Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Ружанский, Д. Сураган, О нормах Шаттена интегральных операторов типа свертки, *УМН*, 2016, том 71, выпуск 1, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9665>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:05:49

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О нормах Шаттена интегральных операторов типа свертки

М. В. Ружанский, Д. Сураган

В статье дается оценка для норм Шаттена интегральных операторов с симметрически убывающими ядрами. Показано, что нормы Шаттена достигают максимума на шаре среди всех множеств равной меры. В качестве примера рассмотрен потенциал Ньютона на множествах в $\mathbb{R}^3$. Как следствие установлено, что нормы Шаттена такого потенциала Ньютона достигают максимума на шаре, а также вычислены явные значения таких норм.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим семейство компактных операторов $P: H \rightarrow H$ через $\mathcal{S}^\infty(H)$. Сингулярные числа $\{s_n\}$ оператора $P \in \mathcal{S}^\infty(H)$ – это собственные значения положительного оператора $(P^*P)^{1/2}$ [1]. Класс Шаттена с индексом $1 \leq p < \infty$ определяется так:

$$\mathcal{S}^p(H) := \{P \in \mathcal{S}^\infty(H) : \{s_n\} \in \ell^p\}.$$

Соответствующая норма в классе $\mathcal{S}^p(H)$ определяется формулой

$$\|P\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Для $p = \infty$ определим $\|P\|_\infty := \|P\|$ как операторную норму оператора P на пространстве H .

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченное открытое множество. На пространстве $H = L^2(\Omega)$ рассмотрим интегральный оператор

$$\mathcal{K}_\Omega f(x) := \int_{\Omega} K(|x-y|)f(y) dy, \quad f \in L^2(\Omega), \quad (1)$$

где $|x-y|$ – обычное евклидово расстояние между точками x и y в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что ядро K – симметрически убывающая функция, т. е. K – неотрицательная измеримая функция, сохраняемая при симметрически убывающей перестановке (см., например, [2; § 3]), и $\mathcal{K}_\Omega$ – положительный оператор. Обозначим через $|\Omega|$ меру Лебега множества Ω .

ТЕОРЕМА 1. Пусть B_r – шар с радиусом r и центром в нуле. Предположим, что $\mathcal{K}_{B_r} \in \mathcal{S}^q(L^2(B_r))$ для некоторого $1 \leq q < \infty$. Пусть p_0 – наименьшее целое число, большее или равное q . Тогда для всех натуральных p таких, что $p_0 \leq p \leq \infty$,

Первый автор поддержан грантами EPSRC EP/K039407/1 и Leverhulme Grant RPG-2014-02. Второй автор поддержан Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант № 5127/GF4).

DOI: 10.4213/rm9665

и для всех ограниченных открытых множеств Ω таких, что $|\Omega| = |B_r|$, выполнено неравенство

$$\|\mathcal{N}_\Omega\|_p \leq \|\mathcal{N}_{B_r}\|_p. \quad (2)$$

В качестве примера рассмотрим потенциал Ньютона на $L^2(\Omega)$ на ограниченном открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, т. е. интегральный оператор

$$\mathcal{N}_\Omega f(x) := \int_\Omega \frac{1}{4\pi|x-y|} f(y) dy, \quad f \in L^2(\Omega). \quad (3)$$

Из формулы для ядра следует, что p -норма Шаттена оператора $\mathcal{N}_\Omega$ конечна при $p > 3/2$ (см., например, критерий для классов Шаттена в терминах особенностей интегральных ядер Шварца, полученный в [3]). Как следствие теоремы 1 и явных вычислений норм Шаттена в случае шара получаем следующее.

ПРИМЕР 2. Пусть $B_r \equiv B$ – шар с единичным радиусом и центром в нуле. Тогда по теореме 1 при любом натуральном $2 \leq p < \infty$ имеем

$$\|\mathcal{N}_\Omega\|_p \leq \|\mathcal{N}_B\|_p = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2l+1}{j_{l-1/2,m}^{2p}} \right)^{1/p} \quad (4)$$

для всех ограниченных открытых множеств Ω таких, что $|\Omega| = |B|$. Здесь j_{km} обозначает m -й положительный нуль функции Бесселя J_k первого рода порядка k . В частности, при $p = 2$ имеем неравенство для норм Гильберта–Шмидта:

$$\|\mathcal{N}_\Omega\|_2 \leq \|\mathcal{N}_B\|_2 = \sqrt{\frac{7}{48}}.$$

Первая часть этой формулы, а также формулы (4) могут быть также подтверждены прямым вычислением собственных значений потенциала Ньютона в шаре в $\mathbb{R}^3$ (см. также теорему 4.1 в [4]).

При $p = \infty$ получаем следующее.

ПРИМЕР 3. Пусть $B_r \equiv B$ – шар с единичным радиусом и центром в нуле. Тогда по теореме 1 для всех ограниченных открытых областей Ω таких, что $|\Omega| = |B|$, выполнено неравенство

$$\|\mathcal{N}_\Omega\| \leq \|\mathcal{N}_B\| = \frac{4}{\pi^2}. \quad (5)$$

Здесь $\|\cdot\|$ – операторная норма в пространстве $L^2(\Omega)$.

Список литературы

- [1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965, 448 с. [2] Э. Либ, М. Лосс, *Анализ*, Науч. кн., Новосибирск, 1998, 276 с. [3] J. Delgado, M. Ruzhansky, *J. Funct. Anal.*, **267**:3 (2014), 772–798. [4] J. M. Anderson, D. Khavinson, V. Lomonosov, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **43**:172 (1992), 387–407.

Михаил Владимирович Ружанский
(Mikhail V. Ruzhansky)
Imperial College London, London, UK
E-mail: m.ruzhansky@imperial.ac.uk

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
21.02.2015

Дурвудхан Сураган
(Durvudkhan Suragan)
Институт математики и математического
моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: durvudkhan.suragan@kcl.ac.uk