Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов, О коммутирующих
разностных операторах ранга 2, *УМН*, 2015, том 70, вы-
пуск 3, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 04:11:41

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О коммутирующих разностных операторах ранга 2

Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов

В этой работе изучаются одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга два, отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым.

Если два разностных оператора $L_k = \sum_{j=N_-}^{N_+} u_j(n)T^j$, $L_s = \sum_{j=M_-}^{M_+} v_j(n)T^j$, $n \in \mathbb{Z}$, порядков $k = N_+ + N_-$ и $s = M_- + M_+$, где T — оператор сдвига, коммутируют, то существует ненулевой полином $F(z, w)$ такой, что $F(L_k, L_s) = 0$ [1]. Полином F задает спектральную кривую $\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z, w) = 0\}$ пары L_k, L_s . Спектральная кривая параметризует совместные собственные числа, а именно, если $L_k\psi = z\psi$, $L_s\psi = w\psi$, то $(z, w) \in \Gamma$. Рангом l пары L_k, L_s называется размерность пространства совместных собственных функций при фиксированных собственных числах $l = \dim\{\psi: L_k\psi = z\psi, L_s\psi = w\psi\}$, при этом предполагается, что точка $(z, w) \in \Gamma$ находится в общем положении. Максимальное коммутативное кольцо разностных операторов, содержащее L_k и L_s , изоморфно кольцу мероморфных функций на спектральной кривой с полюсами в выделенных точках $q_1, \dots, q_m$ (см. [2]). Такие операторы называются m -точечными. Разностные операторы ранга 1 найдены в [1] и [3]. Задача классификации m -точечных разностных операторов ранга l решена в [2], тем не менее нахождение операторов при $l > 1$ — открытая проблема. Одноточечные операторы ранга два, отвечающие эллиптическим спектральным кривым, найдены в [2], операторы с полиномиальными коэффициентами среди этих операторов найдены в [4].

В настоящей работе рассматриваются одноточечные операторы ранга два $L_4 = \sum_{i=-2}^2 u_i(n)T^i$, $L_{4g+2} = \sum_{i=-(2g+1)}^{2g+1} v_i(n)T^i$, $u_2 = v_{2g+1} = 1$, отвечающие гиперэллиптической спектральной кривой Γ рода g , заданной уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \dots + c_0,$$

при этом $L_4\psi = z\psi$, $L_{4g+2}\psi = w\psi$, $\psi = \psi(n, P)$, $P = (z, w) \in \Gamma$. Совместные собственные функции операторов L_4 и L_{4g+2} удовлетворяют уравнению

$$\psi(n+1, P) = \chi_1(n, P)\psi(n-1, P) + \chi_2(n, P)\psi(n, P)$$

(см. [2]), функции $\chi_1(n, P)$ и $\chi_2(n, P)$ рациональны на Γ и имеют $2g$ простых полюсов, зависящих от n . Функция $\chi_2(n, P)$ дополнительно имеет простой полюс в бесконечно удаленной точке. Пусть σ — инволюция на Γ , $\sigma(z, w) = \sigma(z, -w)$. Основные результаты этой работы — теоремы 1–4.

ТЕОРЕМА 1. Если $\chi_1(n, P) = \chi_1(n, \sigma(P))$, $\chi_2(n, P) = -\chi_2(n, \sigma(P))$, то L_4 имеет вид

$$L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n,$$

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований (дог. № 14.B25.31.0029).

DOI: 10.4213/rm9655

при этом $\chi_1 = -V_n Q_{n+1}/Q_n$, $\chi_2 = w/Q_n$. Функции V_n , W_n , Q_n удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = Q_{n-1}Q_{n+1}V_n + Q_n(Q_{n+2}V_{n+1} + Q_{n+1}(z - V_n - V_{n+1} - W_n)). \quad (1)$$

Замечательно, что уравнение (1) линеаризуется. А именно, если в (1) заменить n на $n+1$ и от полученного уравнения отнять (1), то результат делится на $Q_{n+1}(z)$. В итоге приходим к линейному уравнению на $Q_n(z)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Функции $Q_n(z)$, V_n , W_n удовлетворяют уравнению

$$Q_{n-1}V_n + Q_n(z - V_n - V_{n+1} - W_n) - Q_{n+2}(z - V_{n+1} - V_{n+2} - W_{n+1}) - Q_{n+3}V_{n+2} = 0.$$

При $g = 1$ уравнение (1) позволяет выразить V_n , W_n через произвольный функциональный параметр γ_n .

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор $L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n$, где

$$V_n = \frac{F_1(\gamma_n)}{(\gamma_n - \gamma_{n-1})(\gamma_n - \gamma_{n+1})}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1},$$

а $F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$, коммутирует с оператором

$$L_6 = T^3 + (V_n + V_{n+1} + V_{n+2} + W_n - \gamma_{n+2})T + V_n(V_{n-1} + V_n + V_{n+1} + W_n - \gamma_{n-1})T^{-1} + V_{n-2}V_{n-1}V_n T^{-3}.$$

Спектральная кривая пары L_4 , L_6 задается уравнением $w^2 = F_1(z)$.

Теорема 1 позволяет эффективно строить примеры коммутирующих операторов.

ТЕОРЕМА 2. Оператор $L_4 = (T + (r_3 n^3 + r_2 n^2 + r_1 n + r_0)T^{-1})^2 + g(g+1)r_3 n$, $r_3 \neq 0$, коммутирует с разностным оператором L_{4g+2} .

Теоремы 1 и 2 внешне напоминают аналогичные результаты для дифференциальных операторов (см. [5]), но получить эти теоремы непосредственно из [5] не удастся.

ТЕОРЕМА 3. Оператор $L_4 = (T + (r_1 a^n + r_0)T^{-1})^2 + r_1(a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1)a^{n-g}$, $r_1 \neq 0$, $a \neq 0$, где $a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1 \neq 0$, коммутирует с разностным оператором L_{4g+2} .

ТЕОРЕМА 4. Оператор

$$L_4 = (T + (r_1 \cos n + r_0)T^{-1})^2 - 4r_1 \sin \frac{g}{2} \sin \left(\frac{g+1}{2} \right) \cos \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad r_1 \neq 0,$$

коммутирует с разностным оператором L_{4g+2} .

Список литературы

- [1] И. М. Кричевер, УМН, **33**:4(202) (1978), 215–216. [2] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, УМН, **58**:3(351) (2003), 51–88. [3] D. Mumford, *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry* (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978, 115–153. [4] А. Е. Миронов, Матем. сб., **198**:10 (2007), 57–66. [5] А. Е. Mironov, *Invent. Math.*, **197**:2 (2014), 417–431.

Г. С. Маулешова (G. S. Mauleshova)
Новосибирский государственный университет
E-mail: mauleshova_gs@mail.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
03.09.2014

А. Е. Миронов (A. E. Mironov)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
Лаборатория геометрических методов математической
физики им. Н. Н. Боголюбова МГУ
E-mail: mironov@math.nsc.ru