Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Широков, О квантовой пропускной способности при нулевой ошибке, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 1, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9642>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:19:42

О квантовой пропускной способности при нулевой ошибке

М. Е. Широков

Понятие пропускной способности канала связи при нулевой ошибке появилось в классических трудах Шеннона; существенное продвижение в его изучении связано с работами Ловача. Квантовое обобщение этого понятия и связанного с ним понятия некоммутативного графа смежности дано в [1], [2]. В настоящей заметке построено семейство квантовых каналов Φ_n с положительной (асимптотической) квантовой пропускной способностью при нулевой ошибке, для которых соответствующая n -шаговая пропускная способность равна нулю. Этот эффект является новым проявлением недавно открытого феномена “суперактивации” пропускных способностей квантового канала при блочном кодировании [3]–[5].

Квантовым каналом называется линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi: \mathfrak{M}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{H}_B)$, где $\mathfrak{M}(\mathcal{H}_X)$ – алгебра всех операторов в конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{H}_X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [6; гл. 9]). Квантовый канал $\Phi: \mathfrak{M}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{H}_B)$ обратим на подпространстве $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_A$, если существует квантовый канал $\Psi: \mathfrak{M}(\mathcal{H}_B) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{H}_A)$ такой, что $\Psi(\Phi(\rho)) = \rho$ для любого состояния ρ с носителем в $\mathcal{H}_0$.

Сужение канала Φ на подалгебру $\mathfrak{M}(\mathcal{H}_0)$ будем называть *идеальным подканалом* канала Φ . Именно идеальные подканалы осуществляют безошибочную передачу квантовых состояний при однократном использовании канала Φ . Если же используется блочное кодирование для n копий канала Φ , то безошибочная передача квантовых состояний осуществляется идеальными подканалами канала $\Phi^{\otimes n}$.

В данной заметке показано, как для любого $n \in \mathbb{N}$ явно построить такой квантовый канал Φ_n , что у канала $\Phi_n^{\otimes n}$ (а значит, и у каналов $\Phi_n^{\otimes k}$, $k < n$) нет идеальных подканалов, но при некотором $m > n$ у канала $\Phi_n^{\otimes m}$ появляется идеальный подканал. Это означает, что, используя не более n копий канала Φ_n , нельзя безошибочно передать никаких квантовых состояний, но такая передача становится возможной, если число используемых копий данного канала не меньше m , причем это число m можно явно вычислить по заданному n .

Для фиксированного $\theta \in (-\pi, \pi]$ рассмотрим подпространство

$$\mathfrak{L}_\theta = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & \gamma c & d \\ b & a & d & \bar{\gamma} c \\ \bar{\gamma} c & d & a & b \\ d & \gamma c & b & a \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, \gamma = \exp\left(\frac{i}{2}\theta\right) \right\} \quad (1)$$

алгебры всех (4×4) -матриц, которое можно считать деформацией максимальной коммутативной $*$ -подалгебры $\mathfrak{L}_0$ (ср. [7]). Поскольку $\mathfrak{L}_\theta$ симметрично ($\mathfrak{L}_\theta^* = \mathfrak{L}_\theta$), содержит единичную матрицу и $\dim \mathfrak{L}_\theta = 4$, нетрудно явно построить квантовые каналы с $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^4$ и рангом Чоя, равным 2, для которых подпространство $\mathfrak{L}_\theta$ является некоммутативным графом смежности (см. [8; приложение]). Множество всех таких каналов обозначим $\hat{\mathfrak{L}}_\theta$.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ пусть $\mathcal{H}_n$ – подпространство в $\mathbb{C}^{4n} = [\mathbb{C}^4]^{\otimes n}$, порожденное векторами $x = e_1 \otimes \cdots \otimes e_1 + i \cdot e_2 \otimes \cdots \otimes e_2$ и $y = e_3 \otimes \cdots \otimes e_3 + i \cdot e_4 \otimes \cdots \otimes e_4$, где $\{e_1, \dots, e_4\}$ – канонический базис в $\mathbb{C}^4$ (в каждом произведении n сомножителей).

ТЕОРЕМА. Пусть Φ_θ – произвольный канал из $\hat{\mathfrak{L}}_\theta$ и n – любое натуральное число.

А) У канала Φ_θ есть идеальные подканалы тогда и только тогда, когда $\theta = \pi$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00162).

DOI: 10.4213/rm9642

В) Если $|\theta_1| + \dots + |\theta_n| \leq 2 \ln(3/2)$, то у канала $\Phi_{\theta_1} \otimes \dots \otimes \Phi_{\theta_n}$ нет идеальных подканалов.

С) Если $\theta_1 + \dots + \theta_n = \pi \pmod{2\pi}$, то у канала $\Phi_{\theta_1} \otimes \dots \otimes \Phi_{\theta_n}$ есть идеальный подканал, соответствующий подпространству $\mathcal{H}_n$.

Комбинируя утверждения В) и С) теоремы, получаем наш основной результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть n произвольно, а m – такое натуральное число, что $\theta_* = \pi/m \leq 2 \ln(3/2)/n$. Тогда у каналов $\Phi_{\theta_*}^{\otimes k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, нет идеальных подканалов, а у канала $\Phi_{\theta_*}^{\otimes m}$ есть идеальный подканал, соответствующий подпространству $\mathcal{H}_m$.

В квантовой теории информации величина $\overline{Q}_0(\Phi) = \sup_{\mathcal{H} \in q_0(\Phi)} \log_2 \dim \mathcal{H}$, где $q_0(\Phi)$ – множество всех подпространств в $\mathcal{H}_A$, на которых канал Φ обратим, называется *одношаговой (one-shot) квантовой пропускной способностью* канала Φ при нулевой ошибке. Эта величина характеризует предельную скорость безошибочной передачи квантовой информации при отсутствии блочного кодирования. Соответственно, (асимптотическая) квантовая пропускная способность канала Φ при нулевой ошибке определяется с помощью регуляризации: $Q_0(\Phi) = \sup_n n^{-1} \overline{Q}_0(\Phi^{\otimes n})$ [1], [2].

Следствие 1 показывает, что для любого n существует такой канал Φ_n с $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^4$ и рангом Чоя 2, что

$$\overline{Q}_0(\Phi_n^{\otimes n}) = 0, \quad \text{но} \quad Q_0(\Phi_n) \geq \left(\left\lfloor \frac{\pi n}{2 \ln(3/2)} \right\rfloor + 1 \right)^{-1} = \frac{2 \ln(3/2)}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow +\infty,$$

где $[x]$ – целая часть x .

Аналогичный результат для квантовой пропускной способности с ε -малой ошибкой был недавно получен в [9].

В силу утверждений А) и С) теоремы для каналов Φ_θ имеет место суперактивация одношаговой квантовой пропускной способности при нулевой ошибке.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\theta \neq 0, \pi$, то для любых каналов $\Phi_\theta \in \widehat{\mathcal{L}}_\theta$ и $\Phi_{\pi-\theta} \in \widehat{\mathcal{L}}_{\pi-\theta}$

$$\overline{Q}_0(\Phi_\theta) = \overline{Q}_0(\Phi_{\pi-\theta}) = 0, \quad \text{но} \quad \overline{Q}_0(\Phi_\theta \otimes \Phi_{\pi-\theta}) > 0.$$

При любом $\theta \in (-\pi, \pi]$ канал $\Phi_\theta \otimes \Phi_{\pi-\theta}$ обратим на подпространстве $\mathcal{H}_2$.

В частности, канал $\Phi_{\pi/2}$ дает пример симметричной суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности при нулевой ошибке с рангом Чоя 2. Ранее такой пример с рангом Чоя 3 и тем же входным пространством $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^4$ был построен в [8].

Доказательство теоремы и ее многомерное обобщение приведены в [10].

Список литературы

- [1] R. A. C. Medeiros, F. M. de Assis, *Int. J. Quantum Inf.*, **3**:1 (2005), 135–139. [2] R. Duan, S. Severini, A. Winter, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **59**:2 (2013), 1164–1174. [3] G. Smith, J. Yard, *Science*, **321**:5897 (2008), 1812–1815. [4] T. S. Cubitt, J. Chen, A. W. Harrow, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **57**:12 (2011), 8114–8126. [5] R. Duan, *Super-activation of zero-error capacity of noisy quantum channels*, arXiv:0906.2527. [6] А. С. Холево, *Квантовые системы, каналы, информация*, МЦНМО, М., 2010, 328 с. [7] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206. [8] М. Е. Широков, Т. В. Шульман, *Пробл. передачи информ.*, **50**:3 (2014), 35–50. [9] T. Cubitt, D. Elkouss, W. Matthews, M. Ozols, D. Perez-Garcia, S. Strelchuk, *Unbounded number of channel uses are required to see quantum capacity*, arXiv:1408.5115. [10] М. Е. Широков, *On channels with positive quantum zero-error capacity having vanishing n-shot capacity*, arXiv:1407.8524.

Максим Евгеньевич Широков

(Maxim E. Shirokov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: msh@mi.ras.ru

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией

05.12.2014