Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тищенко, Моноид полугрупповых многообразий относительно сплетения,
УМН, 1996, том 51, выпуск 2, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm964>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 10:40:26

МОНОИД ПОЛУГРУППОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СПЛЕТЕНИЯ

А. В. Тищенко

Операция сплетения полугрупповых многообразий определена в [1], [2]. Мы называем ее моноидным сплетением для того, чтобы отличить ее от других возможных операций на многообразиях, введенных с помощью сплетения полугрупп. Заметим, что на периодических групповых многообразиях моноидное сплетение совпадает с произведением групповых многообразий. Интерес к изучению этой операции вызван, с одной стороны, тем, что эта операция показала свою плодотворность при изучении многообразий групп [3], а с другой стороны, тем, что она возникла в теории декомпозиции конечных полугрупп, а также при изучении формальных языков и конечных автоматов [4], [5]. При этом изучение сплетения полугрупповых многообразий содержит очевидные перспективы применения получаемых результатов к псевдомногообразиям конечных полугрупп в силу близости понятий многообразия и псевдомногообразия (см., например, [6]).

Сплетением $(SwR \mid A)$ полугрупп S и R при помощи правого R -полигона A называется полугруппа, определенная на множестве $S^A \times R$ посредством умножения, заданного формулой $(f, p)(g, q) = (f^p g, pq)$, где $(f^p g)(a) = f(a)g(ap)$ для всех $f, g \in S^A$, $a \in A$, $p, q \in R$ (см. [7], [8]). Сплетение назовем расширенным стандартным, если $A = R^1$, где R^1 – наименьший моноид, содержащий полугруппу R . Расширенное стандартное сплетение обозначим через SwR .

Моноидным сплетением полугрупповых многообразий U и V назовем полугрупповое многообразие UwV , порожденное всевозможными расширенными стандартными сплетениями SwR , в которых $S \in U$ и $R \in V$. Очевидно, что многообразие S всех полугрупп является нулем, а многообразие T всех одноэлементных (тривиальных) полугрупп является единицей относительно моноидного сплетения многообразий. Прежде всего, укажем на два известных результата об операции моноидного сплетения.

ТЕОРЕМА 1 [1]. *Моноидное сплетение полугрупповых многообразий ассоциативно.*

ТЕОРЕМА 2 [9], [6]. *Многообразие полугрупп является идемпотентом относительно моноидного сплетения многообразий тогда и только тогда, когда оно есть либо многообразие S всех полугрупп, либо совпадает с одним из многообразий $L_{j,m}$, задаваемым одним тождеством*

$$x_1 \dots x_j y_1 \dots y_{m-j} = x_1 \dots x_j z_1 \dots z_{m-j+1} \quad (m \geq 1, 0 \leq j \leq m).$$

Отметим, что при $j = 0$ многообразие $L_{0,m}$ есть многообразие N_m нильпотентных полугрупп индекса m . В частности, $L_{0,1}$ есть многообразие T тривиальных полугрупп. Полугруппа называется нильпотентной слева индекса m , если произведение любых ее m элементов есть левый нуль полугруппы. При $j = m$ многообразие $L_{m,m}$ есть класс всех нильпотентных слева полугрупп индекса m .

Пусть MV – моноид всех полугрупповых многообразий относительно моноидного сплетения. Все полугрупповые многообразия разобьем на пять классов: T – одноэлементное множество, состоящее только из многообразия T тривиальных полугрупп; LN – множество всех нетривиальных периодических многообразий, состоящих из нильпотентных слева полугрупп; G – множество всех периодических групповых многообразий; OC – множество всех надкоммутативных многообразий (т.е. содержащих многообразие коммутативных полугрупп); F – множество всех периодических многообразий, содержащих полугруппу, которая не является ни группой, ни нильпотентной слева полугруппой.

ТЕОРЕМА 3. *Моноид MV полугрупповых многообразий можно представить как пятиэлементную полурешетку своих непересекающихся подполугрупп T, LN, G, F, OC , в которой T – наибольший элемент, OC – наименьший элемент, $F \leq LN$ и $F \leq G$, а LN и G не сравнимы. При этом OC – полугруппа с нулевым умножением, G – свободная полугруппа континуального ранга, F – полугруппа без идемпотентов, не*

удовлетворяющая ни правому, ни левому закону сокращения, а компонента LN разложима в счетную полурешетку конечных нильпотентных полугрупп $T(\mathbf{L}_{j,m})$, где $m \geq 1$, $0 \leq j \leq m$, $m + j \geq 2$.

Что можно сказать о строении компонент полурешеточного разложения MV , полученного в теореме 3? Нильпотентные компоненты OC и $T(\mathbf{L}_{j,m})$, очевидно, далее полурешеточно неразложимы. Компонента T состоит из одного элемента, а G имеет понятное полугрупповое строение. Для компоненты G нет описания множества свободных образующих, т.е. всех неразложимых в сплетение многообразий. С другой стороны, моноидное сплетение периодических групповых многообразий совпадает с их произведением, и поэтому достаточно большое число примеров неразложимых групповых многообразий имеется в книге [3]. Полное описание неразложимых групповых многообразий пока отсутствует.

Наиболее неясным остается сейчас строение компоненты F . О структуре полугруппы F известна пока лишь информация, указанная в теореме 3. Более точное изучение компоненты F пока представляет известные трудности, так как в случае полугрупп без кручения дальнейшие полурешеточные разложения могут не привести к компонентам, устроенным более просто, чем исходная полугруппа F .

Дополнительную информацию о строении моноида MV дают следующие два результата. Первый из них показывает, что индексы нильпотентности конечных нильпотентных полугрупп $T(\mathbf{L}_{j,m})$, фигурирующих в теореме 3, не ограничены в совокупности. Второй результат дает полное описание условий на многообразия $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, при которых их сплетение равно нулю моноида MV , т.е. совпадает с $\mathbf{S}$.

ТЕОРЕМА 4. Для любого $m \geq 1$ индекс нильпотентности класса кручения $T(N_m)$ равен $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$.

ТЕОРЕМА 5. Моноидное сплетение $\mathbf{U}w\mathbf{V}$ двух полугрупповых многообразий равно $\mathbf{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{V}$ надкоммутативно, а $\mathbf{U}$ содержит либо неодноэлементную полурешетку, либо нетривиальную группу, либо счетнопорожденную коммутативную ненильпотентную полугруппу Q с тождеством $x^2 = 0$.

В заключение отметим, что теорема 4 была анонсирована в [10], а теорема 3 улучшает результат о разложении моноида MV в трехэлементную полурешетку, анонсированный в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tilson B. // J. Pure and Appl. Algebra. 1987. V. 48. P. 83–198. [2] Тищенко А. В. // Междунар. конф. по алгебре памяти А. И. Ширшова (Барнаул, август 1991). Тезисы докл. по логике и универс. алгебрам, прикл. алгебре. Новосибирск, 1991. С. 144. [3] Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969. [4] Eilenberg S. Automata, Languages and Machines. V. B. New York: Acad. Press, 1976. [5] Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985. [6] Almeida J. // Semigroup Forum. 1990. V. 40. P. 315–323. [7] Skornjakov L. A. // Semigroup Forum. 1979. V. 18. P. 83–86. [8] Тищенко А. В. // Сиб. матем. журн. 1986. Т. 27. № 6. С. 183–195. [9] Koselev Yu. G. // Semigroup Forum. 1976. V. 12. P. 95–107. [10] Тищенко А. В. // Третья междунар. конф. по алгебре памяти М. И. Каргаполова (Красноярск, 23–28 августа 1993). Тезисы докл. Красноярск, 1993. С. 331.

Московский институт-интернат
для инвалидов с нарушением
опорно-двигательной системы

Принято редколлегией
24.11.1995