Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Печень, Н. Б. Ильин, О критических точках целевого функционала в задаче максимизации наблюдаемых кубита, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 4, 211–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9663>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:19:02

О критических точках целевого функционала в задаче максимизации наблюдаемых кубита

А. Н. Печень, Н. Б. Ильин

Изолированная от окружения n -уровневая управляемая квантовая система описывается уравнением Шрёдингера для унитарного оператора эволюции U_t :

$$i \frac{dU_t}{dt} = (H_0 + f(t)V)U_t, \quad U_{t=0} = \mathbb{I}. \quad (1)$$

Здесь H_0 и V – эрмитовы $(n \times n)$ -матрицы и $f(t) \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ – управление. Предполагается, что $[H_0, V] \neq 0$. Требуется найти $f(t)$, которая максимизирует целевой функционал $\mathcal{J}_A[f] = \text{Tr}(U_T \rho_0 U_T^\dagger A)$, где ρ_0 – начальная матрица плотности системы, A – эрмитова матрица и $T > 0$ – конечное время. Функционал $\mathcal{J}_A$ описывает среднее значение наблюдаемой A в момент времени T . Важной проблемой является анализ локальных максимумов целевого функционала, называемых ловушками [1]–[3], так как ловушки, если они существуют, затрудняют поиск глобально оптимальных решений. В работах [1], [2] высказано предположение об отсутствии ловушек в типичных задачах управления квантовыми системами. В работах [4], [5] доказано отсутствие ловушек для двухуровневых квантовых систем при достаточно больших T . В работе [5] доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\text{Tr} V = 0$ и $T \geq T_0$, где $T_0 = \pi / \|H_0 - (1/2) \text{Tr} H_0 + f_0 V\|$ и $f_0 = -\text{Tr}(H_0 V) / \text{Tr}(V^2)$, то все максимумы целевого функционала $\mathcal{J}_A$ – глобальные.*

Из результатов работы [5] следует, что никакое управление $f \neq f_0$ не является ловушкой для любого $T > 0$. Таким образом, только управление $f = f_0$ может быть ловушкой при малых T .

Далее рассматривается частный случай уравнения Шрёдингера (1) вида:

$$i \frac{dU_t}{dt} = (\sigma_z + f(t)(v_x \sigma_x + v_y \sigma_y))U_t. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – матрицы Паули. В этом случае $f_0 = 0$ и $T_0 = \pi$. В [6] доказано, что ловушки в рассматриваемой системе возможны при малых T , но только если векторы $\mathbf{r}^0 = \text{Tr}(\rho_0 \boldsymbol{\sigma})$, $\mathbf{a} = \text{Tr}(A \boldsymbol{\sigma})$ и $\mathbf{v} = (1/2) \text{Tr}(V \boldsymbol{\sigma})$ ($\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$) лежат в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{h}_0 = \text{Tr}(H_0 \boldsymbol{\sigma})$. В работе [6] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $[(\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0)_z \cos 2T + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}^0) \sin 2T](\mathbf{v} \times \mathbf{a})_z > 0$ и $(\mathbf{r}^0 \times \mathbf{a})_z \cos 2T < (\mathbf{r}^0 \cdot \mathbf{a}) \sin 2T$, а векторы $\mathbf{r}^0, \mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$ лежат в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{h}_0$. Тогда существует такое T_1 , что для всех $T \leq T_1$ управление $f(t) = 0$ является ловушкой для задачи максимизации целевого функционала $\mathcal{J}_A$.*

Несмотря на этот результат, проблема анализа ловушек для двухуровневых систем не была решена до конца. Так, для системы (2) согласно теореме 1 ловушки отсутствуют для всех $T \geq T_0 = \pi$ и согласно теореме 2 ловушки существуют для всех $T \leq T_1$, причем величина T_1 не конкретизируется. Ниже мы доказываем, что нижнюю границу на T для отсутствия ловушек можно уменьшить.

ТЕОРЕМА 3. *При $T > \pi/2$ управление $f = 0$ не является ловушкой в задаче максимизации целевого функционала $\mathcal{J}_A$ для системы (2).*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/rm9663

Для того чтобы доказать, что управление $f = 0$ не ловушка, покажем, что если $f = 0$ – критическая точка, то это либо глобальный экстремум, либо седловая точка. В последнем случае достаточно убедиться, что гессиан в точке $f = 0$ не знакоопределен. В работе [6] доказано, что управление $f = 0$ может оказаться ловушкой, только если векторы $\mathbf{r}^0$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$ лежат в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{h}_0$. При этом условии на векторы $\mathbf{r}^0$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$ в [5] получено выражение для гессиана в точке $f = 0$ через векторы $\mathbf{r} = \text{Tr}(U_T \rho U_T^\dagger \boldsymbol{\sigma})$ и $\mathbf{r}_t = \sin(2t - \phi)\mathbf{e}_x + \cos(2t - \phi)\mathbf{e}_y$, где $\phi = \arctan(v_y/v_x)$:

$$(f, Hf) = \int_0^T \int_0^T f(t_1)f(t_2) \text{Hess}_f \mathcal{J}_A(t_2, t_1) dt_1 dt_2,$$

$$\text{Hess}_f \mathcal{J}_A(t_2, t_1) = \begin{cases} -\frac{v^2}{4}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{t_2})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_{t_1}), & t_2 \geq t_1, \\ -\frac{v^2}{4}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{t_1})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_{t_2}), & t_2 < t_1. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \varepsilon/2, \\ 1/\varepsilon, & |t| \leq \varepsilon/2. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда для всех $f \in C[0, T]$ и всех $t \in (\varepsilon/2, T - \varepsilon/2)$, $\varepsilon < T$, имеем $\int_0^T \delta_\varepsilon(\tau - t)f(\tau) d\tau = f(t) + O(\varepsilon)$. Пусть $f_\lambda(t) = \delta_\varepsilon(t - \lambda)$, $\varepsilon/2 < \lambda < T - \varepsilon/2$. Подставляя функцию $f_\lambda(t)$ в выражение для гессиана (3), получим $(f_\lambda, Hf_\lambda) = -(v^2/4)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\lambda)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_\lambda) + O(\varepsilon)$, где

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\lambda)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_\lambda) = \frac{|\mathbf{r}| |\mathbf{a}|}{2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) - \cos(4\lambda - 2\phi + \phi_1 + \phi_2)). \quad (5)$$

Здесь $\phi_1 = \arctan(r_y/r_x)$, $\phi_2 = \arctan(a_y/a_x)$. Если $\cos(\phi_1 - \phi_2) \neq \pm 1$, то из формулы (5) вытекает, что функция $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\lambda)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_\lambda)$ принимает значения разных знаков на отрезке $[0, \pi/2]$. В этом случае выбираем λ_1 и λ_2 так, чтобы $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\lambda_1})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_{\lambda_1}) < 0$ и $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\lambda_2})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_{\lambda_2}) > 0$, и затем выбираем ε настолько малым, чтобы знак (f_λ, Hf_λ) определялся знаком $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\lambda)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_\lambda)$. Тогда $(f_{\lambda_1}, Hf_{\lambda_1}) > 0$ и $(f_{\lambda_2}, Hf_{\lambda_2}) < 0$, т.е. гессиан в точке $f = 0$ не является знакоопределенной функцией. В этом случае управление $f = 0$ является седловой точкой. Если же $\cos(\phi_1 - \phi_2) = \pm 1$, то векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ параллельны. Тогда $\mathcal{J}_A[0] = (1 \pm |\mathbf{a}| |\mathbf{r}|)/2$, что является глобальным экстремумом целевого функционала.

Список литературы

- [1] H. A. Rabitz, M. M. Hsieh, C. M. Rosenthal, *Science*, **303**:5666 (2004), 1998–2001.
 [2] T.-S. Ho, H. Rabitz, *J. Photochem. Photobiol. A*, **180**:3 (2006), 226–240. [3] P. de Fouquieres, S. G. Schirmer, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **16**:3 (2013), 1350021.
 [4] A. Pechen, N. Il'in, *Phys. Rev. A*, **86**:5 (2012), 052117. [5] А. Н. Печень, Н. Б. Ильин, *Тр. МИАН*, **285**, 2014, 244–252. [6] А. Печень, Н. Ильин, *Тр. МИАН*, **289**, 2015, 227–234.

А. Н. Печень (A. N. Pechen)

Математический институт им. В. А. Стеклова
 Российской академии наук
E-mail: pechen@mi.ras.ru

Представлено А. Г. Сергеевым

Принято редколлегией
 10.04.2015

Н. Б. Ильин (N. B. Il'in)

Математический институт им. В. А. Стеклова
 Российской академии наук
E-mail: ilyn@mi.ras.ru