в гиперболическом пространстве, а некоторый особый класс трехмерных виртуальных многогранников.

Определим класс *гиперболических виртуальных многогранников*, или просто *гиперболических многогранников*. Он вырос естественно из круга геометрических вопросов в стиле задач А. Д. Александрова. Рассмотрение гиперболических многогранников позволило глубже понять теорему Александрова о трехмерных многогранниках, а также решить задачу Александрова, остававшуюся долгое время открытой.

Основополагающая идея конструкции заключается в следующем. Можно сказать, что виртуальный многогранник – это, как правило, объект частично выпуклый, частично вогнутый и частично седловый. Гиперболические многогранники являются полностью седловыми и потому могут считаться противоположными выпуклым многогранникам.

Чтобы придать смысл вышесказанному, дадим определение седловой поверхности, которое значимо и для гладких, и для кусочно линейных поверхностей (см. рис. 42).

Рис. 42. Седловая точка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть F – поверхность, вложенная в $\mathbb{R}^3$. Точка $x \in F$ называется седловой, если никакая проходящая через нее плоскость, не пересекает F локально ровно в одной точке. Поверхность называется *седловой*, если все ее точки седловые.

Чтобы определить гиперболические многогранники, нам потребуется следующая конструкция. Пусть K – виртуальный многогранник в $\mathbb{R}^3$, и пусть h – его опорная функция. Для вектора $v \in S^2$ уравнение

$$\langle x, v \rangle = 1$$

задает плоскость $e(v)$. Рассмотрим ограничение h на плоскость $e(v)$ и обозначим через $\mathcal{F}_v$ график этого ограничения. Поверхность $\mathcal{F}_v$ кусочно линейна; ее вершины и ребра соответствуют вершинам и ребрам веера Σ_K , лежащим в полусфере с полюсом в точке v .

Поскольку выпуклые многогранники суть те виртуальные многогранники, опорная функция которых выпукла, мы можем сказать, что виртуальный многогранник является выпуклым (т. е. $K \in \mathcal{P}$) тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_v$ есть выпуклая поверхность для всякого v . Продолжая аналогию, дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Виртуальный многогранник K называется *гиперболическим*, если $\mathcal{F}_v$ есть седловая поверхность для всякого $v \in S^2$.

Первоначально эта теория появилась как вспомогательное средство для построения контрпримеров к следующей гипотезе, доказанной А. Д. Александровым в [2] для аналитических поверхностей.

Задача А. Д. АЛЕКСАНДРОВА (единственность гладких выпуклых поверхностей). Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – гладкое выпуклое тело и $R_1(x)$, $R_2(x)$ – главные радиусы кривизны его границы ∂K в точке x . Если существует такая константа C , что в каждой точке границы ∂K выполнены неравенства

$$R_1(x) \leq C \leq R_2(x),$$

то K есть шар.

Вопрос о справедливости аналогичного утверждения для гладких (не обязательно аналитических) поверхностей оставался открытым долгое время, пока в 2001 г. И. Мартинес-Мор [28] не построил C^2 -гладкий контрпример.

Впоследствии Г. Ю. Панина построила серию C^∞ -гладких контрпримеров, развив для этого в качестве технического средства теорию гиперболических виртуальных многогранников. Детальная конструкция содержится в [24], [29], трехмерную электронную модель можно найти на сайте [30].

Конструкция Паниной. Чтобы получить контрпример в задаче А. Д. Александрова, нам понадобится симплициальный гиперболический многогранник со следующим дополнительным свойством: длины ребер его сферического веера должны быть меньше π . Отметим, что гиперболические многогранники редки среди всех виртуальных, так что этот шаг конструкции наиболее сложен. Далее, можно показать, что опорная функция h сглаживаема в гиперболическом классе, а именно, существует C^∞ -гладкая седловая функция h' , приближающая h . Техника сглаживания работает только для многогранников с описанным выше дополнительным свойством.

Далее, пусть h_R – опорная функция шара радиуса R . Если сумма $h' + h_R$ есть выпуклая функция (а это выполнено для достаточно большого радиуса), то она есть опорная функция некоторого гладкого тела K' , являющегося искомым контрпримером.

Как построить гиперболический многогранник? Прежде всего опишем удобный критерий гиперболичности виртуального многогранника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Вершина p сферического веера Σ называется *вывернутой*, если один из углов, прилежающих к ней, больше π . Веер называется *вывернутым*, если все его вершины вывернуты.

ЛЕММА 26. Если K – виртуальный многогранник с вывернутым сферическим веером Σ_K , то он гиперболичен.

ПРИМЕР 17. Гиперболический тетраэдр на рис. 36, (b) есть гиперболический виртуальный многогранник.

Более сложные примеры гиперболических виртуальных многогранников появляются в [24] и [29]. Они представлены явно описанными многогранниками Максвелла. Из леммы 26 следует их гиперболичность, поскольку, согласно конструкции, их веера вывернуты (см. рис. 43 и 44).

Теорема единственности А. Д. Александрова для выпуклых многогранников и ее уточнения. Иное применение гиперболических многогранников можно найти в [31]. Оно непосредственно связано со следующей теоремой, которую А. Д. Александров расценивал как дискретный вариант теоремы о единственности выпуклых поверхностей [2].

Рис. 43. Два гиперболических многогранника, представленных многогранниками Максвелла: с шестью рогами (слева) и с восемью рогами (справа)

Рис. 44. Веер гиперболического многогранника с восемью рогами

ТЕОРЕМА 27 (теорема единственности для выпуклых многогранников [2]). Пусть K и M – трехмерные выпуклые многогранники. Если для каждой пары их параллельных гиперграней ни одна из гиперграней не может быть помещена строго в другую параллельным переносом, то многогранники равны с точностью до параллельного переноса.

В свете вышеуказанной связи неудивительно, что эту теорему можно перефразировать на языке гиперболических многогранников. Кроме того, дополнительные знания о виртуальных многогранниках позволили получить следующие уточнения этой теоремы.

ТЕОРЕМА 28 [31]. Существуют два различных трехмерных выпуклых многогранника, для каждой пары параллельных гиперграней которых найдется **не более одного** параллельного переноса, помещающего одну грань строго в другую.

Пример далеко не тривиален. Чтобы его построить, необходим гиперболический многогранник с еще одним дополнительным свойством: у его веера долж-

но существовать регулярное измельчение без точек Штайнера, т. е. измельчение без новых вершин.

ТЕОРЕМА 29 [31]. Пусть K, M – выпуклые трехмерные многогранники, для каждой пары параллельных гиперграней которых верно следующее:

- 1) существует **самое большее один** параллельный перенос t , помещающий гипергрань K в гипергрань L ;
- 2) **не существует** параллельного переноса, помещающего гипергрань L в гипергрань K .

Тогда многогранники равны с точностью до параллельного переноса.

Еще один результат в этом направлении содержится в [32]. Он описывает два выпуклых трехмерных многогранника, для каждой пары параллельных гиперграней которых гиперграницы различны и существует **ровно один** параллельный перенос, помещающий одну из них в другую.

Гиперболические виртуальные многогранники и вывернутые разбиения. Имеется взаимосвязь между теорией гиперболических многогранников и теорией *вывернутых разбиений*, описанной в [33]. Эта взаимосвязь проливает дополнительный свет на конструкции настоящего пункта. Плоские вывернутые разбиения (определенные ниже) в некотором смысле противоположны более традиционным выпуклым вложениям графов в плоскость, так как они “максимально невыпуклы”. То же самое можно сказать о гиперболических многогранниках – они максимально далеки от выпуклых многогранников. Расскажем об общих чертах этих двух теорий, отсылая читателя за подробностями к [23].

Псевдотреугольник есть замкнутая плоская ломаная без самопересечений, ровно три угла которой меньше π . Все остальные углы являются вывернутыми. Исходно псевдотреугольник есть плоская фигура, но это определение очевидно переносится на сферу. *Псевдотриангуляция* есть разбиение некоторой области на плоскости (или на сфере) на псевдотреугольники. *Вывернутое разбиение* есть такое разбиение, в котором к каждой вершине прилегает угол, больший π . Вывернутая псевдотриангуляция на плоскости обладает следующим важным характеристическим свойством: это такое вывернутое вложение графа (ребра которого реализованы прямолинейными отрезками), к которому нельзя добавить ребро, не нарушив ни вывернутости, ни вложенности.

Впервые вывернутые псевдотриангуляции были рассмотрены И. Стрейну [34], [35] в качестве составляющей части предложенного ею решения задачи о складном метре: она доказала, что всякая плоская ломаная без самопересечений может быть выпрямлена некоторой непрерывной деформацией, сохраняющей длины ребер и избегающей самопересечений. Ключевое для решения свойство вывернутых разбиений, которым пользовалась Стрейну, заключается в том, что вложенный граф, порождающий вывернутое разбиение, не может иметь нетривиального внутреннего напряжения.

Кроме того, граф, задающий вывернутую псевдотриангуляцию, удовлетворяет условиям, задающим *ламаноу граф*: такой граф имеет ровно $2v - 3$ ребра (где $2v$ – число вершин) и всякий его k -вершинный подграф имеет не более

$2k - 3$ ребер, что следует непосредственно из формулы Эйлера. Простые соображения размерности показывают, что у вложенного графа с более чем $2v - 3$ ребрами всегда есть нетривиальное внутреннее напряжение.

Существенное различие между графами, вложенными в плоскость, и графами, вложенными в сферу, состоит в том, что на сфере бывают *псевдодвуугольники*, т.е. сферические многоугольники с ровно двумя выпуклыми углами. Вывернутое разбиение сферы может содержать псевдодвуугольники, что существенно влияет на результат применения формулы Эйлера. Для того, чтобы соответствующий граф обладал нетривиальным напряжением, достаточно, чтобы разбиение содержало (по крайней мере) четыре псевдодвуугольника, а остальные части были псевдотреугольниками. В этом случае, как мы знаем из леммы 26, вложение графа задает гиперболический виртуальный многогранник. Эти соображения позволяют строить гиперболические многогранники, просто рисуя на сфере вывернутые разбиения.

6.2. Валюации виртуальных многогранников. Объем и подсчет целых точек. *Валюацией* называется вещественнозначная функция $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на множестве выпуклых многогранников, ведущая себя аддитивно: если K_1 , K_2 и $K_1 \cup K_2$ – выпуклые многогранники, то выполнено равенство

$$\varphi(K_1 \cup K_2) = \varphi(K_1) + \varphi(K_2) - \varphi(K_1 \cap K_2).$$

Решеточная валюация задана только для решеточных многогранников, т.е. тех, вершины которых лежат в стандартной решетке $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. В данном обзоре нас будут интересовать только *трансляционно-инвариантные* валюации, значение которых не меняется при параллельном переносе многогранника.

Валюация φ может быть единственным образом продолжена на элементы алгебры многогранных функций (см. п. 4.1). А именно, для многогранной функции

$$f = \sum \alpha_i I_{K_i}$$

зададим

$$\varphi(f) = \sum \alpha_i \varphi(K_i).$$

Поскольку виртуальные многогранники представимы многогранными функциями, имеет смысл говорить о *валюации φ виртуального многогранника*.

Обсудим вначале объем – как наиболее используемый пример валюации.

Объем виртуального многогранника. Очевидно, что объем виртуального многогранника, представленного многогранной функцией f , равен интегралу по мере Лебега

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Объем виртуального многогранника может оказаться отрицательным (см., например, рис. 16); он также может оказаться равным нулю, даже если сам многогранник невырожден.

Число решеточных точек для виртуальных многогранников. Начиная от (классической) формулы Пика (см. [36]), а также более современное

изложение в [9], [37]) и до последних приложений в вычислении объема Концевича (см. [38]), решеточные точки и их подсчет регулярно возникают в разнообразных математических и вычислительных задачах. Подсчет решеточных точек дает нам еще один пример трансляционно-инвариантной валюации.

Эта валюация может быть продолжена до числа (взвешенных) решеточных точек в виртуальном многограннике. А именно, для виртуального многогранника, представленного многогранной функцией f , число решеточных точек мы определяем так:

$$Q(f) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x).$$

Если K – выпуклый многогранник, то веса равны единице для всех решеточных точек, принадлежащих K . Напомним, что для виртуального многогранника это не всегда так (см., например, рис. 45).

Рис. 45. Целые точки в выпуклом и виртуальном многогранниках

Валюации: общий случай. Имея в виду приведенные выше примеры, обратимся теперь к произвольным валюациям. П. Мак-Маллен заметил в [39], что валюации ведут себя полиномиально по отношению к сумме Минковского. А именно, верна следующая теорема (через $(\lambda)K = \{\lambda x : x \in K\}$ обозначен образ многогранника K при гомотетии с положительным коэффициентом λ).

ТЕОРЕМА 30 [39]. Пусть $K_1, \dots, K_n \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклые многогранники, а φ – валюация. Для неотрицательных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ функция

$$P_\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi((\lambda_1)K_1 \otimes \dots \otimes (\lambda_n)K_n)$$

есть полином от переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

В случае решеточных многогранников аналогичное утверждение справедливо для целых неотрицательных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и для выпуклых решеточных многогранников.

Если в качестве валюации в этой теореме взять объем V , то мы получим классическое определение смешанных объемов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Коэффициент полинома P_φ при мономе $\lambda_1 \dots \lambda_n$ в теореме 30, примененной к $\varphi = V$, называется *смешанным объемом многогранников* $K_1, \dots, K_n$ и обозначается через $V(K_1, \dots, K_n)$.

Подчеркнем, что изначально теорема 30 применима лишь к выпуклым многогранникам и положительным гомотетиям. Однако естественно спросить: *каков смысл значения полинома $P_\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ для произвольных (не всех положительных) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$?* Теория виртуальных многогранников дает элегантный ответ на этот вопрос. Первое наблюдение в этом направлении принадлежит П. Мак-Маллену.

ТЕОРЕМА 31 [39]. Пусть φ – трансляционно инвариантная валюация, и пусть P_φ – полином из теоремы 30 для выпуклых многогранников $K_1 = K_2 = \dots = K_n = K$. Тогда

$$P_\varphi(-1) = \sum_F (-1)^{\dim F} \varphi(F),$$

где суммирование идет по всем граням K , включая сам многогранник K .

Переведем эту теорему на язык виртуальных многогранников.

ТЕОРЕМА 32. В обозначениях теоремы 31 справедливо равенство

$$P_\varphi(-1) = \varphi(K^{\otimes -1}),$$

где $K^{\otimes -1}$ – виртуальный многогранник, обратный к многограннику K .

Если в качестве валюации взять число решеточных точек $\varphi = Q$, то эта формула примет вид

$$P_Q(-1) = (-1)^{\dim K} \cdot (\text{число решеточных точек, лежащих строго внутри } K),$$

что есть закон взаимности Эрхарта (см. [40]).

А. В. Пухликов и А. Г. Хованский доказали более общий факт, включающий в себя и теорему Мак-Маллена, и закон взаимности Эрхарта: теорема 30 верна для произвольных виртуальных многогранников и произвольных вещественных коэффициентов. Чтобы корректно сформулировать соответствующее утверждение, нам надо определить *возведение в степень виртуального многогранника*.

Вначале заметим, что для виртуального многогранника K и для положительного целого λ степень

$$K^{\otimes \lambda} = \underbrace{K \otimes \dots \otimes K}_\lambda$$

есть образ K при гомотетии с коэффициентом λ . Это замечание делает осмысленным следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20 (степень Минковского виртуального многогранника). Для положительного (не обязательно целого) λ и виртуального многогранника K определим

$$K^{\otimes \lambda} = (\lambda)K,$$

где $(\lambda)K$ есть образ K при гомотетии с коэффициентом λ . Для отрицательного λ и виртуального многогранника K определим

$$K^{\otimes \lambda} = (-\lambda)K^{\otimes -1}.$$

Это определение дает возможность сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 33 [1]. Пусть $K_1, \dots, K_n \subset \mathbb{R}^n$ – виртуальные многогранники. Для трансляционно-инвариантной валюации φ и любых вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ функция

$$P_\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi(K_1^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes K_n^{\otimes \lambda_n})$$

есть полином от переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Аналогичное утверждение справедливо для решеточных виртуальных многогранников, решеточных валюаций и целых $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Эта теорема позволяет определить смешанный объем виртуальных многогранников, дословно повторяя определение 19. А именно, в обозначениях теоремы 33 для валюации, равной объему V , сформулируем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Коэффициент полинома P_V при мономе $\lambda_1 \dots \lambda_n$ называется *смешанным объемом* виртуальных многогранников $K_1, \dots, K_n$ и обозначается через $V(K_1, \dots, K_n)$.

Эта конструкция еще раз подчеркивает общую философию обзора: виртуальные многогранники наследуют большинство свойств выпуклых многогранников, но, разумеется, не наследуют выпуклость.

Исторические замечания. Частный случай теоремы 30, в котором роль валюации играет объем, был известен задолго до работы Мак-Маллена. Минковский пользовался соответствующим фактом, определяя понятие смешанного объема. Это понятие впоследствии стало центральным в теории Брунна–Минковского. Детали изложены во многих книгах, например, в [8]. Алгоритмические аспекты эффективного подсчета решеточных точек можно найти в [41]. Там же описана связь числа целых точек и класса Тодда торического многообразия, о чем мы умолчим в настоящем обзоре. Мы также (очень кратко) отметим, что формула Эйлера–Маклорена (а в ней участвуют решеточные точки на отрезке) может быть обобщена на решеточные точки пространства и выпуклые многогранники, а затем и на виртуальные многогранники (см. [42], [43]).

6.3. Смешанные объемы виртуальных многогранников. В предыдущем пункте мы распространили понятие смешанного объема на виртуальные многогранники. Однако его можно распространить и дальше, на все множество многогранных функций (см. [3], [44]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Продолжим смешанный объем на многогранные функции по линейности, т. е. потребуем, чтобы для всякой многогранной функции $f = \sum \alpha_i I_{K_i}$ было выполнено равенство

$$V(f, *, \dots, *) := \sum \alpha_i V(K_i, *, \dots, *),$$

где $*$ обозначает произвольные многогранные функции.

Будем говорить, что две многогранные функции f и f' *ведут себя одинаково относительно смешанного объема*, если для любых многогранных функций $g_1, \dots, g_{n-1}$ справедливо равенство

$$V(f, g_1, \dots, g_{n-1}) = V(f', g_1, \dots, g_{n-1}).$$

Известно, что всякий выпуклый многогранник однозначно восстанавливается по своему поведению относительно смешанного объема. Это же верно и для виртуальных многогранников.

ТЕОРЕМА 34 [10]. *Два виртуальных многогранника ведут себя одинаково относительно смешанного объема тогда и только тогда, когда они совпадают.*

И в случае выпуклых, и в случае виртуальных многогранников доказательство использует формулу для смешанного объема, в котором участвует опорная функция интересующего нас многогранника.

Однако эта теорема перестает быть верной для произвольных многогранных функций. Естественнo задать вопрос: *до какой степени многогранная функция определяется своим поведением по отношению к смешанному объему?*

Прежде чем дать ответ, определим отображение Ξ из кольца многогранных функций в группу виртуальных многогранников следующим правилом:

$$\Xi\left(\sum \alpha_i I_{K_i}\right) = \bigotimes_i K_i^{\otimes \alpha_i}.$$

Здесь $K_i^{\otimes \alpha_i}$ – степень Минковского (см. определение 20). Выражение справа не зависит от представления f , и, значит, отображение определено корректно. Простое, но важное следствие корректности таково.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 35. *Пусть K – выпуклый многогранник и $I_K = \sum_i \alpha_i I_{K_i}$ – некоторое представление его характеристической функции, где K_i – выпуклые многогранники. Тогда*

$$K = \bigotimes_i K_i^{\otimes \alpha_i}.$$

Теперь мы можем сформулировать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 36 [10]. *Многогранная функция f и виртуальный многогранник $\Xi(f)$ ведут себя одинаково по отношению к смешанному объему.*

Это предложение вместе с теоремой 34 дают следующую теорему.

ТЕОРЕМА 37 [10]. *Две многогранные функции f и g ведут себя одинаково по отношению к смешанному объему тогда и только тогда, когда равны виртуальные многогранники $\Xi(f)$ и $\Xi(g)$.*

6.4. Разложение Минковского. Мы переходим к приложению, мотивация которого приходит из теории зонотопов. *Зонотоп* – это выпуклый многогранник, представимый суммой Минковского (прямолинейных) отрезков (см. [45]). Зонотопы появляются в неожиданно разнообразных областях математики – от классической темы выпуклых многогранников до теорем универсальности [46], ориентированных матроидов [47] и многих других. Зонотопы легко распознать: многогранник есть зонотоп тогда и только тогда, когда все его двумерные грани центрально симметричны. Слагаемые-отрезки также легко восстановить: они суть ребра зонотопа. Грани зонотопа тоже являются зонотопами.

Естественно попытаться охарактеризовать многогранники, разложимые в сумму Минковского многогранников некоторой фиксированной меньшей размерности. В этом пункте мы обсудим следующую задачу: *охарактеризовать все d -мерные выпуклые многогранники, представимые суммой Минковского $(d - 1)$ -мерных многогранников, и в случае, когда подобное представление существует, найти явно слагаемые.*

В качестве ответа на поставленный вопрос мы покажем, что n -мерный выпуклый многогранник представим в виде суммы $(n - 1)$ -мерных виртуальных многогранников (или, что то же самое, взвешенной суммы $(n - 1)$ -мерных выпуклых многогранников) тогда и только тогда, когда он равен сумме своих граней, взятых с некоторыми определенными явно заданными весами w_F .

Сделаем необходимые приготовления. Пусть K – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$, представленный своей характеристической функцией I_K . Положим

$$J_K(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V_\varepsilon} \int_{B_\varepsilon(x)} I_K(t) dt,$$

где $B_\varepsilon(x)$ – шар радиуса ε с центром в точке x , V_ε – его объем, а интегрирование производится по мере Лебега.

Так определенная функция $J_K(x)$ есть многогранная функция. Действительно, она постоянна на относительных внутренностях граней K и, следовательно, разложима в сумму характеристических функций граней:

$$J_K(x) = \sum_F w_F I_F(x)$$

(сумма берется по всем граням, включая сам многогранник K). Легко видеть, что $w_K = 1$, а также что $w_F = -1/2$, если F – гипергрань. Прочие веса зависят от угловых мер многогранника K (см., например, рис. 46).

ТЕОРЕМА 38 [12]. *В обозначениях этого пункта многогранник K представим суммой $(d - 1)$ -мерных виртуальных многогранников тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$\bigotimes_F F^{\otimes w_F} = E, \tag{5}$$

где сумма берется по всем граням K , включая сам K . (Напомним, что E есть одноточечный многогранник, единица в группе виртуальных многогранников.)

Рис. 46

Если равенство (5) имеет место, то

$$K = \bigotimes_F F^{\otimes -w_F},$$

где сумма берется по всем собственным граням K (т.е. исключая K). Это и есть искомое представление K суммой Минковского многогранников меньшей размерности.

ПРИМЕР 18. Выпуклый тетраэдр в $\mathbb{R}^3$ не представим суммой (плоских) виртуальных многоугольников.

ПРИМЕР 19. Проиллюстрируем теорему, взяв призму $K = T \otimes s$, т.е. сумму треугольника T и отрезка s . На рис. 46 перечислены все грани K вместе с весами. После приведения подобных слагаемых мы получаем

$$\bigotimes_F F^{\otimes w_F} = K \otimes s^{\otimes -1} \otimes T^{\otimes -1} = E,$$

таким образом, $K = T \otimes s$.

Рекурсивно теорема 38 дает аналогичные результаты о разложении d -многогранника в сумму k -многогранников для всех $k < d$.

6.5. Проективные торические многообразия, группа Пикара и теорема Римана–Роха. Завершим обзор кратким описанием связи проективных торических многообразий и виртуальных многогранников. Именно эта связь послужила мотивацией работы А. В. Пухликова и А. Г. Хованского [1].

Проективные торические многообразия представляют собой важное семейство алгебраических многообразий. Название “торические” означает, что каждое такое многообразие компактифицирует алгебраический тор $(\mathbb{C}^*)^n$, причем естественное действие тора на себе самом продолжается до действия тора на всем многообразии. Проективное алгебраическое многообразие строится по вееру, являющемуся внешним нормальным веером некоторого выпуклого многогранника. Например, комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ (а оно представляет пример торического многообразия) в этом смысле связано с n -мерным симплексом.

Существует что-то вроде “словаря”, переводящего алгебро-геометрические понятия и теоремы в понятия и теоремы из геометрии выпуклых многогранников. Среди прочих в словаре присутствуют: особенности, морфизмы, теория пересечений, неравенство Ходжа, теорема Римана–Роха. Виртуальные многогранники прекрасно вписываются в этот контекст: в словаре им соответствуют элементы *группы Пикара*, т. е. *обратимые пучки*, а выпуклым многогранникам соответствуют *очень обильные пучки*.

Проективные торические многообразия. Опишем их очень кратко, отсылая читателя за подробностями к [48], [9] или [21].

Пусть Σ – внешний нормальный веер выпуклого рационального простого многогранника, конусы которого *регулярны* (регулярность есть некоторое дополнительное условие) в $\mathbb{R}^n$. Обозначим конусы веера через $\sigma \in \Sigma$, а двойственные к ним через $\check{\sigma}$.

Проективное торическое многообразие X_Σ получается из Σ следующим построением.

- **Полиномы Лорана.** Алгебра полиномов Лорана от n переменных есть

$$\mathbb{C}[z, z^{-1}] = \left\{ \sum_{\mathbf{a}} \lambda_{\mathbf{a}} z^{\mathbf{a}} = \sum_{(a_1, \dots, a_n)} \lambda_{(a_1, \dots, a_n)} z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_n^{a_n} \right\},$$

где $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, а коэффициенты $\lambda_{\mathbf{a}}$ – комплексные числа.

По определению носитель полинома Лорана есть

$$\text{supp} \left(\sum \lambda_{\mathbf{a}} z^{\mathbf{a}} \right) = \{ \mathbf{a} : \lambda_{\mathbf{a}} \neq 0 \}.$$

- **Карты.** С каждым из конусов $\sigma \in \Sigma$ свяжем алгебру $R_{\check{\sigma}}$ тех полиномов Лорана, носители которых лежат в двойственном конусе $\check{\sigma}$:

$$R_{\check{\sigma}} := \{ f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] : \text{supp}(f) \subset \check{\sigma} \}.$$

Зададим теперь аффинное алгебраическое многообразие (карту) $X_{\check{\sigma}}$ как максимальный спектр $R_{\check{\sigma}}$.

- **Склеивание карт.** Следующее наблюдение позволяет задать склеивающие отображения между картами $X_{\check{\sigma}}$. Пусть конус τ есть грань σ , где $\tau, \sigma \in \Sigma$. В этом случае включение $\check{\tau} \supset \check{\sigma}$ влечет за собой естественное включение алгебр $R_{\check{\sigma}} \rightarrow R_{\check{\tau}}$ и, следовательно, включение торических многообразий $X_{\check{\tau}} \rightarrow X_{\check{\sigma}}$. Иными словами, можно отождествить $X_{\check{\tau}}$ с подмножеством $X_{\check{\sigma}}$.

Совокупность всех карт $X_{\check{\sigma}}$ вместе со склеивающими отображениями дает гладкое проективное алгебраическое многообразие X_{Σ} . Поскольку оно содержит всюду плотный тор, действующий на многообразии X_{Σ} , оно называется *торическим многообразием*.

- **Структурный пучок.** Совокупность алгебр $\{R_{\check{\sigma}}\}$ определяет пучок колец на X_{Σ} , называемый *структурным пучком* $\mathcal{O}_{X_{\Sigma}}$.

Группа Пикара многообразия X_{Σ} и решеточная комбинаторная группа Пикара. *Группа Пикара* есть группа классов изоморфизма обратимых пучков $\mathcal{O}_{X_{\Sigma}}$ -модулей. Групповой операцией является тензорное произведение пучков $\otimes$, а единичным элементом служит структурный пучок $\mathcal{O}_{X_{\Sigma}}$.

Пусть K – решеточный виртуальный многогранник, т. е. многогранник, вершины которого принадлежат стандартной решетке $\mathbb{Z}^n$. Предположим, что веер Σ_K грубее веера Σ . Представим K элементом комбинаторной группы Пикара, т. е. системой сдвинутых конусов $p_{\sigma} \otimes \check{\sigma}$ (см. п. 4.4). Построим по многограннику обратимый пучок $\mathcal{F}_K \in \mathcal{O}_{X_{\Sigma}}$ -модулей на многообразии X_{Σ} , задав

$$\mathcal{F}_K(X_{\check{\sigma}}) = z^{p_{\sigma}} \mathcal{O}_{X_{\Sigma}}(X_{\check{\sigma}}).$$

ТЕОРЕМА 39 [9]. *Отображение $K \rightarrow \mathcal{F}_K$ есть изоморфизм между решеточной комбинаторной группой Пикара $\mathcal{CP}_{\Sigma}^{\mathbb{Z}}$ и группой Пикара торического многообразия X_{Σ} .*

Теперь перейдем от виртуальных многогранников, подчиненных какому-то одному вееру, ко всей группе решеточных виртуальных многогранников.

Мы уже говорили в п. 4.4, что для веера Σ и его измельчения Σ' имеется естественное включение групп решеточных виртуальных многогранников, подчиненных этим веерам: $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}, \Sigma}^* \subseteq \mathcal{P}_{\mathbb{Z}, \Sigma'}^*$.

Кроме того, в этой же ситуации имеется естественный торический эпиморфизм $X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma}$, который индуцирует включение групп Пикара $\text{Pic}(X_{\Sigma}) \subseteq \text{Pic}(X_{\Sigma'})$.

Тем самым, мы имеем право говорить об *индуктивных пределах* групп $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}, \Sigma}^*$ и $\text{Pic}(X_{\Sigma})$. Переходя к индуктивному пределу в теореме 39, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 40. *Группа решеточных виртуальных многогранников $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^*$ изоморфна индуктивному пределу групп Пикара $\text{Pic}(X_{\Sigma})$.*

Теорема Римана–Роха и подсчет целых точек. Вот еще одно наблюдение (см. [49]): теорема 30 для валюации Q (напомним, эта валюация подсчитывает целые точки) следует из теоремы Римана–Роха (см. [50]).

Дело в том, что если перевести теорему 30 на язык торических многообразий, то виртуальному многограннику K соответствует обратимый пучок, а числу целых точек в K соответствует значение эйлеровой характеристики с коэффициентами в пучке, связанном с K . Остается применить теорему Римана–Роха, гласящую, что эйлерова характеристика ведет себя полиномиально по отношению к тензорному произведению: функция $n \rightarrow \xi(X_{\Sigma}, \mathcal{F}_K^{\otimes n})$ есть полином. Можно проверить, что для выпуклых многогранников значение этого полинома есть число целых точек.

7. Заключительные замечания

Теория виртуальных многогранников началась с очень простого алгебраического перехода от полугруппы виртуальных многогранников к ее группе Гротендика. Однако основной смысл теории состоит в многообразных геометрических представлениях виртуальных многогранников, приходящих вместе с каноническими изоморфизмами между представлениями, а также в приложениях и комбинациях разнообразных геометризаций.

В каждой конкретной задаче используется представление, наиболее подходящее для данной задачи. Например, в задаче о разложении Минковского (см. п. 6.4) нам потребовалось представление многогранными функциями. Для решения задачи А. Д. Александрова (см. п. 6.1) использовалось представление сферическими графами с внутренним напряжением, а также представление опорными функциями.

Мы заключаем, что виртуальные многогранники наследуют многие свойства и структуры выпуклых многогранников, но, конечно, не выпуклость и ее следствия. Однако структура граней, теория смешанных объемов, подсчет целых точек и другие понятия получают естественное продолжение на виртуальные многогранники.

С геометрической точки зрения виртуальные многогранники иногда контринтуитивны: мы видели примеры гиперболических многогранников со всюду седловой опорной функцией (см. в п. 6.1), трехмерный виртуальный многогранник, вершинно-реберный граф которого не трехсвязен (см. пример 15), изгибаемый виртуальный многогранник (см. пример 16) и другие примеры, не встречающиеся в мире выпуклых многогранников.

Мы хотели показать читателю, что виртуальные многогранники – интересные объекты как сами по себе, так и как технические средства для решения задач, лежащих вне данной теории.

Список литературы

- [1] А. В. Пухликов, А. Г. Хованский, “Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников”, *Алгебра и анализ*, **4:2** (1992), 161–185; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii, “Finitely additive measures of virtual polytopes”, *St. Petersburg Math. J.*, **4:2** (1993), 337–356.
- [2] A. D. Alexandroff, “Sur les théorèmes d’unicité pour les surfaces fermées”, *Докл. АН СССР*, **22:3** (1939), 99–102.
- [3] H. Groemer, “Minkowski addition and mixed volumes”, *Geometriae Dedicata*, **6:2** (1977), 141–163.
- [4] L. Rodríguez, H. Rosenberg, “Rigidity of certain polyhedra in $\mathbf{R}^3$ ”, *Comment. Math. Helv.*, **75:3** (2000), 478–503.
- [5] V. Alexandrov, “Minkowski-type and Alexandrov-type theorems for polyhedral herissons”, *Geom. Dedicata*, **107** (2004), 169–186.
- [6] Y. Martinez-Maure, “Théorie des hérissons et polytopes”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **336:3** (2003), 241–244.
- [7] P. McMullen, “The polytope algebra”, *Adv. Math.*, **78:1** (1989), 76–130.
- [8] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory*, Encyclopedia Math. Appl., **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, xiv+490 pp.

- [9] G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **168**, Springer-Verlag, New York, 1996, xiv+372 pp.
- [10] Г. Ю. Панина, “Виртуальные многогранники и классические вопросы геометрии”, *Алгебра и анализ*, **14**:5 (2002), 152–170; англ. пер.: G. Yu. Panina, “Virtual polytopes and classical questions in geometry”, *St. Petersburg Math. J.*, **14**:5 (2003), 823–834.
- [11] О. Ya. Viro, “Some integral calculus based on Euler characteristic”, *Topology and geometry – Rohlin seminar*, Lecture Notes in Math., **1346**, Springer, Berlin, 1988, 127–138.
- [12] Г. Ю. Панина, “Структура группы виртуальных многогранников относительно подгрупп цилиндров”, *Алгебра и анализ*, **13**:3 (2001), 179–197; англ. пер.: G. Yu. Panina, “The structure of the virtual polytope group relative to cylinder subgroups”, *St. Petersburg Math. J.*, **13**:3 (2002), 471–484.
- [13] P. McMullen, “Separation in the polytope algebra”, *Beiträge Algebra Geom.*, **34**:1 (1993), 15–30.
- [14] W. Fulton, B. Sturmfels, “Intersection theory on toric varieties”, *Topology*, **36**:2 (1997), 335–353.
- [15] M. Brion, “The structure of the polytope algebra”, *Tohoku Math. J. (2)*, **49**:1 (1997), 1–32.
- [16] R. P. Stanley, “The number of faces of a simplicial convex polytope”, *Adv. in Math.*, **35**:3 (1980), 236–238.
- [17] P. McMullen, “On simple polytopes”, *Invent. Math.*, **113** (1993), 419–444.
- [18] В. А. Тиморин, “Аналог соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников”, *УМН*, **54**:2(326) (1999), 113–162; англ. пер.: V. A. Timorin, “An analogue of the Hodge–Riemann relations for simple convex polytopes”, *Russian Math. Surveys*, **54**:2 (1999), 381–426.
- [19] В. М. Бухштабер, “Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения”, *Геометрия, топология и математическая физика. I*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Тр. МИАН, **263**, МАИК, М., 2008, 18–43; англ. пер.: V. M. Buchstaber, “Ring of simple polytopes and differential equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **263** (2008), 13–37.
- [20] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, “Многогранники, числа Фибоначчи, алгебры Хопфа и квазисимметрические функции”, *УМН*, **66**:2(398) (2011), 67–162; англ. пер.: V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets, “Polytopes, Fibonacci numbers, Hopf algebras, and quasi-symmetric functions”, *Russian Math. Surveys*, **66**:2 (2011), 271–367.
- [21] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **15**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, viii+212 pp.
- [22] G. Panina, “On hyperbolic virtual polytopes and hyperbolic fans”, *Cent. Eur. J. Math.*, **4**:2 (2006), 270–293.
- [23] G. Yu. Panina, “Pointed spherical tilings and hyperbolic virtual polytopes”, *Геометрия и топология. 11*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **372**, ПОМИ, СПб., 2009, 157–171; *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **175**:5 (2011), 591–599.
- [24] G. Panina, “New counterexamples to A. D. Alexandrov’s hypothesis”, *Adv. Geom.*, **5**:2 (2005), 301–317.
- [25] C. J. Brianchon, “Théorème nouveau sur les polyèdres”, *J. Ecole (Royale) Polytechnique*, **15** (1837), 317–319.
- [26] J. C. Maxwell, “On reciprocal figures, frames, and diagrams of forces”, *Trans. R. Soc. Edinburgh*, **26**:1 (1870), 1–40.
- [27] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, New York, 1995, x+370 pp.

- [28] Y. Martinez-Maure, “Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **332**:1 (2001), 41–44.
- [29] M. Knyazeva, G. Panina, “An illustrated theory of hyperbolic virtual polytopes”, *Cent. Eur. J. Math.*, **6**:2 (2008), 204–217.
- [30] M. Knyazeva, G. Panina, *A counterexample to A. D. Alexandrov’s conjecture*, EG-Models – archive of electronic geometry models, model № 2010.02.002, 2010, http://www.eg-models.de/models/Surfaces/2010.02.002/_preview.html.
- [31] G. Panina, “A. D. Alexandrov’s uniqueness theorem for convex polytopes and its refinements”, *Beiträge Algebra Geom.*, **49**:1 (2008), 59–70.
- [32] G. Panina, “Around A. D. Alexandrov’s uniqueness theorem for convex polytopes”, *Adv. Geom.*, **12**:4 (2012), 621–637.
- [33] G. Rote, F. Santos, I. Streinu, “Pseudo-triangulations – a survey”, *Surveys on discrete and computational geometry. Twenty years later*, *Contemp. Math.*, **453**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 343–410; 2006 (v2 – 2007), 68 pp., arXiv:math/0612672.
- [34] I. Streinu, “A combinatorial approach to planar non-colliding robot arm motion planning”, *41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (Redondo Beach, CA, 2000), IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 2000, 443–453.
- [35] I. Streinu, “Pseudo-triangulations, rigidity and motion planning”, *Discrete Comput. Geom.*, **34**:4 (2005), 587–635.
- [36] G. A. Pick, “Geometrisches zur Zahlenlehre”, *Sonderabdr. Naturw.-medizin. Verein f. Böhmen “Lotos”*, **19** (1899), 311–319.
- [37] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, Pure and Applied Mathematics, **16**, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967, xiv+456 pp.
- [38] P. Norbury, “Counting lattice points in the moduli space of curves”, *Math. Res. Lett.*, **17**:3 (2010), 467–481; 2008, 15 pp., arXiv:0801.4590.
- [39] P. McMullen, “Valuations and Euler-type relations on certain classes of convex polytopes”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **35**:1 (1977), 113–135.
- [40] E. Ehrhart, *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire*, Internat. Ser. Numer. Math., **35**, Birkhäuser Verlag, Basel–Stuttgart, 1977, 165 pp.
- [41] A. Barvinok, J. E. Pommersheim, “An algorithmic theory of lattice points in polyhedra”, *New perspectives in algebraic combinatorics* (Berkeley, CA, 1996–97), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 91–147.
- [42] А. В. Пухликов, А. Г. Хованский, “Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам”, *Алгебра и анализ*, **4**:4 (1992), 188–216; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii, “The Riemann–Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials on virtual polytopes”, *St. Petersburg Math. J.*, **4**:4 (1993), 789–812.
- [43] M. Brion, M. Vergne, “Lattice points in simple polytopes”, *J. Amer. Math. Soc.*, **10**:2 (1997), 371–392.
- [44] Г. Ю. Панина, “Смешанные объемы невыпуклых тел”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **28**:1 (1993), 72–81; англ. пер.: G. Yu. Panina, “Mixed volumes for nonconvex bodies”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **28**:1 (1993), 63–71.
- [45] R. Schneider, W. Weil, “Zonoids and related topics”, *Convexity and its applications*, Birkhäuser, Basel, 1983, 296–317.
- [46] J. Richter-Gebert, *Realization spaces of polytopes*, Lecture Notes in Math., **1643**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, xii+187 pp.
- [47] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. M. Ziegler, *Oriented matroids*, 2nd ed., Encyclopedia Math. Appl., **46**, Cambridge, 1999, xii+548 pp.
- [48] В. И. Данилов, “Геометрия торических многообразий”, *УМН*, **33**:2(200) (1978), 85–134; англ. пер.: V. I. Danilov, “The geometry of toric varieties”, *Russian Math. Surveys*, **33**:2 (1978), 97–154.

- [49] А. Г. Хованский, “Многогранники Ньютона и торические многообразия”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:4 (1977), 56–64; англ. пер.: A. G. Khovanskii, “Newton polyhedra and toroidal varieties”, *Funct. Anal. Appl.*, **11**:4 (1977), 289–296.
- [50] Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973, 280 с.; пер. с нем.: F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, 2. erg. Aufl., *Ergeb. Math. Grenzgeb. (N.F.)*, **9**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1962, vii+181 pp.; англ. пер.: F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, 3rd ed., *Grundlehren Math. Wiss.*, **131**, Springer-Verlag, New York, 1966, x+232 pp.

Гаянэ Юрьевна Панина
(**Gayane Yu. Panina**)

Санкт-Петербургский государственный университет;
Санкт-Петербургский институт информатики
и автоматизации РАН
E-mail: gaiane-panina@rambler.ru

Поступила в редакцию
10.12.2014

Илеана Стрейну
(**Ileana Streinu**)

Department of Computer Science, Smith College,
Northampton, MA, USA
E-mail: istreinu@smith.edu