Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, Явная формула
для многомерного символа Конту–Каррера, *УМН*, 2015,
том 70, выпуск 1, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9653>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:36:13

Явная формула для многомерного символа Контю–Каррера

С. О. Горчинский, Д. В. Осипов

В этой заметке приводится явная формула для n -мерного символа Контю–Каррера (см. теорему 1) в случае, когда основное кольцо содержит поле $\mathbb{Q}$.

На протяжении всей заметки пусть A – произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с 1. Пусть $A((t)) = A[[t]][t^{-1}]$ – кольцо рядов Лорана над A , и пусть $\mathcal{L}^n(A) = A((t_1)) \dots ((t_n))$ – кольцо итерированных рядов Лорана над A . Из [1], [2; § 2.1] и [3; § 7] следует, что для любого натурального числа m существует функториальное по A каноническое отображение ∂_m из группы $K_m(A((t)))$ в группу $K_{m-1}(A)$. Для любого натурального числа n определим отображение $\gamma_{n+1}: K_{n+1}(\mathcal{L}^n(A)) \rightarrow A^*$ как композицию $\det \cdot \partial_2 \dots \partial_{n+1}$, где естественное отображение $\det: K_1(A) \rightarrow A^*$ индуцировано определителем. При помощи стандартного вложения $\mathcal{L}^n(A)^* \rightarrow K_1(\mathcal{L}^n(A))$ определим отображение $CC_n: (\mathcal{L}^n(A)^*)^{n+1} \rightarrow A^*$, $CC_n(f_1, \dots, f_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{n+1}\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$, где элемент $\{f_1, \dots, f_{n+1}\} \in K_{n+1}(\mathcal{L}^n(A))$ возникает из произведения в алгебраической K -теории: $K_1(\mathcal{L}^n(A)) \otimes \dots \otimes K_1(\mathcal{L}^n(A)) \rightarrow K_{n+1}(\mathcal{L}^n(A))$. Из свойств этого произведения сразу вытекает, что отображение CC_n кососимметрично, $(n+1)$ -мультипликативно и удовлетворяет соотношению Стейнберга по любой паре аргументов, а также что $CC_n(a, t_1, \dots, t_n) = a$ для любого $a \in A^*$. Отображение CC_n назовем n -мерным символом Контю–Каррера. Это название оправдывается тем, что, как доказано в [3; § 7], отображение CC_1 совпадает с классическим символом Контю–Каррера, определенным в [4; § 2.9] и [5], а отображение CC_2 совпадает с двумерным символом Контю–Каррера, определенным и подробно изучавшимся в [3].

Пусть $\underline{Z}$ – пучок в топологии Зариского на $\text{Spec } A$, ассоциированный с постоянным предпучком $\mathbb{Z}$, и $\underline{Z}(A)$ – группа его глобальных сечений. Имеется естественное вложение $\underline{Z}(A) \hookrightarrow A((t))^*$, определяемое как $\underline{l} \mapsto t^{\underline{l}}$. Аналогично, имеется вложение $\underline{Z}(A)^n \hookrightarrow \mathcal{L}^n(A)^*$, определяемое как $(\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_n) \mapsto t_1^{\underline{l}_1} \dots t_n^{\underline{l}_n}$. Кроме того, имеется естественное вложение (в виде ряда, состоящего только из свободного члена): $A^* \hookrightarrow \mathcal{L}^n(A)^*$.

На группе $\mathbb{Z}^n$ введем лексикографический порядок: $(a_1, \dots, a_n) \geq (b_1, \dots, b_n)$ если и только если $a_n > b_n$, либо $a_n = b_n$ и $(a_1, \dots, a_{n-1}) \geq (b_1, \dots, b_{n-1})$. Обозначим нуль группы $\mathbb{Z}^n$ через $0 = (0, \dots, 0)$. Определим подгруппы в группе $\mathcal{L}^n(A)^*$:

$$\mathbb{V}_{n,+}(A) = \left\{ 1 + \sum_{0 < (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n} a_{i_1, \dots, i_n} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n} \mid \sum_{(i_1, \dots, i_n) > 0} a_{i_1, \dots, i_n} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n} \in \mathcal{L}^n(A) \right\},$$

$$\mathbb{V}_{n,-}(A) = \left\{ 1 + \sum_{0 > (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n} a_{i_1, \dots, i_n} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n} \mid \sum_{(i_1, \dots, i_n) < 0} a_{i_1, \dots, i_n} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n} \in \text{Nil}(\mathcal{L}^n(A)) \right\},$$

где идеал $\text{Nil}(\mathcal{L}^n(A))$ – это множество всех нильпотентных элементов кольца $\mathcal{L}^n(A)$.

Предложение 1. *Вышеописанные вложения подгрупп определяют функториальный по A изоморфизм групп*

$$\underline{Z}(A)^n \times A^* \times \mathbb{V}_{n,+}(A) \times \mathbb{V}_{n,-}(A) \simeq \mathcal{L}^n(A)^*. \quad (1)$$

Пусть $\exp$ и $\log$ – обычные формальные ряды. Группа $A((t))$ становится топологической группой с базой открытых окрестностей нуля, состоящей из подгрупп $t^i A[[t]]$, $i \in \mathbb{Z}$. Индуктивно, рассмотрим группу $\mathcal{L}^n(A)$ как топологическую группу с базой окрестностей нуля, состоящей из подгрупп $U_{V_i, m} = \sum_{i < m} V_i \cdot t_n^i + t_n^m A((t_1)) \dots ((t_{n-1}))[[t_n]]$, где $m \in \mathbb{Z}$ и V_i – открытые подгруппы в $\mathcal{L}^{n-1}(A)$. Пусть A есть $\mathbb{Q}$ -алгебра. Тогда

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

DOI: 10.4213/rm9653

формальный ряд $\log$ сходится на элементах группы $\mathbb{V}_{n,+}(A)$ и определяет ее гомоморфизм в группу $\mathcal{L}^n(A)$. Ряд $\log$, примененный к любому элементу группы $\mathbb{V}_{n,-}(A)$, превращается в конечную сумму и определяет гомоморфизм группы $\mathbb{V}_{n,-}(A)$ в группу $\mathcal{L}^n(A)$.

Для любого $f \in \mathcal{L}^n(A)^*$ определим элемент $\nu(f) \in \mathbb{Z}(A)^n$ как проекцию элемента f в формуле (1) на группу $\mathbb{Z}(A)^n$. Для любых $f_i \in \mathcal{L}^n(A)^*$, где $1 \leq i \leq n$, определим элемент $\nu_n(f_1, \dots, f_n)$ из группы $\mathbb{Z}(A)$ как $\det(\nu(f_1), \dots, \nu(f_n))$. Для любых $f_i \in \mathcal{L}^n(A)^*$, где $1 \leq i \leq n+1$, определим элемент $\text{sgn}(f_1, \dots, f_{n+1})$ из группы $\mathbb{Z}(A)$:

$$\text{sgn}(f_1, \dots, f_{n+1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \nu_n(f_1, \dots, \widehat{f}_k, \dots, f_{n+1}) + \prod_{k=1}^{n+1} (1 + \nu_n(f_1, \dots, \widehat{f}_k, \dots, f_{n+1}))$$

($\widehat{f}_k$ означает пропуск элемента f_k среди аргументов функции ν_n); см. также [6].

Для любого элемента $f \in \mathcal{L}^n(A)$ определим $df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_k} dt_k$. Для любого элемента $g = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n} a_{i_1, \dots, i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \in \mathcal{L}^n(A)$ определим $\text{res}(g dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n) = a_{-1, \dots, -1}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A есть $\mathbb{Q}$ -алгебра. Тогда для любых элементов $f_i \in \mathcal{L}^n(A)^*$, где $1 \leq i \leq n+1$, выполнены следующие равенства. (i) Если f_1 принадлежит подгруппе $\mathbb{V}_{n,+}(A)$ или $\mathbb{V}_{n,-}(A)$, то $CC_n(f_1, \dots, f_{n+1}) = \exp \text{res} \left(\log(f_1) \frac{df_2}{f_2} \wedge \cdots \wedge \frac{df_{n+1}}{f_{n+1}} \right)$, где ряд $\exp$ применяется к nilпотентному элементу из кольца A . (ii) Если $f_1 \in A^*$, то $CC_n(f_1, \dots, f_{n+1}) = f_1^{\nu_n(f_2, \dots, f_{n+1})}$. (iii) Если $f_i = t_1^{l_{i1}} \cdots t_n^{l_{in}}$ для любого $1 \leq i \leq n+1$, где $(l_{i1}, \dots, l_{in}) \in \mathbb{Z}(A)^n$, то $CC_n(f_1, \dots, f_{n+1}) = (-1)^{\text{sgn}(f_1, \dots, f_{n+1})}$.

Отметим, что ввиду предложения 1 явные формулы в пунктах (i)–(iii) теоремы 1 однозначно определяют кососимметричное и $(n+1)$ -мультипликативное отображение CC_n для любой $\mathbb{Q}$ -алгебры A . Для случаев $n=1$ и $n=2$ теорема 1 доказана в [3].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – любое кольцо. Определим кольцо $R = A[\varepsilon]/(\varepsilon^{n+2})$. Для любых элементов $g_i \in \mathcal{L}^n(A)$, где $1 \leq i \leq n+1$, выполнено равенство

$$CC_n(1 + g_1 \varepsilon, \dots, 1 + g_{n+1} \varepsilon) = 1 + \text{res}(g_1 dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_{n+1}) \varepsilon^{n+1},$$

где символ CC_n вычисляется над кольцом R .

Можно показать, что высшие локальные спаривания в n -мерной теории полей классов Паршина–Като [7] строятся при помощи явных формул из теоремы 1 для символа CC_n . Случай $n=2$ подробно описан в [3; § 8].

Список литературы

- [1] D. Grayson, *Lecture Notes in Math.*, **551**, Springer, Berlin, 1976, 217–240. [2] K. Kato, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **27**:3 (1980), 603–683. [3] D. Osipov, X. Zhu, *The two-dimensional Contou-Carrère symbol and reciprocity laws*, 2014, 58 pp., arXiv: 1305.6032v2. [4] P. Deligne, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **73**:1 (1991), 147–181. [5] C. Contou-Carrère, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **318**:8 (1994), 743–746. [6] А. Г. Хованский, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:2 (2006), 55–64. [7] А. Н. Паршин, *Тр. МИАН СССР*, **165**, 1984, 143–170.

С. О. Горчинский (S. O. Gorchinskiy)
Математический институт им. В. А. Стеклова
E-mail: gorchins@mi.ras.ru

Представлено Д. О. Орловым
Принято редколлегией
26.01.2015

Д. В. Осипов (D. V. Osipov)
Математический институт им. В. А. Стеклова
E-mail: d_osipov@mi.ras.ru