Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Павлов, О. В. Назарько, О неотрицательных адаптированных последовательностях случайных величин, являющихся процессами плотностей для деформированных стохастических базисов 1-го рода, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 1, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:58:27

О неотрицательных адаптированных последовательностях случайных величин, являющихся процессами плотностей для деформированных стохастических базисов 1-го рода

И. В. Павлов, О. В. Назарько

Пусть $(\Omega, \mathbf{F})$ – фильтрованное пространство с дискретным временем, где Ω – произвольное множество, а $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ – фильтрация. Семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathcal{F}_n$, называется деформацией 1-го рода (D1), если при всех $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ выполняются соотношения абсолютной непрерывности $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \ll Q^{(n)}$, и слабой деформацией (WD), если выполняются соотношения $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \sim Q^{(n)}$. Тройка $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{Q})$ называется деформированным стохастическим базисом (соответственно 1-го рода и слабо деформированным). Ряд результатов, которые использованы в данной работе, можно найти в [1].

Для D1 $\mathbf{Q}$ введем процесс плотностей $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ согласно формуле $dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} = h_n dQ^{(n)}$. В настоящей работе изучаются следующие вопросы. Основной вопрос: при каких условиях на адаптированный неотрицательный определенный всюду на Ω процесс $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ существует D1 $\mathbf{Q}$, удовлетворяющая приведенному выше равенству, и как описать такие D1? На этот вопрос дается ответ в случае, когда σ -алгебра $\mathcal{F}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ порождена разбиением Ω на не более чем счетное число атомов. Вспомогательный вопрос: как естественным образом деформации 1-го рода сводить к слабым деформациям? На этот вопрос дан ответ без существенных ограничений на фильтрацию. Отметим, что результаты данной работы важны для развития теории арбитража на финансовых (B, S) -рынках, заданных на деформированных стохастических базисах 1-го рода.

Начнем с вспомогательного вопроса. Пусть $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ – марковский момент (м.м.) относительно $\mathbf{F}$. Для $A \in \mathcal{F}_\tau$ обозначим $Q^{(\tau)}(A) = \sum_{i=0}^\infty Q^{(i)}(A\{\tau = i\})$. Ясно, что $Q^{(\tau)}$ – неотрицательная σ -конечная мера, совпадающая на $\{\tau = n\}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ с мерой $Q^{(n)}$. Если м.м. τ ограничен, то мера $Q^{(\tau)}$ ограничена и не является нулевой. Далее нам понадобится D1 $\mathbf{R} = (R^{(n)})_{n=0}^\infty := Q^{(\tau \wedge n)} / Q^{(\tau \wedge n)}(\Omega), \mathcal{F}_{\tau \wedge n})_{n=0}^\infty$.

Процессы $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ и $\mathbf{Z}' = (Z'_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ (соответственно м.м. τ и τ') называются $\mathbf{Q}$ -неразличимыми, если $Z_n = Z'_n$ $Q^{(n)}$ -п. н. (соответственно $Q^{(n)}(\{\tau = n\} \Delta \{\tau' = n\}) = 0$) для любого $n \in \mathbb{N}$. Если σ -алгебра $\mathcal{F}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ полна относительно $Q^{(n)}$, то в случае неразличимости τ, τ' и $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}'$ имеем: $\mathcal{F}_{\tau \wedge n} = \mathcal{F}_{\tau' \wedge n}$, $Q^{(\tau \wedge n)} = Q^{(\tau' \wedge n)}$ и $Z_{\tau \wedge n} = Z'_{\tau' \wedge n}$ $Q^{(\tau \wedge n)}$ -п. в.

Пусть $\mathbf{Q}$ – D1, а $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ – какая-либо фиксированная версия ее процесса плотностей. Рассмотрим м.м. $\tau = \inf\{n \geq 0: h_n = 0\}$. Можно показать, что $Q^{(n)}(\tau \geq n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. С применением этого свойства доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть σ -алгебра $\mathcal{F}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ полна относительно $Q^{(n)}$. Тогда деформация $\mathbf{R}$ не зависит от версии процесса плотностей деформации 1-го рода $\mathbf{Q}$ и является слабой деформацией. При этом для любого деформированного субмартингала 1-го рода (см. [1]) $(Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^\infty$ процесс $(Z_{\tau \wedge n}, \mathcal{F}_{\tau \wedge n}, R^{(n)})_{n=0}^\infty$ есть слабо деформированный субмартингал, также не зависящий от версии $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$.

Перейдем теперь к основному вопросу данной работы. Пусть σ -алгебра $\mathcal{F}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ порождена разбиением Ω на не более чем счетное число атомов, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$. Через $\mathcal{D}_n$ обозначим множество всех атомов σ -алгебры $\mathcal{F}_n$. Мы будем строить деформации $\mathbf{Q}$ 1-го рода, порожденные адаптированными неотрицательным процессом $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$. Значение случайной величины h_n на атоме $D \in \mathcal{D}_n$ обозначим

через $h_n(D)$. При этом необходимо выполнение условия $h_0(\Omega) = 1$. Рассмотрим м.м. $\tau = \inf\{n \geq 0: h_n = 0\}$. Не нарушая общности, предположим, что $h_n = 0$ при $n \geq \tau$ и $h_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $D_{n+1} \in \mathcal{D}_{n+1}$. Через D_k , $k = 0, 1, \dots, n$, обозначим атом из $\mathcal{D}_k$ такой, что $D_k \supset D_{n+1}$. Ясно, что $\Omega = D_0 \supset D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_n \supset D_{n+1}$. Обозначим через $(D_{n+1}^i)_{1 \leq i < m+1}$ совокупность всех атомов из $\mathcal{D}_{n+1}$ таких, что $\sum_{i=1}^m D_{n+1}^i = D_n$. Отметим, что $m = m(D_n)$ может равняться ∞ и что среди атомов $(D_{n+1}^i)_{1 \leq i < m+1}$ присутствует D_{n+1} .

Деформацию $\mathbf{Q}$ 1-го рода с процессом плотностей $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ назовем невырожденной, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $D_n \in \mathcal{D}_n$ такого, что $h_n(D_n) > 0$, выполняются неравенства $Q^{(n+1)}(D_{n+1}^i) > 0$, $1 \leq i < m+1$. Множество всех невырожденных деформаций, порожденных процессом $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$, обозначим $\mathbf{D}(h_n)$.

Пусть $(p_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ – произвольный строго положительный процесс. Определим семейство мер $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ (вообще говоря, σ -конечных) следующими формулами: $Q^{(0)}(\Omega) = 1$ и $Q^{(n+1)}(D_{n+1}) := p_{n+1}(D_{n+1})h_n(D_n)Q^{(n)}(D_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall D_n \in \mathcal{D}_n$.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы неотрицательный процесс $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ являлся процессом плотностей некоторой невырожденной D1 $\mathbf{Q}$, необходимо и достаточно (соответственно достаточно), чтобы для любого $n \in \mathbb{N}$ случайный процесс $(p_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$, $p_0 = 1$, удовлетворял условиям: $\sum_{\forall D_{n+1} \in \mathcal{D}_{n+1}} \prod_{k=0}^n p_{k+1}(D_{k+1})h_k(D_k) = 1$ (где суммирование производится по всем атомам $D_{n+1} \in \mathcal{D}_{n+1}$) и $\sum_{i=1}^m p_{n+1}(D_{n+1}^i) = 1$ для всех $D_n \in \mathcal{D}_n$ таких, что $h_n(D_n) > 0$ (соответственно удовлетворял последнему условию и равенствам $\sum_{i=1}^m h_{n+1}(D_{n+1}^i)p_{n+1}(D_{n+1}^i) = 1$ для всех $D_n \in \mathcal{D}_n$ таких, что $h_n(D_n) > 0$, – эти равенства выделяют класс канонических D1).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ – произвольный случайный процесс. Для невырожденной деформации 1-го рода $\mathbf{Q} \in \mathbf{D}(h_n)$ следующие условия равносильны:

- 1) $\mathbf{Q}$ – мартингальная деформация 1-го рода (т.е. $(Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^\infty$ – деформированный мартингал 1-го рода);
- 2) $\sum_{\forall D_n \in \mathcal{D}_n} |Z_n(D_n)| \prod_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(D_{k+1})h_k(D_k) < \infty$ для любого $n \geq 1$, а также $\sum_{i=1}^m Z_{n+1}(D_{n+1}^i)p_{n+1}(D_{n+1}^i) = Z_n(D_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $D_n \in \mathcal{D}_n$ такого, что $h_n(D_n) > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathbf{Z}$ ограничен, то все канонические мартингальные деформации можно найти, решив для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $D_n \in \mathcal{D}_n$ таких, что $h_n(D_n) > 0$, следующие системы:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i = 1, & \sum_{i=1}^m h_{n+1}(D_{n+1}^i)x_i = 1, \\ \sum_{i=1}^m Z_{n+1}(D_{n+1}^i)x_i = Z_n(D_n), & x_i > 0 \quad \forall i < m+1. \end{cases}$$

Список литературы

- [1] И. В. Павлов, О. В. Назарько, УМН, 68:6(414) (2013), 175–176.

Игорь Викторович Павлов

(Igor V. Pavlov)

Ростовский государственный строительный университет

E-mail: pavloviv2005@mail.ru

Представлено Д. В. Трещёвым

Принято редколлегией

19.08.2014

Ольга Валерьевна Назарько

(Olga V. Nazarko)

Ростовский государственный строительный университет

E-mail: ca_va@inbox.ru