Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Буркин, О пороговой вероятности для свойства
планарности случайного подграфа регулярного графа,
УМН, 2015, том 70, выпуск 6, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:32:24

О пороговой вероятности для свойства планарности случайного подграфа регулярного графа

А. В. Буркин

1. История задачи и новые результаты. В 60-х годах XX в. П. Эрдёш и А. Реньи предложили модель случайного графа, в котором каждое ребро появляется независимо от остальных ребер с вероятностью p . Рассматривается вероятностное пространство $G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n,p})$, где Ω_n – множество всех неориентированных графов $G = (V_n, E)$ без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, $P_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}$.

Для $G(n, p)$ был получен ряд результатов, описывающих асимптотические свойства случайного графа при $n \rightarrow \infty$ (см. [1]–[3]).

Определим несколько понятий, используемых в настоящей статье. Обозначим $G \models \mathcal{A}$ множество всех графов, обладающих свойством $\mathcal{A}$. *Пороговой вероятностью* называется такая функция $p^* = p^*(n)$, что $P_{n,p}(G \models \mathcal{A}) \rightarrow 0$ при $p = o(p^*)$, $n \rightarrow \infty$, и $P_{n,p}(G \models \mathcal{A}) \rightarrow 1$ при $p = w(p^*)$, $n \rightarrow \infty$ (или наоборот). Здесь $f(n) = o(g(n))$ ($f(n) = w(g(n))$) означает, что для любого $C > 0$ существует $n_0 > 0$ такое, что для любого $n > n_0$ выполнено $|f(n)| < C|g(n)|$ ($C|g(n)| < |f(n)|$). Для этих отношений мы также будем использовать обозначения $f(n) \ll g(n)$ и $f(n) \gg g(n)$. Функция $p^* = p^*(n)$ называется *точной пороговой вероятностью*, если $P_{n,p}(G \models \mathcal{A}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, при $p \leq cp^*$, где $c < 1$, и $P_{n,p}(G \models \mathcal{A}) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, при $p \geq cp^*$, где $c > 1$ (или наоборот). Будем говорить, что случайный граф обладает свойством $\mathcal{A}$ *асимптотически почти наверное (а.п.н.)*, если $P_{n,p}(G \models \mathcal{A}) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

П. Эрдёш и А. Реньи в [4] доказали, что точной пороговой вероятностью для планарности $G(n, p)$ является функция $p = 1/n$. Их доказательство содержало небольшую ошибку, которая была исправлена позже Т. Лучаком и Дж. Вирманом в [5].

А. Фриз и М. Кривелевич [6] получили следующее обобщение классического утверждения. Пусть $G(n)$ – последовательность конечных графов с минимальной степенью $t = t(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Образем из нее последовательность случайных подграфов $G_p = G_p(n)$, добавляя в $G_p(n)$ каждое ребро $G(n)$ независимо с вероятностью $p = p(n)$.

ТЕОРЕМА 1 (А. Фриз, М. Кривелевич). *В указанных обозначениях для любого $\varepsilon > 0$ при $p = (1 + \varepsilon)/t$ случайный граф G_p а.п.н. непланарен.*

Будем рассматривать далее последовательности регулярных графов $G(n)$ степени $N_1 = N_1(n)$ с $N_1 \rightarrow \infty$. Количество вершин графа $G(n)$ будем обозначать $N = N(n)$.

Справедливо следующее несложное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть для $G(n)$ выполнено $N \ll N_1^4$. Тогда при $p \leq c/N_1$, где $c < 1$, случайный граф $G_p = G_p(n)$ а.п.н. планарен.*

Из этого предложения и предыдущей теоремы следует, что при $N \ll N_1^4$ функция $p = 1/N_1$ является точной пороговой вероятностью для свойства планарности.

Рассмотрим случай, когда $N \gg N_1^4$. Нетрудно показать, что верно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В указанных условиях функция $p = o((1/N_1)(N_1^4/N)^{1/9})$ не может являться пороговой вероятностью для свойства планарности G_p .*

В то же время в силу теоремы Фриза–Кривелевича пороговая вероятность никогда (с точностью до умножения на константу) не превосходит $1/N_1$.

Интересует вопрос, насколько малой может быть пороговая вероятность. Оказывается, что на некоторых последовательностях графов достигается “нижняя оценка”, определенная предложением 2. Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2. *Существует такая последовательность регулярных графов $G(n)$ с $N_1 \rightarrow \infty$ и $N \gg N_1^4$, что пороговая вероятность для свойства планарности $G_p(n)$ есть функция $p^* = (1/N_1)(N_1^4/N)^{1/9}$. При этом пороговая вероятность не является точной.*

2. Идея доказательства. Рассмотрим последовательность графов $G(n, r, s) = (V(n, r), E(n, r, s))$, в которых $V(n, r) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = r\}$, $E(n, r, s) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s\}$, где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обозначает евклидово скалярное произведение.

Такие графы называются *дистанционными*, поскольку ребра графа соответствуют парам вершин, находящихся на определенном расстоянии друг от друга, в данном случае на расстоянии $\sqrt{2(r-s)}$. Такие графы возникают в задачах комбинаторной геометрии (см. [7]–[13]).

Ясно, что графы $G(n, r, s)$ – регулярные степени $N_1 = C_r^s C_{n-r}^{r-s}$ с числом вершин $N = C_n^r$.

Будем называть *случайными дистанционными графами* $G_p(n, r, s)$ случайные подграфы графов $G(n, r, s)$.

Заметим, что $G_p(n, 1, 0) = G(n, p)$, т.е. $G_p(n, r, s)$ в некотором смысле обобщает классическую модель Эрдёша–Реньи.

Удается доказать теорему о пороговой вероятности для свойства планарности графа $G_p(n, r, s)$, из которой следует теорема 2. Напомним, что $f(n) \asymp g(n)$ означает, что существуют такие положительные n_1, C_1, C_2 , что $C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n)$ для всех $n > n_1$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $r, s \in \mathbb{N}$ фиксированы, причем $N_1 = o(N^{1/4})$, т.е. $s > 3r/4$. Тогда пороговой вероятностью для свойства планарности $G_p(n, r, s)$ является функция $p = (1/N_1)(N_1^4/N)^{1/9} \asymp n^{-(6r-5s)/9}$. Кроме того, если $p \sim cn^{-(6r-5s)/9}$, то $P(G_p(n, r, s) \text{ планарен}) \sim P(X_{K_{3,3}} = 0) \rightarrow e^{-\lambda}$, где $X_{K_{3,3}}$ есть количество $K_{3,3}$ в $G_p(n, r, s)$, а $\lambda = c^9 C_r^s / (72r!((r-s)!)^5)$.*

Доказательство теоремы 3 использует полученные автором результаты, касающиеся распределения числа копий фиксированных графов в случайных дистанционных графах $G_p(n, r, s)$ с постоянными r и s .

Список литературы

- [1] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, xviii+498 pp. [2] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000, xii+333 pp. [3] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2000, 256 с. [4] P. Erdős, A. Rényi, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61. [5] T. Łuczak, J. C. Wierman, *Combinatorica*, **9:1** (1989), 39–49. [6] A. Frieze, M. Krivelevich, *Combin. Probab. Comput.*, **22:5** (2013), 722–732. [7] А. М. Райгородский, *Докл. РАН*, **371:5** (2000), 600–603. [8] А. М. Райгородский, *УМН*, **56:1**(337) (2001), 107–146. [9] А. М. Райгородский, *Матем. сб.*, **193:10** (2002), 139–160. [10] А. М. Райгородский, *Матем. сб.*, **196:1** (2005), 123–156. [11] А. М. Райгородский, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69:3** (2005), 81–108. [12] A. M. Raigorodskii, *Thirty essays on geometric graph theory*, Springer, Berlin, 2013, 429–460. [13] A. M. Raigorodskii, *Combinatorica*, **32:1** (2012), 111–123.

А. В. Буркин (A. V. Burkin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: a.v.burkin@gmail.com

Представлено Ю. С. Ильяшенко

Принято редколлегией

12.02.2015