Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шидловский, О критериях линейной и алгебраической зависимости значений E -функций в алгебраических точках, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm965>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:44:26

О КРИТЕРИЯХ ЛИНЕЙНОЙ И АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ E -ФУНКЦИЙ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧКАХ

А.Б. Шидловский

Формулируются теоремы о необходимых и достаточных условиях линейной и алгебраической зависимости значений E -функций в алгебраических точках.

С историей вопроса и многими результатами об арифметических свойствах значений E -функций можно ознакомиться по книге [1]. В статье [2] доказан ряд теорем и высказано несколько предположений о линейной независимости значений E -функций.

Пусть в дальнейшем совокупность E -функций

$$(1) \quad f_1(z), \dots, f_m(z)$$

будет составлять решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$(2) \quad y'_k = \sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad m \geq 2,$$

или системы дифференциальных уравнений

$$(3) \quad y'_k = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad m \geq 1,$$

которая может быть и однородной. Пусть $T(z) \in \mathbb{C}[z]$ и является общим наименьшим знаменателем всех функций $Q_{k,i}$ в системе (2) или (3), а $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, где $\mathbb{A}$ – поле всех алгебраических чисел над $\mathbb{Q}$. Пусть также $\mathbb{K}$ обозначает любое фиксированное алгебраическое поле над $\mathbb{Q}$, содержащее коэффициенты степенных рядов по степеням z всех E -функций (1) и число ξ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть E -функции (1) составляют решение системы (2),

$$(4) \quad f_{i_1}(z), \dots, f_{i_t}(z), \quad 1 \leq t \leq m,$$

– любая подсовокупность функций (1), а $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$.

Тогда числа

$$(5) \quad f_{i_1}(\xi), \dots, f_{i_t}(\xi)$$

линейно зависимы над полем $\mathbb{K}$ в том и только в том случае, когда существует неприводимый однородный многочлен $P = P(z, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{K}[z, z_1, \dots, z_m]$ такой, что

$$(6) \quad P(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0$$

и

$$P(\xi, z_1, \dots, z_m) = \left(\sum_{s=1}^t a_s z_{i_s} \right) P_1(z_1, \dots, z_m),$$

где

$$a_1, \dots, a_t \in \mathbb{K}, \quad \sum_{s=1}^t |a_s| > 0, \quad \sum_{s=1}^t a_s f_{i_s}(\xi) = 0, \\ P_1(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{K}[z_1, \dots, z_m].$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы 1 сохранится, если в ее формулировке заменить поле $\mathbb{K}$ на поле $\mathbb{A}$.

Рассматривая совокупность E -функций (1), составляющую решение системы (3), заменяя в теореме 1 число m на $m+1$ и полагая $f_{m+1}(z) \equiv 1$, получим неоднородный аналог теоремы 1 о линейной зависимости чисел $f_{i_1}(\xi), \dots, f_{i_t}(\xi)$ и 1.

В работе [4] (теорема 3) доказан критерий алгебраической зависимости значений подсовокупности функций (1). Такого типа критерий выполняется в более общем случае.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E -функции (1) составляют решение системы (3) (системы (2)), функции (4) – любая подсовокупность функций (1), $a \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$.

Тогда числа (5) алгебраически зависимы (однородно алгебраически зависимы) в том и только в том случае, когда существует неприводимый (однородный неприводимый) многочлен

$$(7) \quad P = P(z, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{A}[z, z_1, \dots, z_m],$$

удовлетворяющий условию (6), такой, что

$$P(\xi, z_1, \dots, z_m) = P_0(z_{i_1}, \dots, z_{i_t})P_1(z_1, \dots, z_m), \\ P_0 = P_0(z_{i_1}, \dots, z_{i_t}) \in \mathbb{A}[z_{i_1}, \dots, z_{i_t}], \quad P_0(f_{i_1}(\xi), \dots, f_{i_t}(\xi)) = 0,$$

где P_0 – неприводимый многочлен, а $P_1(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{A}[z_1, \dots, z_m]$.

Применение теорем 1 и 2 к конкретным функциям, вообще говоря, затруднительно, так как в них утверждается только существование многочлена P с указанными свойствами, но не указывается метод его нахождения. Поэтому представляет интерес устанавливать достаточные условия для доказательства линейной и алгебраической независимости значений функций (1), которые было бы возможно применять к каким-либо конкретным подклассам E -функций. Наиболее простым оказывается случай, когда $l = t - 1$. В этом случае из теоремы 2 получается следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть E -функции (1) составляют решение системы (3) (системы (2)), степень трансцендентности (однородной трансцендентности) функций (1) над $\mathbb{C}(z)$ равна $t - 1$, функции (4) – любая подсовокупность функций (1), P – неприводимый многочлен (однородный многочлен) (7) такой, что выполняется условие (6), а $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$.

Тогда если в разложении многочлена $P(\xi, z_1, \dots, z_m)$ на неприводимые множители каждый такой множитель содержит хотя бы одну из переменных $z_{i_{t+1}}, \dots, z_{i_m}$, то числа (5) алгебраически (однородно алгебраически) независимы.

Аналогичное следствие получается и из теоремы 1 для линейной независимости чисел (5). При этом надо накладывать ограничения только на линейные множители многочлена P (см. [3]).

Нетрудно привести примеры приложений теоремы 3 к конкретным функциям (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. [2] Шидловский А. Б. // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №2. С. 174–185. [3] Шидловский А. Б. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. №5. С. 794–797. [4] Шидловский А. Б. // Труды МИАН. 1994. Т. 207. С. 369–376.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
15.01.1996