Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Горбань, Асимптотические свойства решения задачи последовательной проверки гипотез на конечном временном интервале, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 4, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:42:02

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Асимптотические свойства решения задачи последовательной проверки гипотез на конечном временном интервале

С. Д. Горбань

Задача последовательной проверки двух гипотез о математическом ожидании винеровского процесса со сносом заключается в том, чтобы как можно скорее с минимальной вероятностью ошибки определить, какая из двух данных величин является настоящим значением сноса. Задача допускает две различные формулировки (см. [4; гл. 3]). В байесовской формулировке предполагается, что неизвестное значение сноса имеет некоторое заданное априорное распределение. В настоящей заметке рассматривается только байесовская формулировка.

Пусть имеется наблюдаемый процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ такой, что $X_t = \theta \mu t + \sigma W_t$, где $W = (W_t)_{t \geq 0}$ – винеровский процесс, $\mu \neq 0$, $\sigma^2 > 0$, а θ – случайная величина, независимая с W и принимающая два значения: $P(\theta = 1) = \pi$, $P(\theta = 0) = 1 - \pi$. Таким образом, π и $(1 - \pi)$ играют роль априорных вероятностей статистических гипотез $H_1: \theta = 1$ и $H_0: \theta = 0$. Задача заключается в том, чтобы найти оптимальное решающее правило (τ, d) , где $\tau \geq 0$ – момент остановки относительно естественной фильтрации процесса X , а $d - \mathcal{F}_\tau^X$ -измеримая случайная величина, принимающая значения 0 и 1. Значение $d = 1$ соответствует принятию гипотезы H_1 , значение $d = 0$ соответствует принятию H_0 . Последовательная проверка гипотез для винеровского процесса состоит в нахождении функции риска V и пары (τ^*, d^*) :

$$V(\pi) = \inf_{(\tau, d)} E_\pi [\tau + aI(d = 0, \theta = 1) + bI(d = 1, \theta = 0)], \quad (1)$$

$$(\tau^*, d^*) = \operatorname{argmin}_{(\tau, d)} E_\pi [\tau + aI(d = 0, \theta = 1) + bI(d = 1, \theta = 0)].$$

Вводя процесс апостериорной вероятности $\pi_t = P(\theta = 1 | \mathcal{F}_t^X)$, $t \geq 0$, мы сводим исходную задачу к следующей задаче об оптимальной остановке:

$$V(\pi) = \inf_{\tau} E_\pi [\tau + a\pi_\tau \wedge b(1 - \pi_\tau)],$$

$$\tau^* = \operatorname{argmin}_{\tau} E_\pi [\tau + a\pi_\tau \wedge b(1 - \pi_\tau)].$$

В случае конечного временного интервала добавляется дополнительное условие $\tau \leq T$. Нахождение оптимального момента остановки сводится к решению интегро-дифференциальной задачи, что подробно описано в [3; разд. 21] или [1]. Согласно этим результатам, τ^* – первый момент выхода процесса $(t, \pi_t)_{t \geq 0}$ из множества продолжения наблюдения

$$C^\infty = \{(t, \pi) : \pi \in (A, B)\}, \quad (2)$$

$$C^T = \{(t, \pi) : \pi \in (g_0^T(t), g_1^T(t))\}$$

для задач на бесконечном и конечном временных интервалах соответственно. В работе [1] установлены следующие свойства функций g_0^T и g_1^T :

- 1) $A \leq g_0^T(t) < c < g_1^T(t) \leq B$;
- 2) функция $g_0^T: [0, T] \mapsto [0, 1]$ – непрерывная и возрастающая;
- 3) функция $g_1^T: [0, T] \mapsto [0, 1]$ – непрерывная и убывающая;
- 4) $g_0^T(T) = g_1^T(T) = c$;

здесь $c = b/(a+b)$ (a, b – из (1)).

Приведем основные результаты нашей работы.

ТЕОРЕМА 1. Для любого положительного T имеют место соотношения

$$\frac{\partial^-}{\partial t} g_1^T(T) = -\infty, \quad \frac{\partial^-}{\partial t} g_0^T(T) = +\infty.$$

Основная идея доказательства заключается в том, чтобы рассмотреть точки $(\bar{t}, \bar{\pi}) := (T - t, c \pm kt)$ для произвольного k на плоскости (t, π) и установить, что

$$\mathbb{E}_{(\bar{t}, \bar{\pi})}[T + a\pi_T \wedge b(1 - \pi_T)] \leq \bar{t} + a\bar{\pi} \wedge b(1 - \bar{\pi}).$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого положительного T выполнены неравенства $g_0^T(0) > A$ и $g_1^T(0) < B$, где A и B – из (2).

Этот результат получается из рассмотрения двух интегро-дифференциальных задач, к которым сводятся задачи об оптимальной остановке на бесконечном и конечном временных горизонтах (см. [3; разд. 21]).

ТЕОРЕМА 3. При $T \rightarrow \infty$ справедливы неравенства

$$g_0^T(0) - A \leq CT e^{-\alpha T}(1 + \bar{o}(1)), \quad B - g_1^T(0) \leq C^* T e^{-\alpha T}(1 + \bar{o}(1)),$$

где A, B – из (2), а C, C^*, α – некоторые константы, которые получены в явном виде.

Доказательство этого факта основывается на оценке математического ожидания времени выхода броуновского движения со сносом из “коридора” на основе формул, приведенных в [2; разд. 5.2].

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 2 и 3 в совокупности означают, что при $T \rightarrow \infty$ решение задачи на конечном временном интервале в некотором смысле стремится к решению задачи на бесконечном временном интервале, но никогда не достигает его.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность А. Н. Ширяеву за помощь и научное руководство.

Список литературы

- [1] P. V. Gapeev, G. Peskir, “The Wiener sequential testing problem with finite horizon”, *Stochastics Stochastics Rep.*, **76**:1 (2004), 59–75. [2] D. Helermont, *Stochastic processes and related distributions*, YATS Finances & Technologies, 2004, 19 pp., <http://www.yats.com/doc/stochastic-processes-en.pdf>. [3] G. Peskir, A. N. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Lectures Math. ETH Zurich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006, xxii+500 pp. [4] А. Вальд, *Последовательный анализ*, Физматгиз, М., 1960, 328 с.; пер. с англ.: A. Wald, *Sequential analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London, 1947, xii+212 pp.

Степан Дмитриевич Горбань
(Stepan D. Gorban)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gorban.sd@mail.ru

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией

09.04.2015