Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Жуковский, Спектры формул первого порядка малой кванторной глубины, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 6, 209–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:07:07

Спектры формул первого порядка малой кванторной глубины

М. Е. Жуковский

Асимптотическое поведение вероятностей свойств первого порядка случайного графа Эрдёша–Реньи $G(n, n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, в контексте законов нуля или единицы было широко изучено в работах [1]–[7]. Прежде чем перейти к формулировкам соответствующих результатов, напомним основные определения.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 1$. Рассмотрим множества $\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер на множестве вершин $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Случайный граф Эрдёша–Реньи [8], [9] – это случайный элемент $G(n, p)$, заданный на некотором вероятностном пространстве с вероятностной мерой $\mathbf{P}$ и принимающий значения в множестве Ω_n , с распределением $\mathbf{P}_{n,p}$ на $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, определенным следующим образом: $\mathbf{P}_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n - |E|}$. Будем обозначать $\{G(n, p) \models L\}$ событие “граф $G(n, p)$ обладает свойством L ”.

Говорят, что случайный граф *подчиняется закону нуля или единицы*, если вероятность выполнения каждого свойства первого порядка (см. [9], [10]) стремится либо к 0, либо к 1. Случайный граф *подчиняется k -закону нуля или единицы*, если вероятность выполнения каждого свойства, записываемого с помощью формулы первого порядка с кванторной глубиной, не превосходящей k (см. [10]), стремится либо к 0, либо к 1. Обозначим $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_k$ множество всех свойств первого порядка и множество всех свойств, записываемых с помощью формул первого порядка с кванторной глубиной, не превосходящей k , соответственно.

В [1] показано, что если $p = n^{-\alpha+o(1)}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$, то случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы. В данной работе мы ограничиваемся случаем $0 < \alpha < 1$, который представляет наибольший интерес (подробное описание результатов для случайного графа $G(n, p)$ при $p = O(1/n)$ можно найти в [1]). Если $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ закону нуля или единицы не подчиняется (см. [2]).

Если случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы для некоторого $\alpha \in (0, 1)$ и некоторого $k \in \mathbb{N}$, то говорят, что α является элементом *спектра числа k* . Напомним, что в [11] были рассмотрены два понятия спектра формулы первого порядка $L \in \mathcal{L}$. Первое определение возникает при рассмотрении вероятностей проведения ребра вида $p = n^{-\alpha}$. Множество $S^1(L)$ состоит из всех таких $\alpha \in (0, 1)$, что не выполнено следующее свойство: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(G(n, n^{-\alpha}) \models L)$ существует и равен либо 0, либо 1. Второе определение возникает при рассмотрении более широкого класса вероятностей $p = n^{-\alpha+o(1)}$. Множество $S^2(L)$ состоит из всех таких $\alpha \in (0, 1)$, что не выполнено следующее свойство: существуют $\delta \in \{0, 1\}$ и $\varepsilon > 0$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(G(n, p(n)) \models L) = \delta$ для любого $p(n) \in (n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon})$. Пусть $k \geq 1$. Обозначим S_k^1 и S_k^2 объединения множеств $S^1(L)$ и $S^2(L)$ соответственно по всем $L \in \mathcal{L}_k$.

В [12] доказано, что при достаточно больших k множества S_k^1 и S_k^2 бесконечны. Известно также [13], что у любой предельной точки множества S_k^2 (множества S_k^1) существует левая полуокрестность, не содержащая точек множества S_k^2 (множества S_k^1). В [11] доказано, что минимальные k_1 и k_2 , при которых множества $S_{k_1}^1$ и $S_{k_2}^2$ бесконечны, принадлежат множествам $\{4, \dots, 12\}$ и $\{4, \dots, 10\}$ соответственно. Более того, в той же работе мы оценили наименьшие и наибольшие предельные точки множеств S_k^1 , S_k^2 . Обозначим $(S_k^1)'$ и $(S_k^2)'$ множества предельных точек множеств S_k^1 и S_k^2

соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}\min(S_k^1)' &\in \left[\frac{1}{k-2}, \frac{1}{k-11} \right] && \text{при } k \geq 15, \\ \min(S_k^2)' &\in \left[\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-7} \right] && \text{при } k \geq 10, \\ \max(S_k^j)' &\in \left[1 - \frac{1}{2^{k-13}}, 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \right] && \text{при } k \geq 16, \quad j \in \{1, 2\}.\end{aligned}$$

В настоящей работе мы получили новую оценку на наименьшую предельную точку спектра при малых k .

ТЕОРЕМА 1. Для любого $k \geq 5$ имеет место включение $1/[k/2] \in (S_k^1)'$.

Тем самым мы улучшили верхнюю оценку на наименьшую предельную точку спектра S_k^1 при всех $k \leq 20$ и верхнюю оценку на наименьшую предельную точку спектра S_k^2 при всех $k \leq 12$.

Из теоремы 1 следует, что наименьшее k , при котором спектр S_k^1 (S_k^2) бесконечен, равно либо 4, либо 5.

Кроме того, мы улучшили нижнюю оценку на наибольшую предельную точку спектра (в том числе и для малых k).

ТЕОРЕМА 2. Для любого $k \geq 8$ имеет место включение $1 - 1/2^{k-5} \in (S_k^1)'$.

Для доказательства теорем мы для каждого k (не меньшего 5 в случае теоремы 1 и не меньшего 8 в случае теоремы 2) и $m \in \mathbb{N}$ построили пример такого свойства L , выражаемого формулой первого порядка кванторной глубины k , что существует последовательность случайных графов $G(n_i, n_i^{-\alpha_m})$, обладающая свойством L с асимптотической вероятностью, отличной от 0 и от 1. Последовательность $\{\alpha_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ определяется следующим образом: $\alpha_m = 1/[k/2] + 1/([k/2](m + [k/2] - 1))$ в случае теоремы 1 и $\alpha_m = 1 - 1/2^{k-5} + 1/(2^{k-5}m)$ в случае теоремы 2. Так как в случае теоремы 1 $\alpha_m \rightarrow 1/[k/2]$, а в случае теоремы 2 $\alpha_m \rightarrow 1 - 1/2^{k-5}$ при $m \rightarrow \infty$, то из существования таких свойств следуют утверждения теорем.

Список литературы

- [1] S. Shelah, J. Spencer, *J. Amer. Math. Soc.*, **1:1** (1988), 97–115. [2] М. Е. Жуковский, А. М. Райгородский, *УМН*, **70:1**(421) (2015), 35–88; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, A. M. Raigorodskii, *Russian Math. Surveys*, **70:1** (2015), 33–81. [3] М. Е. Жуковский, *Докл. РАН*, **436:1** (2011), 14–18; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, *Dokl. Math.*, **83:1** (2011), 8–11. [4] М. Zhukovskii, *Discrete Math.*, **312:10** (2012), 1670–1688. [5] М. Е. Жуковский, *Докл. РАН*, **454:1** (2014), 23–26; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, *Dokl. Math.*, **89:1** (2014), 16–19. [6] М. Е. Жуковский, *Матем. сб.*, **206:4** (2015), 13–34; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, *Sb. Math.*, **206:4** (2015), 489–509. [7] М. Е. Жуковский, *Матем. заметки*, **97:2** (2015), 203–216; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, *Math. Notes*, **97:2** (2015), 190–200. [8] B. Bollobás, *Random graphs*, 2nd ed., Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, 2001, xviii+498 pp. [9] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience, New York, 2000, xii+333 pp. [10] Н. К. Верещагин, А. Шень, *Языки и исчисления*, МЦНМО, М., 2000, 286 с. [11] J. H. Spencer, M. E. Zhukovskii, “Spectra for random graphs of fixed quantifier depth”, *Discrete Math.* (submitted). [12] J. Spencer, *Combinatorica*, **10:1** (1990), 95–102. [13] J. H. Spencer, *Discrete Appl. Math.*, **30:2-3** (1991), 235–252.

Максим Евгеньевич Жуковский
(Maksim E. Zhukovskii)
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: zhukmax@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
15.04.2015