Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков, О нерелятивистском двумерном чисто магнитном суперсимметричном операторе Паули, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 2, 109–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:33:40

УДК 517.958+517.929.7+517.984.5

О нерелятивистском двумерном чисто магнитном суперсимметричном операторе Паули

П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков

В статье полное многообразие собственных функций основного состояния для чисто магнитного 2D-оператора Паули рассматривается как побочный продукт новой редукции, найденной авторами несколько лет назад для алгебро-геометрических обратных спектральных данных (т. е. римановых поверхностей и дивизоров). Эта редукция ассоциирована с $(2+1)$ -солитонной иерархией, содержащей 2D-аналог известной “системы Бюргера”. Эта статья содержит также изложение предыдущих работ, выполненных с 1980 г., включая первые топологические идеи в пространстве квазиимпульсов. Мы также приводим новые результаты, посвященные самосопряженным граничным задачам для оператора Паули. Нулевой 2D-уровень “неспектральных” функций Блоха–Флоке дает дискретные точки дополнительного спектра аналогично “граничным состояниям” конечнозонных 1D-потенциалов в зонах.

Библиография: 35 названий.

Ключевые слова: магнитный оператор Паули, алгебро-геометрические решения, основное состояние, уровни Ландау, краевые задачи.

DOI: 10.4213/rm9650

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	110
2. История: основные состояния, магнитно-блоховские функции. Топология типичных законов дисперсии.....	110
3. Суперсимметрия и преобразования Лапласа.....	114
4. Алгебро-геометрические скалярные операторы Шрёдингера. Проблема редукции.....	117
5. Спин 1/2. Чисто магнитная редукция.....	118
6. Случай рода нуль. Типы вещественных решений.....	120

Исследование первого и третьего авторов выполнено при поддержке РФФИ (грант № 13-01-12469-офи-м2) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-4833.2014.1). Первый автор поддержан также программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”. Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00441).

Цикл предыдущих работ авторов по данной теме можно найти на персональной странице С. П. Новикова www.mi.ras.ru/~snovikov, см. *Scientific Publications*, статьи номеров 177, 178, 179, 181, 183.

7. Решения рода 1. δ -образные члены.....	123
8. Распространение результатов на бесконечные тригонометрические ряды для $g = 0$	126
9. Краевые задачи	126
9.1. Граничные условия для операторов Паули без смешивания ком- понент	127
9.2. Граничные условия для операторов Паули со смешиванием ком- понент	128
10. Блоховские функции вне спектра как решения краевых задач	129
Список литературы	138

1. Введение

В общем случае движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле описывается полным 4D-уравнением Дирака (для спина $1/2$). Паули вывел красивую нерелятивистскую аппроксимацию L^P этого оператора (см. [1; § 33]). Мы рассмотрим специальный 2D-случай, когда электрическое поле равно нулю, в котором раскрывается замечательная внутренняя симметрия этого оператора. Теория основных состояний для него началась в 1979–1880 гг. В настоящей работе мы описываем ее объединение с алгебро-геометрической спектральной теорией для одного уровня энергии периодического скалярного оператора Шрёдингера и соответствующей теорией солитонных нелинейных систем. Ключевую роль здесь играет двумерный аналог иерархии Бюргерса. Члены типа Ааронова–Бома в магнитном поле вида “квантованной” дельта-функции играют важную роль в нашей конструкции. Эта статья развивает результаты, опубликованные в [2]–[6]. Мы обращаем особое внимание на самосопряженные граничные условия, позволяющие выявить роль блоховских функций с неунитарными мультипликаторами и другими сингулярностями в теории квантовых состояний для областей с границей. Нами найдены обширные многообразия таких решений. Подобные идеи были известны для $D = 1$ с 1974 г. в теории конечнозонных операторов Шрёдингера, где нули блоховских функций вели к интерпретации этих функций как “приграничных состояний”, но при $D > 1$ аналогичная интерпретация никогда не обсуждалась. **Какие самосопряженные граничные условия кроме условий Дирихле реализуются в квантовой механике реальных систем?** Мы не знаем ответа на этот вопрос.

2. История: основные состояния, магнитно-блоховские функции. Топология типичных законов дисперсии

В 1979–1980 гг. три группы авторов изучали основной уровень, используя “свойство факторизации” чисто магнитного 2D-оператора Паули, записанного в лоренцевой калибровке $A_{1x} + A_{2y} = 0$, где $A_1 = i\Phi_y$, $A_2 = -i\Phi_x$:

- Аврон–Зайлер (АЗ) [7];
- Ааронов–Кашер (АК) [8];
- Дубровин–Новиков (ДН) [9], [10].

Оператор Паули является двухкомпонентным оператором второго порядка шрёдингерского типа. Мы используем специальную систему единиц такую, что

$$L^P = L^+ \oplus L^-, \quad -L^\pm = (\partial_x + i\Phi_y)^2 + (\partial_y - i\Phi_x)^2 \pm \Delta\Phi.$$

Оператор действует на пространстве вектор-функций $\Psi = (\Psi^+, \Psi^-)$.

Мы предполагаем, что заряд равен 1. Следующее формальное наблюдение является очень важным.

ЛЕММА 1. Пусть $Q = \partial_z - A_z$, $Q^+ = -(\partial_{\bar{z}} + A_{\bar{z}})$, где $\partial_z = \partial = \partial_x - i\partial_y$, $A_z = A_1 - iA_2$. Скалярные операторы $L^\pm$ раскладываются на множители: $L^+ = QQ^+$, $L^- = Q^+Q$, и для магнитного поля имеется формула $B = \Delta\Phi$.

Доказательство заключается в прямой подстановке.

Наиболее интересными классами магнитных полей являются [АК](#) и [ДН](#). Были получены следующие результаты (их доказательство приведено в теореме 1 ниже).

1. [АК](#): быстро убывающие поля,

$$|[B]| = \left| \iint_{\mathbb{R}^2} B \, dx \, dy \right| < \infty.$$

Основные состояния образуют конечномерное пространство размерности $m \in \mathbb{Z}$, $m \leq [B]/(2\pi) < m + 1$.

2. [ДН](#): произвольные периодические поля с целым потоком через элементарную ячейку:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\text{cell}} B \, dx \, dy = m \in \mathbb{Z}.$$

Основные состояния порождают бесконечномерное подпространство в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, изоморфное уровню Ландау. Так называемые “магнитно-блеховские состояния”, собственные для так называемых “магнитных трансляций” (см. лемму 2), образуют многообразие, изоморфное полному пространству векторного расслоения над двумерным тором магнитных квазиимпульсов (см. (2), (3)). Проекция на базу в точности совпадает с так называемым “магнитным квазиимпульсом”. Первый класс Черна этого расслоения равен базисному классу когомологий в группе $H^2(T^2, \mathbb{Z})$, слой изоморфен $\mathbb{C}^m$. Мы приведем соответствующие формулы в конце раздела 2.

Опыт работы в дифференциальной топологии после Х. Уитни, Л. С. Понтрягина и Р. Тома привел С. П. Новикова около 1980 г. к идее изучать “общие” операторы, удовлетворяющие требованиям трансверсальности для спектра, чтобы определить их топологические инварианты. Дело в том, что отнюдь не случайные классы операторов Шрёдингера, возникающие в квантовой теории частиц и кристаллов, являются периодическими или быстроубывающими. Физические спектры характеризуются не абстрактными множествами и мерами, а гладкими или комплексными многообразиями, для которых естественна идеология дифференциальной топологии. Это позволило выявить топологические инварианты операторов в пространстве квазиимпульсов (квазиомоментов). В частности, в 1980–1981 гг. С. П. Новиковым и А. С. Лысковой (см. [11]–[14]) были

открыты и изучены числа Черна трансверсальных законов дисперсии, каждый из которых представляет собой комплексное одномерное векторное расслоение над тором T^2 в случае общего положения в двумерной задаче. Дело в том, что оператор Шрёдингера в периодических полях (магнитное поле должно иметь целочисленный поток сквозь элементарную ячейку) представляет собой семейство комплексных эрмитовых эллиптических операторов над тором в случае общего положения, где спектр дискретен и никогда не является кратным в двумерном случае общего положения, так как условие кратности имеет коразмерность 3 среди комплексных эрмитовых операторов. Это обстоятельство было предметом дискуссии Дж. фон Неймана и Ю. Вигнера еще в 1930-х годах, но топологические следствия впервые обсуждались С. П. Новиковым около 1980 г. Тем самым, каждая мода определяет векторное 1-расслоение над тором. Было установлено, что первый класс Черна может быть любым. Этот результат легко следует из теории возмущений однородного магнитного поля с потоком сквозь элементарную ячейку, равным $m > 1$. Совокупность магнитно-блоховских функций одного уровня Ландау образует векторное расслоение с классом Черна $c_1 \in H^2(T^2, \mathbb{Z})$, базисным в этой группе. После возмущения это расслоение распадается на m одномерных расслоений с классами Черна c_1^j , где $\sum_j c_1^j = c_1$. А. С. Лыскова показала, что в остальном слагаемые

произвольны и любая топологическая возможность реализуется. В типичных однопараметрических семействах двумерных операторов Шрёдингера возникают изолированные точки, где законы дисперсии сталкиваются и один передает другому единицу класса Черна. Несколькими годами позже эти идеи были переоткрыты физиками группы Д. Таулеса (D. Thouless) в процессе поиска объяснения известного “целочисленного квантового эффекта Холла”, открытого экспериментально в то время [15], [16].

ТЕОРЕМА 1. *В случаях АК и ДН все основные состояния являются инстантонами принадлежащими только одному спиновому сектору. Это означает следующее.*

(а) *Они удовлетворяют уравнениям первого порядка: $Q^+\psi = 0$ в секторе L^+ в случае $[B] > 0$ и $Q\psi = 0$ в секторе L^- в случае $[B] < 0$. Это является простым прототипом уравнения автодуальности.*

(б) *Они принадлежат гильбертову пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Случай АК. Пусть Ψ является нулевой модой для оператора $L^+\Psi = 0$ и $\Psi \in L_2$. Стандартный “инстантонный аргумент” для основного состояния таков: $0 = \langle QQ^+\Psi, \Psi \rangle = \langle Q^+\Psi, Q^+\Psi \rangle$. Таким образом, $Q^+\Psi = 0$. Каждое решение $\Psi \in L_2$ этого уравнения, интегрируемое с квадратом, определяет нулевую моду оператора L^+ , и обратно. Таким образом, наш результат будет вытекать из существования решений из пространства Гильберта $L_2(\mathbb{R}^2)$. Пусть $0 < [B] < \infty$, $m \leq [B]/(2\pi) < m + 1$. Мы ищем Ψ в виде произведения двух сомножителей:

$$\Psi_l = P_l(z) \exp\{-R(x, y)\},$$

где P_l , $l = 0, \dots, m$, есть произвольный голоморфный полином, а $R(x, y)$ есть специальное решение уравнения $\Delta R = B$ при $[B] > 0$:

$$R(x, y) = -\frac{1}{4\pi i} \iint_{\mathbb{R}^2} \ln |z - w| dw \wedge d\bar{w}.$$

Рост R очевидно зависит от величины магнитного потока $[B]$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\Psi_l|^2 dx \wedge dy < \infty$$

при $l = 0, \dots, m - 1$. Таким образом, мы нашли все основные состояния в случае [АК](#). Во втором секторе L^- не существует квадратично интегрируемых решений.

2. Случай [ДН](#). Решения здесь также могут быть найдены только в одном спиновом секторе. Как и выше, мы предполагаем, что магнитный поток через элементарную ячейку является положительным целым числом $m \in \mathbb{Z}_+$. Мы рассмотрим прямоугольную решетку с периодами $2\omega \in \mathbb{R}$, $2i\omega' \in i\mathbb{R}$. Определим R формулой

$$R = -\frac{1}{4\pi i} \iint_K \ln(|\sigma(z - w)|) B(w, \bar{w}) dw \wedge d\bar{w},$$

где $\Delta R = B$, K – элементарная ячейка. Мы ищем решения, представимые в виде

$$Q^+ \Psi = 0, \quad \Psi = \exp\{-R(x, y)\} \left[e^{az} \prod_{j=1, \dots, m} \sigma(z - a_j) \right] \lambda, \quad (1)$$

где $\lambda \neq 0$ – произвольное число.

ЛЕММА 2. Решения, представимые в виде (1), являются магнитно-блеховскими функциями, т.е. собственными векторами магнитных трансляций T_j^* , $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} T_1^* \Psi(x, y) &= \Psi(x + 2\omega, y) e^{-if_1(x, y)} = \varkappa_1 \Psi(x, y), \\ T_2^* \Psi(x, y) &= \Psi(x, y + 2\omega') e^{-if_2(x, y)} = \varkappa_2 \Psi(x, y). \end{aligned}$$

Вектор-потенциал, как и выше, выбран в лоренцевой калибровке $A = (i\Phi_y, -i\Phi_x)$ для $B = \Delta\Phi$ и $\Phi = -R$. По определению

$$\begin{aligned} A(x + 2\omega, y) &= A(x, y) + i(f_{1x}, f_{1y}), \\ A(x, y + 2\omega') &= A(x, y) + i(f_{2x}, f_{2y}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем стандартные свойства преобразований

$$\sigma(w + 2\omega) = -e^{-2\eta(w+\omega)} \sigma(w), \quad \sigma(w + 2i\omega') = -e^{-2i\eta'(w+i\omega')} \sigma(w),$$

где $\zeta(w) = \sigma_w / \sigma$, $\eta = \zeta(\omega)$, $i\eta' = \zeta(i\omega')$ для прямоугольной решетки.

Наша теорема немедленно вытекает из этих свойств.

После вычислений мы приходим к следующей формуле для параметров, отвечающих унитарным мультипликаторам $|\varkappa_1| = |\varkappa_2| = 1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\eta_1}{\omega} \left[2 \sum_j a_j - \frac{1}{\pi} \iint_K z B(x, y) dx dy \right] \right\}, \\ \operatorname{Im} a &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{\eta'}{\omega'} \left[2 \sum_j a_j - \frac{1}{\pi} \iint_K z B(x, y) dx dy \right] \right\}. \end{aligned}$$

По определению компонент квазиимпульсов p_1, p_2 имеем:

$$e^{2ip_1\omega} = \varkappa_1, \quad e^{2ip_2\omega'} = \varkappa_2.$$

Они имеют следующий вид, вытекающий из формул для магнитно-блоховских функций:

$$p_1 + \frac{m\pi}{2\omega} = \operatorname{Im} \left(a - \frac{\eta}{\omega} \sum_j a_j \right), \quad (2)$$

$$p_2 + \frac{m\pi}{2\omega'} = \operatorname{Re} \left(a - \frac{\eta'}{\omega'} \sum_j a_j \right). \quad (3)$$

Отображение квазиимпульсов корректно определено на пространстве параметров, описывающих состояния с унитарными мультипликаторами. Оно выглядит следующим образом:

$$p_1 + ip_2 = p(a_1, \dots, a_m) = -\frac{2\pi i}{|K|} \sum_j a_j + \text{const},$$

где $|K| = 4\omega\omega'$ – площадь элементарной ячейки K . Образом является тор T^2 , слоем является комплексное пространство $\mathbb{C}^m$.

Элементарные аргументы из [9], [10] показывают, что эти семейства описывают все собственные состояния оператора L^P в окрестности основного уровня $\epsilon = 0$. Это следует из свойств эллиптического оператора L^P с фиксированными унитарными мультипликаторами. Его ядро является в точности m -мерным, так как индекс оператора $Q^+ : \Psi^+ \rightarrow \Psi^-$ равен m и сопряженный оператор $Q : \Psi^- \rightarrow \Psi^+$ не имеет ядра. Сингулярности не появляются в этом семействе ни для каких точек тора квазиимоментов (т.е. ни для каких унитарных мультипликаторов). Таким образом, мы заключаем, что существует конечный ненулевой интервал Δ , отделяющий нулевой уровень от всех других уровней оператора L^P .

3. Суперсимметрия и преобразования Лапласа

Оператор $S = Q^+ : \Psi^+ \rightarrow \Psi^-$, $S(\Psi^-) = 0$ называется **суперсимметрией** для L^P . Здесь $S^2 = 0$, $SL^P = L^PS$, $S^*L^P = L^PS^*$. “Сопряженным” оператором суперсимметрии является $S^* = Q : \Psi^- \rightarrow \Psi^+$, $S^*(\Psi^+) = 0$. Имеем $SS^* + S^*S = L^P$.

Последнее равенство влечет, что все высшие уровни являются двукратно вырожденными (основной уровень является бесконечно вырожденным). Оператор суперсимметрии обсуждался в физической литературе 1980-х годов (см., например, [17]).

На самом деле мы встречаемся здесь с частным случаем так называемого преобразования Лапласа, которое было известно с XVIII в. для скалярных 2D-операторов Шрёдингера. Каждый гиперболический оператор второго порядка $L = \partial_x \partial_y + A \partial_x + B \partial_y + V$ может быть представлен в виде

$$L = (\partial_x + B)(\partial_y + A) + W = QQ' + W.$$

Определим

$$L \rightarrow \tilde{L} = WQ'W^{-1}Q + W, \quad \Psi \rightarrow \tilde{\Psi} = Q'\Psi.$$

Можно показать, что из $L\Psi = 0$ следует $\tilde{L}\tilde{\Psi} = 0$ и

$$\tilde{L} = \left(\partial_y + A - \frac{W_y}{W} \right) (\partial_x + B) + W = (\partial_x + B) \left(\partial_y + A - \frac{W_y}{W} \right) + \tilde{W},$$

где $\tilde{W} = W - A_x + B_y + (\ln W)_{xy}$.

Мы будем иметь дело с эллиптическим случаем, который важен для применений в квантовой механике. Заменим ∂_x на $\partial = \partial_z$ и ∂_y на $\bar{\partial}$. Таким образом,

$$L = QQ^+ + W \rightarrow \tilde{L} = WQ^+W^{-1}Q + W \quad \text{и} \quad \Psi \rightarrow Q^+\Psi = \tilde{\Psi},$$

где $Q = \partial + A$, $Q^+ = -\bar{\partial} + \bar{A}$. Для специального случая факторизуемых операторов $W = \text{const}$ это преобразование действует на всем спектре оператора L . Физики отождествляют это с “суперсимметрией” для оператора Паули: $L\Psi = \epsilon\Psi$ влечет $\tilde{L}\tilde{\Psi} = \epsilon\tilde{\Psi}$ для $\tilde{\Psi} = Q^+\Psi$.

Калибровочными инвариантами оператора $L = QQ^+ + W$ являются магнитное поле $2B = A_{\bar{z}} - \bar{A}_z$ и потенциал $W = e^f$. Удобно выписывать преобразование Лапласа только в терминах инвариантов:

$$\tilde{W} = W + \tilde{B}, \quad \tilde{B} = B + \frac{1}{2}\Delta \ln W.$$

Было замечено, что вся бесконечная цепочка преобразований Лапласа

$$W_n = e^{f_n} = \tilde{W}_{n-1}, \quad B_n = \tilde{B}_{n-1}$$

эквивалентна “2D-цепочке Тоды”. Это наблюдение (конечно, в гиперболическом случае) восходит к XIX в. Оно было сделано в школе Дарбу (см. [18]). Эта школа начала также рассматривать циклические цепочки преобразований Лапласа и указала, что они ведут к нескольким вполне интегрируемым системам включая $\sin$ -Гордон. Эти работы содержат только формальные вычисления, посвященные гиперболическому случаю (см. исторические обсуждения в [19]). Мы можем исключить магнитное поле из соотношения $W_{n+1} - W_n = B_{n+1}$. Это приводит к уравнению

$$\frac{1}{2}\Delta f_n = e^{f_{n+1}} - 2e^{f_n} + e^{f_{n-1}}.$$

Подстановка $f_n = g_n - g_{n-1}$ приводит это уравнение к двумерной цепочке Toda. В работе С. П. Новикова и А. П. Веселова (1997, [19]) циклические цепочки были рассмотрены в эллиптическом случае, где глобальные ограничения играют фундаментальную роль: для гладких эллиптических двоякопериодических операторов в [19] было доказано, что соответствующие операторы Шрёдингера L всегда являются алгебро-геометрическими, т. е. множество гладких комплексных решений Блоха–Флоке уравнения $L\Psi = 0$ образует алгебраическую кривую (т. е. риманову поверхность конечного рода).

Доказательство этой теоремы основывается на том, что решения циклической цепочки удовлетворяют эллиптическому уравнению в частных производных. Несингулярные периодические решения, тем самым, образуют конечномерные многообразия. В полной аналогии с аргументами работ С. П. Новикова и Б. А. Дубровина 1974–1975 гг. [20], отсюда сразу следует, что эти решения алгебро-геометрические, так как циклическая цепочка – это вполне интегрируемая система в смысле современной теории (представление Лакса и т. д.). Высшие потоки линейно зависимы на конечномерном многообразии. Это и приводит к конечнозонности (алгебро-геометричности) решений. Подобный аргумент, по-видимому, впервые был замечен Н. Хитчиным [21] для гармонических торов в $\mathbb{R}^3$ и использован У. Пинкалем и И. Стерлингом при изучении поверхностей постоянной средней кривизны торической топологии в $\mathbb{R}^3$ (см. обзор А. И. Бобенко [22]).

Впрочем, эта теория содержит только топологически тривиальные операторы с двоякопериодическими коэффициентами и нулевым потоком магнитного поля через элементарную ячейку. Для того чтобы включить топологически нетривиальные операторы, в [19] был рассмотрен другой тип цепочек преобразований Лапласа. Пусть $L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow \dots \rightarrow L_n$ – цепочка преобразований Лапласа такая, что крайние операторы L_0, L_n раскладываются на множители с точностью до константы:

$$\begin{aligned} L_n &= C_n + Q_n Q_n^+, & L_0 &= Q_0 Q_0^+, \\ C_n &= n[B_0], & [B_0] &= 2\pi m > 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

где $[B]$ – поток магнитного поля B сквозь элементарную ячейку решетки. Основным уровнем является здесь многократно вырожденным для гладкого двоякопериодического магнитного поля B_0 . При $n = 2$ были найдены нетривиальные случаи такие, что поле B_n также гладко. Поэтому один высший уровень энергии $\epsilon = n[B_0]$ (происходящий из основного уровня для оператора $Q_n Q_n^+$, переброшенного с помощью цепочки Лапласа к оператору L_0) также бесконечно вырожден. Для доказательства бесконечной кратности вырождения достаточно найти гладкие двоякопериодические решения уравнения

$$\frac{1}{4}\Delta u = -e^u + [B_0], \quad e^u = W_0 = B_0.$$

Таких решений существует много. Для длин цепочки более двух ($n > 2$) мы нетривиальных решений не знаем.

Согласно нашей гипотезе, не более двух уровней могут быть бесконечнократно вырождены, исключая случай оператора Ландау в однородном магнитном поле, и один из них, скорее всего, основной.

4. Алгебро-геометрические скалярные операторы Шрёдингера. Проблема редукции

Вопрос: связана ли теория основного состояния чисто магнитного оператора Паули с алгебро-геометрической теорией скалярного периодического 2D-оператора Шрёдингера на одном уровне энергии и солитонными 2D-иерархиями?

Напомним историю этого объекта.

Алгебро-геометрическая теория скалярных 2D-операторов Шрёдингера на одном уровне энергии и соответствующих солитонных иерархий была начата в 1976 г. С. В. Манаковым [23] и Б. А. Дубровиным, И. М. Кричевером, С. П. Новиковым [24].

Магнитное поле всегда топологически тривиально в этой теории (т. е. коэффициенты вектор-потенциалов двоякопериодичны).

Идея использования системы

$$\frac{dL}{dt} = (LH - HL) + fL$$

вместо обыкновенной пары Лакса была предложена в [23]. Нетривиальный пример с операторами L , H порядка 2 демонстрировал, что новый подход содержателен. В течение долгого времени эта специфическая система не исследовалась. При решении обратной задачи для L на одном уровне энергии в [24] была введена “двухточечная скалярная функция Бейкера–Ахиезера”. Это позволило построить всю иерархию высших систем, ассоциированную с первоначальной. В частности, вся иерархия совершенно отлична от случая Кадомцева–Петвиашвили: она зависит от двух бесконечных множеств времен t'_j , t''_j , отвечающих двум “бесконечным” точкам. Риманова поверхность здесь является семейством всех несингулярных комплексных функций Блоха–Флоке на одном выбранном уровне энергии $L\psi = 0$ (“**комплексная кривая Ферми**”). В алгебро-геометрическом случае она имеет конечный род. На этой алгебраической кривой Ферми выбраны две “бесконечные” точки и локальные параметры в них. Следует задать также дивизор полюсов D степени, равной роду. Этот набор данных определяет и блоховскую функцию, и оператор L (вообще говоря, комплексный), и всю иерархию нелинейных систем, с ним связанных (его деформаций с помощью троек Манакова – см. выше).

Некоторые редукции в этих уравнениях (т. е. динамически инвариантные подсистемы или подиерархии) активно изучались в 1980-х годах. Несколько авторов нашли такие редукции либо для нелинейных систем, либо для обратных спектральных данных (или данных рассеяния), либо в обоих случаях. Решение этой задачи для обратных спектральных данных более трудно: в частности, оно влечет описание всех редуцированных иерархий. Впрочем, практически существование редукций обнаружить гораздо проще для уравнения, чем для данных обратной задачи.

Наша главная цель здесь – квантовая механика и спектральная теория. Мы используем нелинейные системы в качестве инструмента для этой цели.

В первой работе [24] 1976 г. ее авторы нашли только чисто вещественные редукции спектральных данных.

1. Данные, отвечающие периодическим самосопряженным операторам, были найдены И. В. Чередником в 1980 г. [25].

2. Данные, отвечающие операторам $L = -\Delta + U(x, y)$ (с нулевым магнитным полем), были найдены в 1984 г. (см. [26]–[29]). Необходимость условий Новикова–Веселова пока не доказана строго, хотя это несомненно верно.

Расширение этих результатов на быстро убывающие потенциалы было исследовано в работах С. В. Манакова, П. Г. Гриневича, Р. Г. Новикова и С. П. Новикова в конце 1980-х годов (см. [30]–[32]). И. М. Кричевер в [33] доказал, что каждый гладкий периодический 2D-потенциал может быть аппроксимирован алгебро-геометрическими операторами.

5. Спин 1/2. Чисто магнитная редукция

Как найти алгебро-геометрические данные для редукции, приводящей к факторизуемым операторам? Эта задача недавно была решена авторами (см. [2]–[6]).

Решение задачи редукции. Рассмотрим первоначальную систему Манакова $L_t = [H, L] + fL$, где оба оператора L , H являются операторами второго порядка:

$$L = \partial_x \partial_y + G \partial_y + S, \quad H = \Delta + F \partial_y + A.$$

Получившаяся система имеет вид

$$\begin{aligned} G_t &= G_{xx} - G_{yy} + \left(\frac{F^2}{4} \right)_x - (G^2)_x - A_x + 2S_y, \\ S_t &= S_{yy} - S_{xx} - 2(GS)_x + (FS)_y \end{aligned}$$

с дифференциальными ограничениями

$$F_x = 2G_y, \quad A_y = 2S_x, \quad f = 2G_x - F_y.$$

Б. Г. Конопельченко уже указывал в 1988 г. (см. [34]), что редукция $S = 0$ является динамически инвариантной для этой системы. Она выглядит как 2D-аналог знаменитой системы Бюргерса.

Мы верим в следующий **неформальный принцип**: каждая динамически инвариантная редукция вполне интегрируемой солитонной системы может быть эффективно описана в терминах (спектральных) данных рассеяния и римановых поверхностей.

Как описать эту специфическую редукцию для обратных спектральных данных? Это возможно? Делая замену $x, y \rightarrow z, \bar{z}$, мы приходим к наиболее интересным для нас эллиптическим операторам.

Наш недавний результат [2]–[6] описывает соответствующую обратную задачу для оператора L с $S = 0$. Возьмем приводимую риманову поверхность (комплексную кривую Ферми), состоящую из двух несингулярных компонент $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ родов g' , g'' . Компоненты пересекают друг друга по $P_j = Q_j$, $P_j \in \Gamma''$, $Q_j \in \Gamma'$, $j = 0, 1, \dots, l$ (см. рис. 1 для самосопряженного эллиптического случая, где $g' = g''$). Возьмем бесконечности $\infty_1 \in \Gamma'$, $\infty_2 \in \Gamma''$ с локальными параметрами $(k')^{-1}$, $(k'')^{-1}$. Построим функцию $\psi = (\psi', \psi'')$ с асимптотикой $\psi' \sim c(x, y)e^{k'\bar{z}}(1 + O((k')^{-1}))$, $\psi'' = e^{k''z}(1 + O((k'')^{-1}))$ и дивизоры полюсов D' , D'' степеней $g' + l$, g'' , не содержащие бесконечностей и точек

пересечения. В гиперболическом случае возьмем переменные x, y вместо $z, \bar{z}$. Временная динамика может быть добавлена стандартным образом:

$$\begin{aligned}\psi' &= \exp \left\{ k' \bar{z} + \sum_{s>1} (k')^s t'_s \right\} (c + O((k')^{-1})), \\ \psi'' &= \exp \left\{ k'' z + \sum_{s>1} (k'')^s t''_s \right\} (1 + O((k'')^{-1})).\end{aligned}$$

Условие пересечения имеет вид

$$\psi'(Q_j) = \psi''(P_j), \quad j = 0, 1, \dots, l.$$

ТЕОРЕМА 2. *Такие данные задают двухточечную функцию Бейкера–Ахиезера $\psi = (\psi', \psi'')$ на приводимой поверхности $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ и скалярный оператор $L' = \Delta + G \partial_{\bar{z}}$ такой, что $S = 0$ и $L'\psi' = L'\psi'' = 0$.*

Данные для самосопряженных операторов. Для выделения самосопряженных операторов необходимо обеспечить выполнение равенства $g' = g''$, а также добавить вырожденное ограничение типа Чередника. Можно сказать, что это ограничение является просто пределом условия Чередника для вырожденной римановой поверхности $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$. Возьмем бесконечные точки $\infty' \in \Gamma'$ с локальным параметром $(k')^{-1}$ и $\infty'' \in \Gamma''$ с локальным параметром $(k'')^{-1}$. Антиголоморфное отображение $\tau: \Gamma'' \rightarrow \Gamma'$ должно быть задано так, что $\tau(\infty'') = \infty'$, $\tau^*(k') = \bar{k}''$ и τ переставляет точки пересечения: $\tau(P_j) = Q_{k_j}$. Обратное отображение $\Gamma' \rightarrow \Gamma''$ мы также обозначим через τ , таким образом, $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\tau^2 = 1$. Дивизор полюсов $D' \in \Gamma'$ и $D'' \in \Gamma''$ степеней $|D'| = g' + l$ и $|D''| = g''$, где $g' = g''$, не содержит точек пересечения и бесконечностей. Дивизором полюсов на приводимой римановой поверхности Γ является $D = D' \cup D''$. Мы, как обычно, предполагаем, что существует мероморфная 1-форма Ω с простыми полюсами в точках дивизоров D , $\tau(D)$ и в бесконечных точках ∞_1, ∞_2 . Дивизор (K) состоит из нулей голоморфной 1-формы, символ “ $\sim$ ” обозначает “линейную эквивалентность” дивизоров:

$$D + \tau(D) \sim (K) + \infty' + \infty''.$$

Теперь пусть наша поверхность будет вырождена. 1-форма Ω также становится вырожденной. Ее вырождение состоит из двух мероморфных 1-форм ω', ω'' на римановых поверхностях Γ', Γ'' с простыми полюсами в точках пересечения $P_j \rightarrow \tau(Q_j)$ таких, что $\text{res}_{P_j} \omega'' + \text{res}_{Q_j} \omega' = 0$. Их дивизоры должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned}(\omega') &= D' + \tau(D'') - \infty' + \sum_j Q_j, \\ (\omega'') &= D'' + \tau(D') - \infty'' + \sum_j P_j.\end{aligned}$$

После неунитарного калибровочного преобразования

$$L' \rightarrow L = \frac{1}{\sqrt{c}} L' \sqrt{c}, \quad \psi \rightarrow \frac{\psi}{\sqrt{c}}$$

в Γ' , Γ'' мы получаем самосопряженный оператор

$$L = QQ^+ = (\partial - A)(-\bar{\partial} - \bar{A}), \quad A = \frac{1}{2} \bar{\partial} \ln c.$$

Беря $L^+ = L$ и $L^- = Q^+Q$, мы построим чисто магнитный оператор Паули

$$L^P = QQ^+ \oplus Q^+Q.$$

Магнитное поле задается формулой

$$B = \frac{1}{2} \Delta \ln c, \quad (4)$$

оно вещественно, периодически или квазипериодично и **топологически тривиально**. Оно несингулярно, если $c \neq 0$, таким образом, в этом случае оператор самосопряжен.

Как найти основные состояния в гильбертовом пространстве? Это очень просто в периодическом несингулярном случае $c \neq 0$. Возьмем $\psi_0 = c^{1/2}$ в первом спиновом секторе L^+ , пользуясь тем, что $Q^+\psi_0 = 0$. Возьмем $\phi_0 = c^{-1/2}$ во втором секторе L^- , пользуясь тем, что $Q\phi_0 = 0$. **В случае периодического гладкого вещественного $c \neq 0$ мы имеем в точности две периодические функции основного состояния, сосредоточенные в обоих секторах. Они отвечают дну непрерывного спектра возле основного состояния $\epsilon = 0$.** В разделах 6–8 мы дадим полное описание всех несингулярных блоховских функций основного состояния. Их связь с магнитно-блоховскими функциями, найденная в [9] в 1980 г. для топологически нетривиального магнитного поля, будет обсуждаться в разделе 7.

6. Случай рода нуля. Типы вещественных решений

Опишем данные для рода нуля (см. рис. 1).

Рис. 1

Возьмем $l + 1$ точку пересечения с координатами $k' = k_s$, $k'' = p_s$ в Γ' , Γ'' и дивизор $D' = (a_1, \dots, a_l)$ степени l в Γ' . Эти алгебро-геометрические данные определяют функцию Бейкера–Ахиезера. Имеем

$$\Psi' = e^{k'\bar{z}} \frac{w_0(k')^l + \dots + w_l}{(k' - a_1) \dots (k' - a_l)}, \quad \Psi'|_{k'=k_s} = e^{p_s z}.$$

Как можно видеть, $c = w_0$. Таким образом,

$$c = \sum_{s=0}^l \kappa_s e^{W_s(z, \bar{z})}, \quad (5)$$

где $W_s = p_s z - k_s \bar{z}$ (см. [3]). В [3] доказана следующая важная теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Для каждого экспоненциального/тригонометрического полинома с указанного выше вида с произвольным множеством линейных форм W_s и комплексных коэффициентов κ_s существуют алгебро-геометрические данные, отвечающие этой функции c .*

Пусть $W_s = \alpha_s x + \beta_s y$, $(\alpha_s, \beta_s) \in \mathbb{C}_W^2$. Преобразование $c \rightarrow c' = ce^{\gamma + \alpha x + \beta y}$ приводит к калибровочно эквивалентному оператору (с тем же магнитным полем).

Существуют следующие три типа вещественных решений.

1. Чисто экспоненциальный положительный случай (“поле лампового типа”) $\kappa_s > 0$, $(\alpha_s, \beta_s) \in \mathbb{R}^2$.
2. Вещественный периодический тригонометрический случай. Он будет рассмотрен ниже вместе со случаем $g = 1$.
3. Смешанный экспоненциальный/тригонометрический случай. Он может быть реализован, только если его “доминирующая часть” принадлежит случаю 1. Мы не будем обсуждать его.

Рассмотрим случай 1. Пусть “тропическая сумма” форм в множестве $\{W\}$ является неотрицательной:

$$I'_{\{W\}}(\phi) = \max_s (\alpha_s \cos \phi + \beta_s \sin \phi) \geq 0.$$

Тогда $c^{-1/2}$ ограничена в $\mathbb{R}^2$. Для углов $I'_{\{W\}}(\phi) > 0$ мы имеем быстрое убывание $c^{-1/2} \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$. Пусть $I(\phi) = \max\{I'(\phi), 0\}$ (см. рис. 2а).

В каждом классе $c' \in ce^W$, $W' \in \mathbb{R}_{W'}^2$ множество представителей c' с неотрицательным $I = I'_{\{W'\}}(\phi) \geq 0$ образует выпуклый многоугольник $\bar{T}_c$. Его внутренность $T_c \subset \bar{T}_c$ состоит из всех c' таких, что $I_{\{W'\}} > 0$. Открытая часть T_c всегда непуста при $l > 2$. Множество $\bar{T}_c$ непусто при $l > 1$ (см. рис. 2б при $l = 3$).

Магнитное поле является убывающим при $R \rightarrow \infty$ исключая некоторые выбранные углы, это аналоги ламповых полей для “ламповых потенциалов” Кадомцева–Петвиашвили. Линейный характер суммы (5) в (4) отражает линеаризацию иерархии Бюргерса в терминах переменной c . Мы имеем

$$[B] = \iint_{D_R^2} B \, dx \, dy = -\frac{R}{2} \oint_{S^1} I_{\{W\}}(\phi) \, d\phi + O(R^{-1}).$$

Рис. 2а. $I(\phi)$ для $c = e^y + e^{y-2x} + e^{-y-2x}$ Рис. 2б. Множество T_c для $c = e^y + e^x + e^{-y-x}$.
Здесь $\mathbb{R}^2 = (\alpha, \beta)$, $W_j = \alpha_j x + \beta_j y$.

Все точки в T_c определяют основные состояния в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Граничные точки определяют дно непрерывного спектра. Интеграл квадрата собственных функций $(c')^{-1/2}$ конечен для c , лежащих строго внутри множества

$$T_c: \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{c} < \infty.$$

Это легко проверить, например, для рассмотренного выше случая $c = e^y + e^x + e^{-y-x}$, где интеграл легко исследуется.

Периодическая задача. Пусть решетка в $\mathbb{R}^2$ прямоугольна и $z = x + iy$. Для каждой вещественной периодической функции c мы можем определить целое семейство “возможных” мероморфных блоховских функций

$$\psi''_{\text{ext}, \pm} = f(z)(\sqrt{c})^{\pm} e^{uz - \zeta(p)z} \frac{\sigma(z + p + R)}{\sigma(z + R)},$$

где $f(z)$ – произвольная эллиптическая функция.

Имеем $Q^+ \psi''_{\text{ext}, -} = 0$ для $L = L^+ = QQ^+$. Для антиголоморфных функций мы получаем $Q \psi''_{\text{ext}, +} = 0$ при $L^- = Q^+Q$.

Пусть $c \neq 0$. Нам нужны только несингулярные функции, таким образом, нашим многообразием является $u \in \mathbb{C}P^1 = \Gamma''$ с функцией $\psi''_+ = e^{uz} \sqrt{c}$ (или $e^{u\bar{z}} \sqrt{c}$).

Пусть c имеет изотропный нуль. Мы имеем большее семейство несингулярных (или “слабо сингулярных”) ψ''_+ -блоховских функций, так как функция $\sqrt{c}/\sigma(z+R)$ слабо сингулярна и блоховская функция может входить в спектр. Таким образом, всем многообразием является $M^2 = \mathbb{C}P^1 \times \Gamma$, где Γ – эллиптическая кривая. Если c есть тригонометрический полином, то $1/c$ – не тригонометрический полином. Мы имеем пару функций: c для L^+ и $c' = 1/c$ для L^- . Таким образом, мы должны найти ψ' для всех гладких вещественных периодических функций c' . Это будет сделано ниже, после разбора рода 1.

7. Решения рода 1. δ -образные члены (рис. 3)

Рис. 3

Возьмем эллиптическую кривую $\Gamma' = \Gamma'' = \mathbb{C}/\Lambda$ с евклидовыми локальными параметрами k, p (точка 0 является “бесконечностью”), имеющую периоды $2\omega \in \mathbb{R}$, $2i\omega' \in i\mathbb{R}$. Зададим $n+1$ точку пересечения $Q_0, \dots, Q_n \in \Gamma'$ и $R_0, \dots, R_n \in \Gamma''$. Дивизоры $D' = (P_1, \dots, P_n)$, $D'' = P$ имеют степени $n+1, 1$ соответственно. Имеем

$$\psi' = e^{-\bar{z}\zeta(k)} \frac{\prod_s \sigma(k - Q_s)}{\prod_l \sigma(k + P_l)} \left(\sum_j w_j \frac{\sigma(k + \bar{z} + \tilde{P} + \tilde{Q} - Q_j)}{\sigma(k - Q_j)} \right)$$

(здесь $\tilde{P} = P_1 + \dots + P_n$, $\tilde{Q} = Q_0 + \dots + Q_n$, сумма как в $\mathbb{C}$) и

$$\psi'' = e^{-z\zeta(p)} \frac{\sigma(p + z + P)}{\sigma(z + P)\sigma(p + P)}, \quad \psi'(Q_s) = \psi''(R_s).$$

Все сингулярности величины c исчезают после умножения

$$\tilde{c} = c\sigma(\bar{z} + \tilde{Q} + \tilde{P})\sigma(z + P).$$

Возьмем $n = 1$, $Q_1 = -Q_0$, $R_0 = Q_1$, $R_1 = Q_0$, где Q_0 есть решение уравнения $\omega\zeta(Q_0) = \eta_1 Q_0$. В этом случае имеем $P = \tilde{Q} + \tilde{P}$, т. е. $-(1/2)\Delta|\sigma|^2 = -2\pi\delta(z)$.

Таким образом, **вывод**, основанный на случае $g = 1$, является следующим: наименьшие вещественные сингулярные данные отвечают периодическому несингулярному магнитному полю $\tilde{B} = -(1/2)\Delta\tilde{c}$ с магнитным потоком, равным одной квантовой единице. Изначальное алгебро-геометрическое топологически тривиальное магнитное поле $B = (1/2)\Delta c$, полученное по нашим спектральным данным, всегда является сингулярным при $g = 1$; оно имеет нулевой магнитный поток через элементарную ячейку и квантованную δ -сингулярность на фоне несингулярного поля $\tilde{B}$, сосредоточенного в точке P . Таким образом, это поле отвечает ситуации “Ааронова–Бома”.

При $g > 1$ число квантованных δ -функций равно $k > 1$. Мы можем получить несингулярные алгебро-геометрические операторы только из рода 0. Обе компоненты приводимой римановой поверхности $\Gamma = \Gamma'' \cup \Gamma'$ представляются в виде k -листного накрытия над эллиптической кривой $\Gamma'' \rightarrow \Gamma_0$ при $g > 1$, так же как это было в работах И. М. Кричевера, посвященных эллиптическому уравнению Кадомцева–Петвиашвили (см. [35]).

Важный вывод: сопоставление с [9] показывает, что квантованный δ -поток не влияет на спектр вблизи нулевого уровня.

Комплексные многообразия Блоха–Флоке (состоящие из несингулярных или слабо сингулярных блоховских функций, допускаемых спектральной задачей) на уровне $\epsilon = 0$ и при $g = 1$ суть

$$M = M^2$$

с функцией

$$\begin{aligned}\psi''_{\text{ext},-} &= \frac{1}{\sqrt{c}} \left(e^{uz} \cdot e^{-\zeta(p)z} \frac{\sigma(z+p+R)}{\sigma(z+R)} \right), \\ L^+ \psi''_{\text{ext}} &= L^+ \psi' = 0.\end{aligned}$$

Отметим, что обе функции ψ' , ψ'' изначально сингулярны при $g = 1$. Наш следующий шаг – редуцировать оператор к самосопряженному виду. Для этого мы должны умножить обе функции ψ' , ψ'' на $1/\sqrt{c}$. Начнем с ψ'' . Функция $\psi''_{\text{ext}}\sqrt{c}$ является “несингулярной”, т. е. она достаточно слабо сингулярна, чтобы войти в $L_2(\mathbb{R}^2)$ -спектр для оператора L с квантованным членом Ааронова–Бома. После сингулярных унитарных калибровочных преобразований $L \rightarrow \tilde{L}$ все сингулярности этой функции исчезают. Таким образом, она входит в гладкий спектр оператора $\tilde{L}$ с магнитным полем $\tilde{B}$, у которого сингулярность исчезает. Теперь рассмотрим ψ' . Функция ψ'/c несингулярна, но функция $\psi'/\sqrt{c}$ является сингулярной. После сингулярного унитарного калибровочного преобразования она переходит в функцию $\tilde{\psi}'/\sqrt{c}$ с простым полюсом. Справедливо уравнение

$$\tilde{L} \left(\sqrt{\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}} \frac{\psi'}{\sqrt{c}} \right) = 0.$$

Таким образом, мы заключаем, что семейство $\tilde{\psi}'/\sqrt{c}$ магнитных блоховских функций для оператора $\tilde{L}$ с несингулярным топологически нетривиальным магнитным полем имеет полюс по переменным (x, y) .

Функция ψ'/c является несингулярной. Она удовлетворяет уравнению

$$L_0\left(\frac{\psi'}{c}\right) = 0$$

во всех несингулярных точках, где $L_0 = \partial(\bar{\partial} + \Phi_z)$. В то же время мы имеем $\Phi_z \sim 1/\bar{z}$ в окрестности сингулярности, все остальные члены являются гладкими. Таким образом, функция $f = (\bar{\partial} + \Phi_z)(\psi'/c)$, $c = e^\Phi$, является почти всюду антиголоморфной. В то же время в точке P , где имеется сингулярность, f имеет вид $f \sim m(k)/\bar{z}$. Поэтому около этой точки $\psi'/c \sim m(k) + \bar{z}O(1)$. Мы заключаем, что $L_0(\psi'/c) = m(k)\delta_P(x, y)$, так как $\partial(1/\bar{z}) = (\text{const})\delta$.

Пересмотрим теперь случай $g = 0$, сопоставляя его с $g = 1$. При $c \neq 0$ и $g = 0$ блоховское многообразие является объединением двух компонент $\Gamma'' \cup \Gamma'$, каждая из которых есть $\mathbb{CP}^1$. Пусть c имеет изолированный нуль (минимум), который является изотропным. Магнитное поле становится сингулярным с δ -особенностью. Расширенная инстантонная блоховская функция $\psi''_{\text{ext},+}$ становится слабо сингулярной и способной сохранить спектр оператора L^+ . Это зависит от точек комплексного двумерного многообразия M^2 , и все возможные значения комплексных мультипликаторов

$$M^2 \rightarrow (\varkappa_1, \varkappa_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$$

представлены в этом семействе. Закон дисперсии для энергии здесь вырожден: $\epsilon: M^2 \rightarrow 0$.

Имеем $M^2 = \mathbb{CP}^1 \times \Gamma_0$ (здесь Γ_0 – эллиптическая кривая) и

$$\psi''_{\text{ext},+} = \text{const}(u) e^{p\bar{z} - \zeta(u)\bar{z}} \frac{\sigma(\bar{z} + u)}{\sigma(\bar{z})} \sqrt{c}.$$

Ее сингулярность имеет вид $\sqrt{\sigma/\sigma}$, так как c имеет решетку двойных нулей вида $|\sigma|^2$. Сделаем сингулярное калибровочное преобразование

$$\psi''_{\text{ext},+} \rightarrow \sqrt{\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}} \psi''_{\text{ext},+}$$

(здесь σ зависит от $\bar{z}$). Эта функция преобразуется в несингулярную магнитную блоховскую функцию оператора L^P с топологически нетривиальным магнитным полем $\tilde{B}$. Магнитные блоховские мультипликаторы после преобразования становятся стандартными блоховскими мультипликаторами.

Наш вывод состоит в следующем: периодический случай $g = 1$ дает результат, аналогичный случаю $g = 0$ со специально выбранной функцией c : c имеет изолированный изотропный нуль, с точностью до перестановки секторов $\pm$ (т. е. z и $\bar{z}$). **Большее число $k \geq 1$ изотропных нулей для $g = 0$ приводит к семейству “высокого ранга” слабо сингулярных блоховских функций инстантонного типа M^{k+1} .** Удаляя δ -сингулярности сингулярными калибровочными преобразованиями, мы получаем гладкое магнитное блоховское многообразие M^{k+1} , отвечающее периодическому магнитному полю с высоким потоком и аналогичное построенному в [9].

8. Распространение результатов на бесконечные тригонометрические ряды для $g = 0$

Мы знаем, что алгебро-геометрический случай отвечает случаю тригонометрических полиномов. Возьмем прямоугольную решетку в плоскости x, y . Выполнено следующее соотношение:

$$Q^+ \psi' = M(k) \sqrt{c} e^{\bar{z}k}.$$

Теперь выберем нормализацию ψ' такую, что $M(k) = k$.

Воспользуемся формулой

$$\psi' = k \sum_j \frac{\kappa_j e^{p_j z - k_j \bar{z}}}{k - k_j} e^{k \bar{z}}.$$

Мы имеем дело с новой нормализацией: здесь k_j являются элементами решетки.

Как следствие,

$$\sum_j \kappa_j e^{p_j z - k_j \bar{z}} = c.$$

Применим этот результат к бесконечному ряду $c \rightarrow c' = 1/c$. Это дает нам функцию ψ'_- для второй компоненты L^- оператора Паули.

9. Краевые задачи

Задача. Компонента Γ' многообразия Блоха–Флоке не влияет на обычный спектр в гильбертовом пространстве функций на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Можем ли мы использовать это для решения физически осмысленных (т. е. самосопряженных) краевых задач?

Напомним следующее: для одномерного самосопряженного периодического оператора Шрёдингера $L = -\partial_x^2 + u$, $u(x+T) = u(x)$, двулистная риманова поверхность Γ функций Блоха–Флоке $L\psi = \lambda\psi$, $T^*\psi = \psi(x+T) = \varkappa\psi$ такова, что все ее точки ветвления a_s , $s \geq 0$, вещественны. Точки ветвления являются границами раздела между спектральными зонами и запрещенными зонами на вещественной прямой. Для того чтобы восстановить потенциал, нам также необходимо знать положения полюсов функции $\psi(\lambda, x, x_0)$, $\lambda \in \Gamma$ (нормализованной условием $\psi(x_0) = 1$). Полюсы $\gamma_j \in \Gamma$ образуют “дивизор D ”. Внутри каждой конечной зоны для гладких потенциалов существует в точности один полюс:

$$\gamma_j(x_0) \in [a_{2j-1}, a_{2j}].$$

Нули функции ψ расположены в точках $\gamma_j(x)$. Следовательно, наша функция Блоха–Флоке $f(x^*) = \psi(\gamma_j(x), x^*)$ удовлетворяет граничной задаче Дирихле на интервале $x^* \in [x, x+T]$, где T является периодом, так как $f(x) = f(x+T) = 0$.

Другая интерпретация следует из того факта, что та же функция $f(x^*)$ возрастает слева или справа от нуля $f|_{x^*=x} = 0$ и отвечает листу римановой поверхности, где лежит полюс $\gamma(x_0)$. Таким образом, функция $f(x^*)$ принадлежит дискретному спектру на соответствующей полупрямой $x^* \in [x, +\infty]$ или $x^* \in [-\infty, x]$.

Вопрос: можем ли мы найти похожую реализацию для блоховских функций ψ', ψ'' в случае периодического гладкого топологически тривиального магнитного поля $B = (1/2)\Delta \ln c$, где c является вещественным и ненулевым?

Классическая теория Дж. фон Неймана самосопряженных граничных условий (как указал И. М. Гельфанд С. П. Новикову в начале 1970-х годов) следует схеме, которая достаточно похожа на тогдашние идеи Новикова построить “эрмитову К-теорию” над кольцами с инволюцией: самосопряженные расширения симметрических операторов отвечают лагранжевым подпространствам в гамильтоновом модуле над кольцом функций. Пусть $\gamma \subset T^2$ является контуром в торе, представляющем границу нашей области (или ее связанной компоненты).

9.1. Граничные условия для операторов Паули без смешивания компонент. Рассмотрим сначала “скалярные” граничные условия для операторов $L = L^+ = QQ^+$ или $L = L^- = Q^+Q$ по отдельности, не перемешивая различные компоненты. Мы сводим интеграл к интегралу по границе:

$$\iint_D [(L\psi)\bar{\phi} - \psi(\bar{L}\bar{\phi})] d^2x = \oint_{\gamma} [\psi_1\bar{\phi}_2 - \psi_2\bar{\phi}_1] dt,$$

где $\psi_1(t) = \nabla_n \psi|_{\gamma} = (\partial_n + A_n)\psi|_{\gamma}$ и $\psi_2(t) = \psi|_{\gamma}$. Здесь n – вектор внешней нормали к границе. Сделать самосопряженное расширение означает выбрать “лагранжево подпространство” $(\psi_1(t), \psi_2(t)) \in \Lambda$ для косоэрмитовой граничной формы такое, что

$$\oint_{\gamma} [\psi_1\bar{\psi}_2' - \psi_2\bar{\psi}_1'] dt = 0$$

для каждой пары элементов в подпространстве Λ . Рассмотрим различные типы граничных условий.

“Ультралокальные” граничные условия, не содержащие производных вдоль касательных направлений к границе. Такие граничные условия эллиптичны. К ним относятся:

- 1) граничные условия Дирихле $\psi_2 = \psi|_{\gamma} = 0$;
- 2) граничные условия Неймана $\psi_1 = \nabla_n \psi|_{\gamma} = 0$;
- 3) граничные условия Леонтовича $\alpha(t)\psi_1 + \beta(t)\psi_2 = 0$ с вещественным ненулевым для всех $t \in \gamma$ вектором (α, β) ; инвариант здесь – отношение $(\alpha(t)/\beta(t))^{\pm 1}$; это граничное условие имеет топологический заряд (степень отображения $\gamma = S^1 \rightarrow S^1 = \mathbb{R}P^1$).

Общие “локальные” граничные условия. Такие граничные условия не эллиптичны.

Пусть дана пара скалярных дифференциальных операторов U, V на окружности, один из которых обратим (например, равен 1). Нашим граничным условием является $U\psi_1 = V\psi_2$. Это граничное условие является самосопряженным, если $(UV^+)^+ = UV^+ = VU^+$. В специальном случае один из операторов равен единице, а другой – произвольному самосопряженному оператору на границе.

Интересен специальный случай, когда $U = 1$ и V – оператор первого порядка: $V = i\alpha\partial_t + v(t)$, $\alpha, v(t) \in \mathbb{R}$. Граничное условие вида $\psi_1 = \nabla_n \psi = \pm i\psi_t + v(t)\psi$ мы назовем ∂ -bar-граничным условием или ∂ -граничным

условием. Причина для этого следующая: мы можем записать это граничное условие (для знака $-$) в виде

$$[Q^+\psi - e^{i\theta(t)}v(t)\psi]_\gamma = 0,$$

где $Q^+ = -(\partial_{\bar{z}} - A_{\bar{z}})$ и $A_1 = i\Phi_y$, $A_2 = -i\Phi_x$, $A_{\bar{z}} = -\Phi_{\bar{z}}$, функция $\theta(t)$ является угловым вращением, переводящим координатный репер x, y в репер Френе n, ∂_t . Граничное условие ∂ -bar является самосопряженным, но не ультралокальным. Оно не является эллиптическим. Мы не можем найти каких-либо следов этого граничного условия в литературе, хотя оно очень близко к эллиптическому граничному условию и самосопряжено. Можно предположить, что такое граничное условие появится в задачах физики. Заменяя оператор V на $V' = +i\partial_t + v(t)$, мы получим похожее “ ∂ -граничное условие”, где Q^+ заменен на $Q = \partial - \Phi_z$. Оно имеет похожие свойства.

Существуют также общие нелокальные самосопряженные граничные условия, однако мы здесь нелокальные граничные условия не рассматриваем.

9.2. Граничные условия для операторов Паули со смешиванием компонент. Оператор L^P действует на вектор-функции $\Psi = (\psi^+, \psi^-)$. После вычислений мы получим

$$\langle L^P \Psi, \Phi \rangle - \langle \Psi, L^P \Phi \rangle = \oint_\gamma \{ [\psi_1^+ \bar{\phi}_2^+ - \psi_2^+ \bar{\phi}_1^+] + [\psi_1^- \bar{\phi}_2^- - \psi_2^- \bar{\phi}_1^-] \} dt,$$

где

$$\psi_1^\pm = \nabla_n \psi^\pm|_\gamma, \quad \psi_2^\pm = \psi^\pm|_\gamma.$$

Ультралокальные граничные условия. Эти условия эллиптически.

Наша косоэрмитова форма имеет сигнатуру $(2, 2)$ в каждой точке границы $t \in \gamma$. Семейство всех лагранжевых подпространств изоморфно группе U_2 для всех $t \in \gamma$. Таким образом, все семейство ультралокальных самосопряженных граничных условий может быть классифицировано гладкими отображениями $S^1 \rightarrow U_2$ с топологическим зарядом из группы $\pi_1(U_2) = \mathbb{Z}$. Лагранжевы подпространства в каждой точке $t \in \gamma$ могут иметь следующие три типа.

1. Подпространства вида

$$\psi_1^\alpha = \sum_\beta R^{\alpha, \beta} \psi_2^\beta,$$

где матрица R эрмитова и $\alpha, \beta = \pm$.

2. Аналогичные подпространства с переставленными числами 1 и 2:

$$\psi_2 = R\psi_1.$$

Пересечением типов 1 и 2 является в точности подкласс, для которого эрмитова матрица R невырождена. Типы 1 и 2 могут быть объединены формой записи $U\psi_1 = V\psi_2$, где одна из матриц U, V обратима, а матрица $UV^+ = VU^+$ эрмитова.

3. Подпространства вида $a\psi_1^+ + b\psi_1^- = 0, c\psi_2^+ + d\psi_2^- = 0$.

Свойство лагранжевости влечет $a\bar{c} + b\bar{d} = 0$. Мы можем нормализовать эти уравнения, сведя их к виду $|a|^2 + |b|^2 = 1$, $|c|^2 + |d|^2 = 1$. Мы приходим к произвольной матрице из группы SU_2 , которая нумерует такие специальные лагранжевы подпространства (или произвольные единичные векторы $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, определяющие всю матрицу).

Общее локальное граничное условие, перемешивающее компоненты. Мы можем написать естественный дифференциальный аналог описанных выше скалярных типов в виде

$$U\psi_1 = V\psi_2, \quad \psi_1 = \nabla_n\psi, \quad \psi_2 = \psi,$$

где один из двух операторов U, V на окружности является обратимым. Нашим требованием является $UV^+ = VU^+$.

Наиболее интересными для нас являются граничные условия, содержащие производные обеих компонент Ψ в граничных точках:

$$\begin{aligned} \nabla_n\psi^+ &= A^+\psi^+ + b\nabla_n\psi^-, \\ -\psi^- &= c\psi^+ + d\nabla\psi^-, \end{aligned}$$

где $A^+ = \alpha^+ i\partial_\tau + a$ есть оператор первого порядка вдоль границы. Здесь все функции $\alpha^+(t)$, $a(t)$, $d(t) \in \mathbb{R}$ и $b(t)$, $c(t)$ являются гладкими и $c = \bar{b}$.

Это граничное условие не эллиплично, если порядок оператора A^+ выше нуля. Ультралокальный случай отвечает случаю нулевого порядка $\alpha^+ = 0$.

10. Блоховские функции вне спектра как решения краевых задач

Обсудим следующую задачу. Пусть $\Psi = (\psi^+, \psi^-)$ – нулевая мода оператора Паули: $L^P\Psi = 0$. Для каких контуров это решение удовлетворяет самосопряженным граничным условиям?

Мы рассмотрим эту задачу в обоих случаях: со смешиванием и без смешивания компонент.

Нашей целью является показать, что для некоторых специальных граничных условий эти контуры могут быть описаны как траектории некоторой динамической системы (слоения) на двумерном торе T^2 или на накрывающем пространстве $\mathbb{R}^2$. Сначала рассмотрим ультралокальный случай.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $d = 0$ и $\alpha^+ = 0$. Коэффициенты a, c, b удовлетворяют условиям $a \in \mathbb{R}$ и $c = \bar{b}$ тогда и только тогда, когда граничная кривая $\gamma = \partial D$ является слоем слоения $\omega = 0$, где

$$\omega = (|\psi^+|^2 + |\psi^-|^2) d\Phi + |\psi^+|^2 * d\theta^+ + |\psi^-|^2 * d\theta^-.$$

Здесь $\psi^\pm = |\psi^\pm| \exp\{i\theta^\pm\}$ и $*d\Phi$ является вектор-потенциалом магнитного поля, звезда $*$ является стандартным оператором двойственности 1-форм на комплексной плоскости.

Случай $b = 0$ ведет к граничным условиям без смешивания. Мы детально обсудим этот случай ниже. Для ∂ -bar-задачи имеем $\alpha^+ = -1$. Предположим, как и выше, что $d = 0$, тогда мы приходим к аналогичной динамической системе. Она детально исследована ниже в случае без смешивания $b = c = 0$.

Доказательство этой теоремы не очень сложное. Оно может быть получено элементарными рассуждениями.

Наиболее интересным для нас является случай $\psi^+ = \psi'$, $\psi^- = \lambda\psi''$, где λ – параметр и $\psi'' = Q^+\psi'$. Здесь Q^+ является оператором, который в квантовой теории трактуется как суперсимметрия для L^P (см. раздел 3). Наша динамическая система зависит от λ . При $\lambda = 0$ мы имеем случай без смешивания.

Эта пара определяет общее блоховское решение на нулевом уровне энергии для физического оператора Паули с некоторыми (неунитарными) мультипликаторами, так же как было в одномерном случае, где мы имели блоховские решения в запрещенных зонах в качестве собственных функций самосопряженной граничной задачи.

Сделаем некоторые общие замечания, касающиеся **граничных задач без смешивания**.

Пусть контур $\gamma \subset T^2$ задан для следующей области: $D = T^2 \setminus \gamma$. Найдем решение граничной задачи такой, что $L^+\psi = 0$ в D , с **ультралокальными граничными условиями**. Пусть

$$\alpha(t)\nabla_n\psi + \beta(t)\psi = 0 \quad (6)$$

на контуре γ . Рассмотрим сначала задачу с **контуром, гомотопным нулю в T^2** (см. рис. 4а), и $\partial D = \gamma$. Решение ψ граничной задачи “типа Леонтовича”, удовлетворяющее соотношению (6), мы будем строить, используя интегральное уравнение

$$\psi = \iint_{\mathbb{R}^2} [p(k)\psi' + q(k)\psi''] d^2k.$$

Для задачи с **контурами γ , не гомотопными нулю в T^2** , мы имеем $\partial D = \gamma \cup \gamma'$ (см. рис. 4с). Существует естественное $\mathbb{Z}$ -накрытие $\widehat{D} \rightarrow D$, где $\widehat{D}$ является полосой в $\mathbb{R}^2$ со средним направлением $g = [\gamma] \in H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ (см. рис. 4б). Элемент $g \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ действует свободно, $g: \widehat{D} \rightarrow \widehat{D}$, как сдвиг на комплексное число:

$$g: \quad z \rightarrow z + g, \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{g}.$$

По определению, компоненты границы

$$\partial\widehat{D} = \widehat{\gamma} \cup \widehat{\gamma}'$$

являются накрытиями над γ , γ' . Элемент g можно рассматривать как вектор решетки $\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Другой порождающий элемент $g' \in \mathbb{Z}^2$, дополнительный к g , отображает в точности контур γ в контур γ' , $g': \gamma \rightarrow \gamma'$. Мы будем говорить, что γ' ($\widehat{\gamma}'$) **находится справа от γ ($\widehat{\gamma}$)**, если $|\chi(g')| < 1$. Пусть $c \neq 0$. Все функции $\psi'(k)$, $\psi''(k)$ с k , ортогональными g , имеют унитарные блоховские мультипликаторы $|\chi(g)| = 1$ вдоль сдвига g . Мы имеем четыре области: D_+ , D_- , $\widehat{D}$ в $\mathbb{R}^2$ и D в T^2 (см. рис. 4а–4д), при этом

$$D_+ \cup D_- = \mathbb{R}^2, \quad D_+ \cap D_- = \widehat{\gamma}, \quad g'(D_-) \subset D_-, \quad g'(D_+) \cap D_- = \widehat{D}.$$

Мы требуем, чтобы на контурах γ , γ' выполнялось равенство

$$\alpha(t)\nabla_n\psi + \beta(t)\psi = 0,$$

но допускаем различные пары коэффициентов (α, β) , (α', β') для γ и γ' в области $\widehat{D}$ такой, что оба контура входят в границу. Функция ψ должна быть построена существенным образом по ψ' , но, если необходимо, мы можем добавить ψ'' . Наиболее общая возможность является такой, что ψ задана интегралом вдоль k -оси, ортогональной g :

$$(I): \quad \psi = \int_{k \geq 0} [\psi'(k, x, y)p(k) + \psi''(k, x, y)q(k)] dk$$

для полуплоскости $D_+ \subset \mathbb{R}^2$;

$$(II): \quad \psi = \int_{k \leq 0} [\psi'(k, x, y)p(k) + \psi''(k, x, y)q(k)] dk$$

для полуплоскости $D_- \subset \mathbb{R}^2$;

$$(III): \quad \psi = \int_{k \in \mathbb{R}} [\psi'(k, x, y)p(k) + \psi''(k, x, y)q(k)] dk$$

для полосы $\widehat{D} \subset \mathbb{R}^2$;

$$(IV)_{\varkappa}: \quad \psi_{\varkappa} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} [\psi'(k_m, x, y)p_m(\kappa) + \psi''(k_m, x, y)]q_m(\kappa)$$

для $D \subset T^2$, где соответствующее k_m таково, что все $\psi'(k_m)$, $\psi''(k_m)$ имеют один и тот же самый фиксированный унитарный мультипликатор $\varkappa = e^{k_m \bar{g}}$ (т. е. $k_m = k_0 + 2\pi i m / \bar{g}$, где $m \in \mathbb{Z}$).

Локальные “ ∂ -bar-” (или “ ∂ -”) граничные задачи. Как и выше в ультралокальном случае, мы имеем два типа контуров:

- задача 1 с контурами γ , гомотопными нулю в T^2 , где $\gamma = \partial D$;
- задача 2 с контурами $\gamma \subset T^2$, не гомотопными нулю на T^2 ; здесь $\partial D = \gamma \cup \gamma'$.

Во втором случае (наиболее интересном для нас) мы рассматриваем те же типы областей D_+ , D_- , $\widehat{D}$, D , что и выше, с границами, не гомотопными нулю в T^2 , и их накрывающими в $\mathbb{R}^2$ (см. рис. 4a–4d).

Рис. 4a и 4b отвечают примеру 2 (см. ниже). Здесь g параллелен среднему направлению $\widehat{\gamma}$.

Рис. 4c и 4d отвечают примеру 1. Контур $\widehat{\gamma}$ является просто прямой $x = 0$, $-\infty < y < \infty$ (см. рис. 4c).

Наше граничное соотношение вдоль границы (возможно, с различными коэффициентами для различных компонент границы) имеет вид

$$Q^{\pm} \psi = v(t) \psi e^{i\theta(t)}$$

или

$$\nabla_n \psi = (\pm i \partial_t + u(t)) \psi$$

для вещественных u , v . Мы можем пытаться найти решение ψ , используя, как и выше, интегральные уравнения.

Рис. 4а. Контур γ гомотопен нулю Рис. 4б. Контур γ не гомотопен нулю

Рис. 4с

Рис. 4д

Мы уже обсуждали выше следующий вопрос: **какие общие ограничения должны быть выполнены для класса функций ψ , решающих задачу типа Леонтовича в магнитном поле с вектор-потенциалом**

$$A = -i * d\Phi = i(-\Phi_y dx + \Phi_x dy)?$$

Теперь мы будем рассматривать только случай без смешивания. Предполагая, что $\psi = \rho(x, y)e^{i\theta(x, y)}$, можно видеть, что отношение $\nabla_n \psi / \psi$ должно быть вещественным. Здесь n – нормаль к границе $\gamma \subset \partial D$. Мы приходим к следующему утверждению (частный случай сформулированной выше теоремы 4).

ЛЕММА 3. Если фазовая функция $\theta(x, y)$ известна, то граничный контур γ для самосопряженного скалярного оператора $L\psi = \lambda\psi$ с любым граничным условием типа Леонтовича должен быть слоем слоения, заданным уравнением $*(d\theta + A/i) = \Omega = 0$ или $(\theta_y + \Phi_x)dx + (-\theta_x + \Phi_y)dy = 0$. И наоборот, если контур γ известен, то вдоль контура должно быть выполнено ограничение $*d\theta = -d\Phi$.

Специальные контуры, для которых решение несмешанной краевой задачи является блоховской функцией ψ' .

ПРИМЕР 1. ψ' как решение граничной задачи Леонтовича для специальных контуров первого типа. Пусть $g = 0$. Мы строим решение с $2n + 1$ точками пересечения p_j, k_j , где

$$p_j = a + ib_j, \quad p_{n+j} = -p_j, \quad k_{n+j} = -k_j.$$

Пусть задан набор констант (не имеющих ничего общего с блоховскими мультипликаторами) $\kappa_{n+j} = \kappa_j$ и все параметры a, b_j, κ_j вещественны. Пусть

$$\sum_{j=1}^n \kappa_j = 0. \text{ Имеем}$$

$$c = \kappa_0 + 2 \sum_{j=1}^n \kappa_j \cos(2(b_j x + ay)),$$

$$\frac{\psi'}{k} = e^{k\bar{z}} \left(\frac{\kappa_0}{k} + \sum_{j=1}^n \left(\kappa_j \frac{e^{p_j z - k_j \bar{z}}}{k - k_j} + \kappa_{n+j} \frac{e^{p_{n+j} z - k_{n+j} \bar{z}}}{k - k_{n+j}} \right) \right).$$

Для $x = 0$ имеем $c = \kappa_0 = \text{const}$. Мы назовем такой контур **специальным контуром первого типа**. Возьмем теперь контур γ , заданный равенством $x = 0$ или $c = \text{const}$, и рассмотрим граничную задачу

$$\psi_n = \alpha(x)\psi.$$

Укажем здесь, что для таких контуров выполнено соотношение $\nabla_n = \partial_n$, так как $d\Phi = 0$ на контуре $\Phi = \ln c = \text{const}$ и $A = (i\Phi_y, -i\Phi_x)$. Должно быть выполнено условие $\psi'_x/\psi \in \mathbb{R}$ при $x = 0$. Представляя ψ' в виде $\psi' = e^{k\bar{z}}(f + ig)$, мы видим, что условие $\psi'_x/\psi'|_{x=0} \in \mathbb{R}$ следует для $k \in \mathbb{R}$ из требований $g|_{x=0} = g_x|_{x=0} = 0$. После элементарных вычислений мы видим, что

$$g|_{x=0} = A_1 \cos(ay) + A_2 \sin(ay) \quad \text{и} \quad g_x|_{x=0} = B_1 \cos(ay) + B_2 \sin(ay),$$

где константы A_q, B_q линейно выражаются через константы κ_j . Наше граничное условие эквивалентно четырем однородным линейным уравнениям $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$. Таким образом, при $n > 5$ мы можем найти решение для каждого фиксированного значения констант $a, b_j, k \in \mathbb{R}$. Вещественные значения k ортогональны направлению контура $x = 0$. Итак, мы доказали следующую лемму.

ЛЕММА 4. Для каждого множества экспонент с нечетным числом $2n + 1$ точек самопересечения, где $n > 5$, существует дивизор (т. е. множество констант κ_j) такой, что соответствующая функция Блоха–Флоке $\psi'(k, x, y)$ с вещественным $k \in \mathbb{R}$ удовлетворяет граничному условию Леонтовича $\psi'_x/\psi' \in \mathbb{R}$ для контура $\gamma: x = 0$. Блоховский мультипликатор вдоль направления контура является унимодулярным: $\kappa = e^{-iky}$.

Таким образом, наша задача является самосопряженной. Соответствующая функция $\psi'(k, x, y)$ служит решением граничной задачи Леонтовича в области $\hat{D}$: $0 < x < 2\omega$ и в одной из двух полуплоскостей D_+ : $0 < x$ или D_- : $x < 0$ в зависимости от знака соответствующего значения k . Она также обслуживает спектр в области D , где $x \in [0, 2\omega]$, в торе T^2 (т. е. периодична по переменной y), см. рис. 4с и 4d.

Рис. 5 отвечает следующему ниже примеру 2, посвященному “ ∂ -bar”-граничным условиям. В этом примере мы имеем “максимальный” граничный контур, гомотопный нулю, такой, что площадь внутри совпадает со всей площадью тора. В частности, магнитный поток через эту область равен нулю согласно нашим предположениям на класс магнитных полей, которые мы рассматриваем. В этом случае граничный цикл состоит из сепаратрис (см. рис. 5).

Рис. 5

ПРИМЕР 2. ψ' как решение “ ∂ -bar”-граничной задачи для специального контура второго вида. Мы пишем “ ∂ -bar”-задачу в виде

$$Q^+ \psi = u(t) e^{i\theta(t)} \psi,$$

где $u \in \mathbb{R}$ и $\theta(t)$ – угол между репером x, y и репером Френе n, ∂_τ вдоль граничной кривой γ . Пусть $\psi = \psi'(k, x, y)/\sqrt{c}$. Имеем $Q^+ \psi/\psi = e^{i\theta_k(x, y)} u_k(x, y)$, где $u_k \in \mathbb{R}$. Таким образом, наш контур γ должен быть касательным к векторному (директорному) полю ∂_τ на торе. Это поле зависит от параметра $k \in \mathbb{C}$. Оно получено из направления ∂_x вращением $e^{i\theta_k(x, y)}$ в точке x, y или $z = x + iy$. Это векторное (директорное) поле может быть описано нулями 1-формы:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{Q^+ \psi}{\psi} d\bar{z} \right] = 0.$$

Пусть

$$c = 1 + \sum_{j=1}^n (a_j e^{l_j \bar{z} - \bar{l}_j z} + \bar{a}_j e^{-l_j \bar{z} + \bar{l}_j z}),$$

и в новой нормировке, где полюсы расположены в точках пересечения, имеем

$$\frac{\psi'}{k} = \left(\frac{1}{k} + \sum_{j=1}^n \left(a_j \frac{e^{l_j \bar{z} - \bar{l}_j z}}{k + l_j} + \bar{a}_j \frac{e^{-l_j \bar{z} + \bar{l}_j z}}{k - l_j} \right) \right) e^{k\bar{z}}.$$

Теперь сделаем калибровочное преобразование $\psi = \psi'/\sqrt{c}$, приводящее оператор к самосопряженному виду $L = QQ^+$. Имеем $Q^+ \psi/\psi = -\bar{\partial} \psi'/\psi'$. Но $\bar{\partial}(\psi'/k) = 2ce^{k\bar{z}}$ для ψ' с новой нормировкой. В результате получим

$$\frac{Q^+ \psi}{\psi} = -\frac{2cke^{k\bar{z}}}{\psi'}.$$

Следовательно, мы описали множество контуров, для которых ∂ -bar-граничное условие имеет в качестве решения функцию $\psi'(k, x, y)$. Мы назовем их **специальными контурами второго рода**. Эти контуры являются слоями слоения на двумерном торе, заданном следующим уравнением:

$$\frac{cke^{k\bar{z}}}{\psi} d\bar{z} + \frac{\bar{c}\bar{k}e^{\bar{k}z}}{\bar{\psi}} dz = 0$$

на γ . Здесь c вещественно и отлично от нуля.

Нули ψ' являются сингулярными точками этого слоения. Многообразие нулей $N_0 = \{\psi'(k, x, y) = 0\}$ является компактным и двумерным, кроме того, $N_0 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 = \{k, x, y\}$. Пересечение N_0 с каждой плоскостью $k = \text{const}$ состоит из конечного числа изолированных точек. Поверхность N_0 проецируется в k -плоскость. Образ является компактным множеством и $N_0 \rightarrow N^* \subset \mathbb{C}$. Мы знаем, что N^* является компактным и не покрывает 0. Для всех $k \in \mathbb{C} \setminus N^*$ наше слоение на двумерном торе не имеет сингулярных точек. Наш поток является аналитическим. Согласно известным классическим результатам, такой поток всегда гомеоморфен прямолинейному потоку с некоторым “числом вращения” $\rho(k)$. Таким образом, мы имеем

$$\frac{\bar{\psi}'}{\bar{k}e^{k\bar{z}}} d\bar{z} + \frac{\psi'}{ke^{k\bar{z}}} dz = 0.$$

Введем вещественную функцию

$$F = \left(\frac{1}{|k|^2} + \sum_j^n \left(a_j \frac{e^{l_j \bar{z} - \bar{l}_j z}}{(k + l_j)(\bar{k} - \bar{l}_j)} + \bar{a}_j \frac{e^{-l_j \bar{z} + \bar{l}_j z}}{(k - l_j)(\bar{k} + \bar{l}_j z)} \right) \right) e^{k\bar{z} + \bar{k}z}.$$

Легко проверить, что $\partial F = 2\psi'/(ke^{k\bar{z}})$ и $\bar{\partial} F = 2\bar{\psi}'/(\bar{k}e^{k\bar{z}})$. Для всех $k \in \mathbb{C} \setminus N^*$ контуры глобально заданы уравнением $dF = 0$ или $F = \text{const}$ в $\mathbb{R}^2$. Для всех значений $k \in \mathbb{C}$ несингулярные уровни $F = a$ определяют траектории, которые не достигают сингулярных точек. Все эти траектории либо компактны и гомотопны нулю, либо топологически эквивалентны в $\mathbb{R}^2$ прямолинейным траекториям вокруг тора с некоторым числом вращения. Все компоненты уровня $F = \text{const}$, содержащие сингулярные точки, являются либо изолированными сингулярными точками (центрами слоений), либо сепаратрисами седел (включая вырожденные седла). Мы доказали следующее утверждение.

ЛЕММА 5. *Наше слоение эквивалентно гамильтоновой системе (слоению) с гамильтонианом F в каждой компактной области E , лежащей в универсальном накрытии $E \subset \mathbb{R}^2$.*

Как следствие мы получаем, что

- (i) все сингулярные точки являются либо центрами, либо седлами (возможно, вырожденными);
- (ii) не существует предельных циклов, гомотопных нулю в торе, в том числе предельных циклов, построенных из частей сепаратрис от седел к седлам.

Является ли наше слоение глобально топологически эквивалентным гамильтонову слоению в торе, заданному некоторым многозначным гамильтонианом (или замкнутой 1-формой)?

Могут ли для нашей системы существовать предельные циклы, не гомотопные нулю? Пусть задан такой цикл γ . Он может быть несингулярным или состоять из нескольких частей сепаратрис. В любом случае значение функции F вдоль γ является константой и число вращения вдоль γ является рациональным. Согласно нашему предположению семейство незамкнутых открытых несингулярных траекторий γ_1 приближается к γ при $t \rightarrow \infty$. Мы всегда можем выбрать γ_1 так, что $F(\gamma) \neq F(\gamma_1)$.

Существуют следующие два случая.

Случай 1: функция ψ' является неограниченной вдоль замкнутого контура γ . Это возможно только для таких контуров, что $F(\gamma) = 0$ (доказательство см. ниже). Любой замкнутый контур, не гомотопный нулю в торе, с неограниченной ψ' , является пределом для нашего слоения – см. пример к случаю 1 и рис. 6.

ПРИМЕР к случаю 1. Пусть функции s, F такие же, как и выше. Возьмем следующие параметры:

$$n = 2, \quad l_1 = \frac{1}{2}, \quad l_2 = \frac{i}{2}, \quad a_1 = a_2 = 0.2, \quad k = 0.55i, \\ c = 1 + 0.4 \cos x + 0.4 \cos y.$$

Решая пример численно, мы приходим к предельным циклам γ , где $b = [\gamma] \in H_1(T^2, \mathbb{Z})$ и b является базисным циклом вдоль y -оси (мнимой). Имеем $F(\gamma) = 0$ (см. рис. 6).

Рис. 6

Здесь контуры $F = 0$ замкнуты и не гомотопны нулю. Блоховский мультипликатор в y -направлении отличен от 1. Поэтому дифференциал dF экспоненциально возрастает в y -направлении и все контуры $F = c$ стремятся к контуру $F = 0$ при $y \rightarrow +\infty$.

Случай 2: Функция ψ' ограничена вдоль открытых контуров γ_1 . Согласно лемме 6 ниже это всегда верно, если все компоненты связности уровня $F = 0$ являются компактными в $\mathbb{R}^2$. Число вращения является рациональным для замкнутого контура γ , не гомотопного нулю. Таким образом, траектория γ соответствует сдвигу $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ на элемент решетки с унитарным мультипликатором. После M итераций мы получим число вращения

для g^M , равное 1. Но форма dF преобразуется по правилу $g^*(dF) = \varkappa dF$ для всех сдвигов g из решетки, причем блоховские мультипликаторы $g^*\psi' = \varkappa\psi'$, $\varkappa \in \mathbb{R}$, вещественны. Мы знаем, что $F = \text{const}$ вдоль γ_1 и что форма dF инвариантна при сдвиге g^M с унитарным мультипликатором $\varkappa = 1$. Итак, мы видим, что $F(\gamma) = F(\gamma_1)$ для всех γ_1 , достигающих γ , если γ является несингулярным. Мы получаем противоречие для несингулярных γ , поскольку F является гладкой (даже аналитической) функцией. Она не постоянна вдоль трансверсального сечения к γ . Это верно также для сингулярного γ , построенного по сепаратрисам. Для доказательства этого утверждения мы должны использовать вместо dF специфику блоховского свойства функции F , которая задана явными формулами. В частности, мы должны воспользоваться ее поведением при сдвигах на элементы решетки вместо рассмотрения формы dF .

Таким образом, **мы заключаем, что наше слоение не может иметь несингулярных (и сингулярных) предельных циклов, гомотопных нулю и таких, что $F(\gamma) \neq 0$.**

ЛЕММА 6. Пусть $\hat{\gamma}$ является открытой несингулярной траекторией такой, что топологическое замыкание ее проекции γ в торе T^2 не содержит уровней $F = 0$. Тогда ψ' ограничена вдоль контуров γ . Для каждого несингулярного периодического поля $c \neq 0$ и достаточно большого $|k|$ это условие выполнено.

Доказательство немедленно следует из формул для функций F и ψ' при достаточно большом $|k|$. Функцию ψ' можно представить в виде произведения $e^{k\bar{z}}$ и ограниченной периодической функции. Таким образом, $|\psi'| \sim e^{\text{Re}(k\bar{z})}$. Функция F представима в виде периодической функции, умноженной на функцию $e^{2\text{Re}(k\bar{z})}$. Таким образом, функция $e^{\text{Re}(k\bar{z})}$ ограничена вдоль уровней $F = \text{const} \neq 0$. Поэтому ψ' также ограничена вдоль этого контура. Для достаточно большого $|k|$ асимптотика функции F имеет вид $(c/|k|^2)e^{k\bar{z} + \bar{k}z}$, поэтому эта функция отделена от нуля. Лемма доказана.

Мы приходим к **выводу**, что существуют только следующие три возможности для слоев этого слоения при $k \in \mathbb{C}$.

1. Существует открытая несингулярная траектория γ , для которой $\psi'(k, x, y)$ является решением сомосопряженной ∂ -bar-граничной задачи в цилиндрической области $D \subset T^2$, в ленточной области $\hat{D}$ и в деформированных полуплоскостях D_+ или D_- . Необходимо выбрать только одну область D_+ или D_- , где $\psi'(k, x, y)/\sqrt{c}$ убывает на бесконечности в направлении, трансверсальном к границе (см. рис. 4a–4d).

2. Существует “максимальный” цикл γ , гомотопный нулю на торе T^2 , состоящий из сепаратрис седел такой, что γ ограничивает всю площадь тора (см. рис. 5). Функция ψ' дает решение самосопряженной граничной задачи.

3. Существует предельный цикл γ , не гомотопный нулю, такой, что $F(\gamma) = 0$ (см. рис. 6). Для такого граничного контура функция ψ' не порождает решение самосопряженной задачи, так как она имеет экспоненциальный рост вдоль границы.

Эта картина является естественным 2D-обобщением одномерного случая, где функции $f(x^*) = \psi(\gamma_j(x), x^*)$ дают новые уровни в запрещенных зонах спектра периодической задачи и описывают либо дополнительный спектр задачи Дирихле на отрезке $x^* \in [x, x+T]$, либо “приграничные” состояния на полупрямой $R^+ = [-\infty, x]$ или $R^- = [x, +\infty]$ для оператора $L = -\partial_{x^*}^2 + u(x^*)$.

Список литературы

- [1] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 4: *Квантовая электродинамика*, 2-е изд., Наука, М., 1980, 704 с.; англ. пер.: V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Course of theoretical physics*, v. 4: *Quantum electrodynamics*, 2nd ed., Butterworth–Heinemann, 1982, 652 pp.
- [2] П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков, “Двумерный оператор Шрёдингера: эволюционные $(2 + 1)$ -системы и их новые редукции; двумерная иерархия Бюргера и данные обратной задач”, *УМН*, **65**:3(393) (2010), 195–196; англ. пер.: P. G. Grinevich, A. E. Mironov, S. P. Novikov, “2D-Schrödinger operator, $(2 + 1)$ evolution systems and new reductions, 2D-Burgers hierarchy and inverse problem data”, *Russian Math. Surveys*, **65**:3 (2010), 580–582; *2D Schrodinger operator, $(2 + 1)$ systems and new reductions. The 2D Burgers hierarchy and inverse problem data*, 2010, 5 pp., arXiv: 1005.0612.
- [3] П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков, “О нулевом уровне чисто магнитного двумерного нерелятивистского оператора Паули для частиц со спином $1/2$ ”, *ТМФ*, **164**:3 (2010), 333–353; англ. пер.: P. G. Grinevich, A. E. Mironov, S. P. Novikov, “Zero level of a purely magnetic two-dimensional nonrelativistic Pauli operator for SPIN- $1/2$ particles”, *Theoret. and Math. Phys.*, **164**:3 (2010), 1110–1127; *On the ground level of purely magnetic algebro-geometric 2D Pauli operator (spin $1/2$)*, 2010, 32 pp., arXiv: 1004.1157.
- [4] П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков, “Исправление к статье: ‘О нулевом уровне чисто магнитного двумерного нерелятивистского оператора Паули для частиц со спином $1/2$ ’ (ТМФ. 2010. Т. 164, № 3. С. 333–353)”, *ТМФ*, **166**:2 (2011), 320; англ. пер.: P. G. Grinevich, A. E. Mironov, S. P. Novikov, “Erratum to: ‘Zero level of a purely magnetic two-dimensional nonrelativistic Pauli operator for SPIN- $1/2$ particles’”, *Theoret. and Math. Phys.*, **166**:2 (2011), 278.
- [5] P. G. Grinevich, A. E. Mironov, S. P. Novikov, *On the nonrelativistic 2D purely magnetic supersymmetric Pauli operator*, 2011 (v3 – 2015), 39 pp., arXiv: 1101.5678.
- [6] П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков, “Двумерный оператор Паули в магнитном поле”, *Физика низких температур*, **37**:9-10 (2011), 1040–1045; англ. пер.: P. G. Grinevich, A. E. Mironov, S. P. Novikov, “Two-dimensional Pauli operator in a magnetic field”, *Low Temp. Phys.*, **37**:10 (2011), 829–833.
- [7] J. E. Avron, R. Seiler, “Paramagnetism for nonrelativistic electrons and Euclidean massless Dirac particles”, *Phys. Rev. Lett.*, **42**:15 (1979), 931–934.
- [8] Y. Aharonov, A. Casher, “Ground state of a spin- $1/2$ charged particle in a two-dimensional magnetic field”, *Phys. Rev. A*, **19**:6 (1979), 2461–2462.
- [9] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, “Основные состояния двумерного электрона в периодическом поле”, *ЖЭТФ*, **79**:3 (1980), 1006–1016; англ. пер.: B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, “Ground states of a two-dimensional electron in a periodic magnetic field”, *Soviet Phys. JETP*, **52**:3 (1980), 511–516.
- [10] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, “Основные состояния в периодическом поле. Магнитно-блеховские функции и векторные расслоения”, *Докл. АН СССР*, **253**:6 (1980), 1293–1297; англ. пер.: B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, “Ground states in a periodic field. Magnetic Bloch functions and vector bundles”, *Soviet Math. Dokl.*, **22** (1980), 240–244.
- [11] С. П. Новиков, “Магнитно-блеховские функции и векторные расслоения. Типичные законы дисперсии и их квантовые числа”, *Докл. АН СССР*, **257**:3 (1981), 538–543; англ. пер.: S. P. Novikov, “Magnetic Bloch functions and vector bundles. Typical dispersion laws and their quantum numbers”, *Soviet Math. Dokl.*, **23**:2 (1981), 298–303.
- [12] А. С. Лыскова, “Об операторе Шрёдингера в магнитном поле”, *УМН*, **36**:2(218) (1981), 189–190; англ. пер.: A. S. Lyskova, “On the Schrödinger operator in a magnetic field”, *Russian Math. Surveys*, **36**:2 (1981), 181–182.

- [13] А. С. Лыскова, “Топологические свойства оператора Шрёдингера в магнитном поле и слабом потенциале”, *УМН*, **36**:5(221) (1981), 181–182; англ. пер.: A. S. Lyskova, “Topological properties of the Schrödinger operator in a magnetic field and with a weak potential”, *Russian Math. Surveys*, **36**:5 (1981), 165–166.
- [14] С. П. Новиков, “Двумерные операторы Шрёдингера в периодических полях”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем.*, т. 23, ВИНТИ, М., 1983, 3–32; англ. пер.: S. P. Novikov, “Two-dimensional Schrödinger operators in periodic fields”, *J. Soviet Math.*, **28**:1 (1985), 1–20.
- [15] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs, “Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential”, *Phys. Rev. Lett.*, **49**:6 (1982), 405–408.
- [16] R. Tao, D. J. Thouless, “Fractional quantization of Hall conductance”, *Phys. Rev. B*, **28**:2 (1983), 1142–1144.
- [17] Л. Э. Генденштейн, “Суперсимметрия в задаче об электроны в неоднородном магнитном поле”, *Письма в ЖЭТФ*, **39**:5 (1984), 234–236; англ. пер.: L. E. Gendenshtein, “Supersymmetry in the problem of an electron in a nonuniform magnetic field”, *JETP Lett.*, **39** (1984), 280–282.
- [18] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. II, Gauthier-Villars, Paris, 1915, xix+567 pp.
- [19] S. P. Novikov, A. P. Veselov, “Exactly solvable 2-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations”, *Solitons, geometry and topology: on the crossroad*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 109–132.
- [20] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31**:1(187) (1976), 55–136; англ. пер.: B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, S. P. Novikov, “Non-linear equations of Korteweg–de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties”, *Russian Math. Surveys*, **31**:1 (1976), 59–146.
- [21] N. J. Hitchin, “Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere”, *J. Differential Geom.*, **31**:3 (1990), 627–710.
- [22] А. И. Бобенко, “Поверхности постоянной средней кривизны и интегрируемые уравнения”, *УМН*, **46**:4(280) (1991), 3–42; англ. пер.: A. I. Bobenko, “Constant mean curvature surfaces and integrable equations”, *Russian Math. Surveys*, **46**:4 (1991), 1–45.
- [23] С. В. Манаков, “Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения”, *УМН*, **31**:5(191) (1976), 245–246.
- [24] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности”, *Докл. АН СССР*, **229**:1 (1976), 15–18; англ. пер.: B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, S. P. Novikov, “The Schrödinger equation in a periodic field and Riemann surfaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:4 (1976), 947–951.
- [25] И. В. Чередник, “Об условиях вещественности в конечнозонном интегрировании”, *Докл. АН СССР*, **252**:5 (1980), 1104–1108; англ. пер.: I. V. Cherednik, “Reality conditions in ‘finite-zone integration’”, *Soviet Phys. Dokl.*, **25**:6 (1980), 450–452.
- [26] А. П. Веселов, С. П. Новиков, “Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения”, *Докл. АН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24; англ. пер.: A. P. Veselov, S. P. Novikov, “Finite-zone, two-dimensional, potential Schrödinger operators. Explicit formulas and evolution equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **30**:3 (1984), 588–591.
- [27] А. П. Веселов, С. П. Новиков, “Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы”, *Докл. АН СССР*, **279**:4 (1984), 784–788; англ. пер.: A. P. Veselov, S. P. Novikov, “Finite-zone, two-dimensional Schrödinger operators. Potential operators”, *Soviet Math. Dokl.*, **30**:3 (1984), 705–708.
- [28] А. П. Веселов, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Two-dimensional periodic Schrödinger operators and Prym’s θ -functions”, *Geometry today* (Rome, 1984), Progr. Math., **60**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1985, 283–301.

- [29] S. P. Novikov, A. P. Veselov, “Two-dimensional Schrödinger operator: inverse scattering transform and evolutionary equations”, *Phys. D*, **18**:1-3 (1986), 267–273.
- [30] П. Г. Гриневич, С. В. Манаков, “Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера, $\bar{\partial}$ -метод и нелинейные уравнения”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:2 (1986), 14–24; англ. пер.: P. G. Grinevich, S. V. Manakov, “Inverse scattering problem for the two-dimensional Schrödinger operator, the $\bar{\partial}$ -method and nonlinear equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **20**:2 (1986), 94–103.
- [31] П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков, “Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шрёдингера”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:4 (1985), 32–42; англ. пер.: P. G. Grinevich, R. G. Novikov, “Analogues of multisoliton potentials for the two-dimensional Schrödinger operator”, *Funct. Anal. Appl.*, **19**:4 (1985), 276–285.
- [32] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, “Двумерная ‘обратная задача рассеяния’ для отрицательных энергий и обобщенно-аналитические функции. I. Энергии ниже основного состояния”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:1 (1988), 23–33; англ. пер.: P. G. Grinevich, S. P. Novikov, “Two-dimensional ‘inverse scattering problem’ for negative energies and generalized-analytic functions. I. Energies below the ground state”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:1 (1988), 19–27.
- [33] И. М. Кричевер, “Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения”, *УМН*, **44**:2(266) (1989), 121–184; англ. пер.: I. M. Krichever, “Spectral theory of two-dimensional periodic operators and its applications”, *Russian Math. Surveys*, **44**:2 (1989), 145–225.
- [34] B. G. Konopel’chenko, “The two-dimensional second-order differential spectral problem: compatibility conditions, general BTs and integrable equations”, *Inverse Problems*, **4**:1 (1988), 151–163.
- [35] И. М. Кричевер, “Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:4 (1980), 45–54; англ. пер.: I. M. Krichever, “Elliptic solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equation and integrable systems of particles”, *Funct. Anal. Appl.*, **14**:4 (1980), 282–290.

Петр Георгиевич Гриневич
(Petr G. Grinevich)

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: pogg@landau.ac.ru

Поступила в редакцию
07.01.2015

Андрей Евгеньевич Миронов
(Andrei E. Mironov)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет
E-mail: mironov@math.nsc.ru

Сергей Петрович Новиков
(Sergey P. Novikov)

University of Maryland, College Park, MD, USA;
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: novikov@ipst.umd.edu