Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Буфетов, О действии группы диффеоморфизмов на детерминантные меры, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 5, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:37:32

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О действии группы диффеоморфизмов на детерминантные меры

А. И. Буфетов

Главный результат сообщения – квазиинвариантность широкого класса детерминантных точечных процессов на прямой под действием группы диффеоморфизмов с компактным носителем.

Напомним, что пространство конфигураций $\text{Conf}(\mathbb{R})$ есть пространство чисто атомарных радоновых мер, снабженное широкой топологией (topologie vague). Иными словами, конфигурация $X = \{x\}$ есть подмножество $\mathbb{R}$ без точек накопления. Символом g будем обозначать ограниченную измеримую функцию на $\mathbb{R}$ такую, что функция $g - 1$ имеет компактный носитель. Функции g отвечает мультипликативный функционал Ψ_g на пространстве $\text{Conf}(\mathbb{R})$, задаваемый формулой $\Psi_g(X) = \prod_{x \in X} g(x)$.

Пусть μ есть σ -конечная, не имеющая атомов борелева мера на $\mathbb{R}$. Пусть $L \subset L_2(\mathbb{R}, \mu)$ – замкнутое подпространство такое, что проектор Π на него имеет ядро (для ядра сохраняем тот же символ Π) специального вида: существуют открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}$ полной меры ($\mu(\mathbb{R} \setminus U) = 0$) и заданные на U гладкие функции A, B такие, что

$$\Pi(x, y) = \frac{A(x)B(y) - A(y)B(x)}{x - y}, \quad x \neq y. \quad (1)$$

На диагонали полагаем $\Pi(x, x) = A'(x)B(x) - A(x)B'(x)$. Согласно теореме Макки–Сошникова [3], [6], ядро Π задает на $\text{Conf}(\mathbb{R})$ детерминантную меру P_Π , однозначно определяемую выполненным для всех g условием $E_\Pi \Psi_g = \det(1 + \sqrt{g - 1} \Pi \sqrt{g - 1})$; детерминант Фредгольма корректно определен, так как проектор Π задается ядром, а функция $g - 1$ имеет компактный носитель.

Предположим дополнительно, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\Pi(x, x)}{1 + x^2} d\mu(x) < +\infty. \quad (2)$$

Если P – борелевская вероятностная мера на пространстве конфигураций на $\mathbb{R}$, а $q \in \mathbb{R}$, то символом P^q будем обозначать редуцированную меру Пальма меры P по отношению к точке q , символом $P^{q_1, \dots, q_l}$ – итерированную редуцированную меру Пальма (ср., например, [1], [2], [5]). Пусть $p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{R}$ различны. Для $R > 0$, $\varepsilon > 0$ и конфигурации X на $\mathbb{R}$ положим

$$\bar{\Psi}_{R, \varepsilon}(p_1, \dots, p_l; q_1, \dots, q_l; X) = C(R, \varepsilon) \prod_{x \in X, |x| \leq R, \min |x - q_i| \geq \varepsilon} \prod_{i=1}^l \left(\frac{x - p_i}{x - q_i} \right)^2,$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/rm9662

где константа $C(R, \varepsilon)$ выбрана так, что

$$\int_{\text{Conf}(\mathbb{R})} \bar{\Psi}_{R, \varepsilon}(p_1, \dots, p_l; q_1, \dots, q_l; X) dP_{\Pi}^{q_1, \dots, q_l} = 1. \quad (3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если ядро Π удовлетворяет (2), (1), то предел

$$\bar{\Psi}(p_1, \dots, p_l; q_1, \dots, q_l; X) = \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \Psi_{R, \varepsilon}(p_1, \dots, p_l; q_1, \dots, q_l; X)$$

существует $P_{\Pi^{q_1, \dots, q_l}}$ -почти наверное и в $L_1(\text{Conf}(\mathbb{R}), P_{\Pi^{q_1, \dots, q_l}})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – борелев автоморфизм, сохраняющий класс меры μ и тождественный в дополнении к ограниченному борелевскому множеству $V \subset \mathbb{R}$. Для P_{Π} -почти всех $X \in \text{Conf}(\mathbb{R})$, если $X \cap V = \{q_1, \dots, q_l\}$, то

$$\begin{aligned} \frac{d(P_{\Pi} \circ F)}{dP_{\Pi}}(X) &= \bar{\Psi}(F(q_1), \dots, F(q_l); q_1, \dots, q_l; X) \\ &\times \frac{\det(\Pi(F(q_i), F(q_j)))_{i,j=1, \dots, l}}{\det(\Pi(q_i, q_j))_{i,j=1, \dots, l}} \frac{d(\mu \circ F)}{d\mu}(q_1) \dots \frac{d(\mu \circ F)}{d\mu}(q_l). \end{aligned} \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Подмножество V можно, разумеется, выбирать по-разному; значение производной Радона–Никодима от этого не изменится. Теорема 2 применима, например, к синус-процессу, к процессу с бесселевым ядром, к процессу с ядром Эйри и т. п.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 2 допускает дискретный аналог: детерминантные меры на $\mathbb{Z}$ с ядром, допускающим представление вида (1), квазиинвариантны под действием бесконечной симметрической группы. В случае гамма-ядра эта квазиинвариантность установлена Г. И. Олшанским [4].

Список литературы

- [1] D. J. Daley, D. Vere-Jones, *An introduction to the theory of point processes*, v. I: *Elementary theory and methods*, 2nd ed., Probab. Appl. (N. Y.), Springer-Verlag, New York, 2003, xxii+469 pp.; v. II: *General theory and structure*, 2nd ed., Probab. Appl. (N. Y.), Springer-Verlag, New York, 2008, xviii+573 pp. [2] O. Kallenberg, *Probabilistic symmetries and invariance principles*, Probab. Appl. (N. Y.), Springer, New York, 2005, xii+510 pp. [3] O. Macchi, *Adv. in Appl. Probab.*, **7** (1975), 83–122. [4] G. Olshanski, *Adv. Math.*, **226**:3 (2011), 2305–2350. [5] T. Shirai, Y. Takahashi, *J. Funct. Anal.*, **205**:2 (2003), 414–463. [6] А. Б. Сошников, *УМН*, **55**:5(335) (2000), 107–160; англ. пер.: A. Soshnikov, *Russian Math. Surveys*, **55**:5 (2000), 923–975.

Александр Игоревич Буфетов
(Alexander I. Bufetov)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: bufetov@mi.ras.ru

Представлено Г. И. Олшанским
Принято редколлегией

06.04.2015