Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Бесконечная симметрическая группа и комбинаторные конструкции типа топологических теорий поля, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 4, 143–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9667>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:57:24

УДК 517.986.4+519.12+512.583

Посвящается А. М. Вершику

Бесконечная симметрическая группа и комбинаторные конструкции типа топологических теорий поля**Ю. А. Неретин**

Статья содержит обзор шлейфовых конструкций для бесконечной симметрической группы и родственных ей групп. По определенным парам (группа G , подгруппа K) строятся категории, морфизмами которых являются двумерные поверхности, склеенные из многоугольников и определенным образом раскрашенные. Умножение морфизмов – это склейка комбинаторных бордизмов, а унитарным представлениям группы G соответствуют функторы из категории бордизмов в категорию гильбертовых пространств и ограниченных операторов. Конструкция имеет разнообразные варианты, вместо поверхностей могут получаться одномерные объекты типа диаграмм Брауэра, многомерные псевдомногообразия, двудольные графы.

Библиография: 66 названий.

Ключевые слова: бесконечная симметрическая группа, представления категорий, сферические представления, двойные классы смежности, бордизмы.

DOI: 10.4213/rm9667

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	145
1.1. Бесконечная симметрическая группа и топологические теории поля.....	145
1.2. Бесконечная симметрическая группа.....	146
1.3. Полная бесконечная симметрическая группа.....	147
1.4. Теорема Тома.....	147
1.5. Бисимметрическая группа.....	148
1.6. Умножение двойных классов смежности и шлейфовая категория.....	151
1.7. Мультипликативность. Представления шлейфовой категории... ..	152
1.8. Цели статьи.....	153
1.9. Структура статьи.....	153
1.10. Замечания к разделу 1.....	154

Работа выполнена при поддержке FWF (грант P25142).

© Ю. А. НЕРЕТИН, 2015

2. Теорема Либермана	154
2.1. Равносильные определения непрерывности	154
2.2. Продолжение на полугруппу B_n всех 0-1-матриц	155
2.3. Действие полугруппы B_n в пространстве $H(n)$ неподвижных векторов	157
2.4. Теорема Либермана	158
2.5. Замечания к разделу 2	159
3. Трисимметрическая группа и триангулированные двумерные бордизмы	159
3.1. Умножение двойных классов смежности	159
3.2. Группа G и комбинаторные данные	161
3.3. Произведение трех симметрических групп и комбинаторные дан- ные	163
3.4. Умножение двойных классов смежности	163
3.5. Теорема мультипликативности	165
3.6. Сферичность	165
3.7. Трисимметрическая группа $\mathbf{G}$	166
3.8. Теорема аппроксимации	166
3.9. Обратная конструкция. Доказательство теоремы 3.11	167
3.10. Счетные тензорные произведения гильбертовых пространств ..	169
3.11. Конструкция сферических представлений группы $\mathbf{G}$. I	169
3.12. Сферические функции	170
3.13. Конструкции сферических представлений группы $\mathbf{G}$. II	171
3.14. Фоковское представление группы изометрий вещественного гильбертова пространства	172
3.15. Конструкции сферических представлений группы $\mathbf{G}$. III	173
3.16. Гипотезы	174
3.17. Сферические характеры и самоподобие	174
3.18. Несколько копий симметрической группы	175
3.19. Замечания к разделу 3	176
4. Одномерные конструкции (чипы)	176
4.1. (G, K) -пары	176
4.2. Бисимметрическая группа и чипы Ольшанского	177
4.3. Представления	178
4.4. Другой пример	179
4.5. Более сложный пример	180
4.6. Замечания к разделу 4	182
4.7. Дополнение к разделу 4. Классификация представлений бисим- метрической группы	182
4.7.1. Двойственность	182
4.7.2. Классификация унитарных представлений бисимметриче- ской группы	183
5. Двумерные конструкции	185
5.1. Пример	185
5.2. Степень общности	186
5.3. Сплетения	187
5.4. Пример со сплетением	187

6. Категории двудольных графов	188
6.1. Соответствие между перестановками и двудольными трехвалентными графами	188
6.2. Категория двойных классов смежности	189
6.3. Представления группы G	190
6.4. Вариации	190
7. Бордизмы псевдомногообразий	191
7.1. Псевдомногообразие	191
7.2. Наборы перестановок и псевдомногообразия	192
7.3. Бордизмы псевдомногообразий	193
7.4. Соответствие с двумерной конструкцией	193
7.5. Замечания к разделу 7	194
8. Сферические функции относительно юнговской подгруппы. Теорема Нессонова	194
8.1. (G, K) -пара с юнговской подгруппой	194
8.2. Построение представлений	194
8.3. Теорема Нессонова	195
8.4. Категория двойных классов смежности	195
8.5. Полугруппа $\Gamma := K \setminus G/K$ и ее характеры	196
8.6. Доказательство теоремы 8.1	197
8.7. Замечания	199
Список литературы	200

1. Введение

1.1. Бесконечная симметрическая группа и топологические теории поля. Теория представлений бесконечной симметрической группы S_∞ началась с двух “ортогональных” работ. Первая – статья Эльмара Тома [1] 1964 г., где были введены аналоги характеров для группы S_∞ бесконечных конечных перестановок. Вторая – статья Артура Либермана [2] 1972 г., где были расклассифицированы все унитарные представления полной бесконечной симметрической группы.

Тома изначально вводил характеры группы S_∞ как следы операторов представлений в факторах Мюррея–фон Неймана типа II_1 . Мы ниже несколько раз упоминаем слово “*факторы*”, но на самом деле эти объекты не используются и для понимания статьи не нужны. Далее А. М. Вершик и С. В. Керов [3] построили явно представления S_∞ в факторах, соответствующие характерам Тома (см. также [4]), и показали, как получить характеры Тома предельным переходом из характеров конечных симметрических групп [5].

В 1989 г. Г. И. Олшанский [6] заметил, что характерам Тома соответствуют представления дубля $S_\infty \times S_\infty$, имеющие неподвижный вектор относительно диагональной подгруппы. В той же работе была получена первая (одномерная) конструкция топологических теорий поля (смысл этих слов объяснен ниже) из представлений бесконечномерной симметрической группы. Одним из недавних достижений теории представлений бесконечной симметрической группы является явное разложение аналога регулярного представления для дубля $S_\infty \times S_\infty$ в [7].

Теперь о термине “топологические теории поля” в смысле определения, предложенного М. Атьей в [8] (см. также недавний обзор [9]). Рассматривается категория, объектами которой являются $(k-1)$ -мерные многообразия, а морфизм M в N – это k -мерное многообразие R , край которого отождествлен с несвязным объединением $M \sqcup N$. Произведение двух морфизмов $R: M \rightarrow N$ и $Q: N \rightarrow K$ получается склейкой R и Q по многообразию N . Топологической теорией поля называется функтор из этой категории в категорию векторных пространств и линейных операторов^{1,2}. Содержание данной статьи – построение различных комбинаторных объектов типа “топологической теории поля” из представлений бесконечной симметрической группы [6], [15]–[17].

Данная статья более-менее самозамкнута, предполагается лишь минимальное знакомство с представлениями групп.

1.2. Бесконечная симметрическая группа. Через S_∞ мы обозначим группу всех перестановок счетного множества, имеющих конечный носитель. Чаще всего мы по умолчанию будем считать, что это множество есть множество натуральных чисел. Если речь идет о каком-нибудь другом счетном множестве Ω , мы пишем $S_\infty(\Omega)$. Группа S_∞ является индуктивным пределом конечных симметрических групп S_n :

$$S_\infty := \varinjlim S_n.$$

Группу S_∞ можно реализовать как группу бесконечных обратимых 0-1-матриц³ g таких, что $g_{kk} = 1$ для достаточно больших k . Мы также будем изображать перестановки, конечные или бесконечные, с помощью картинок вида

Группа S_∞ является счетной дискретной группой, она не является группой типа I (см., например, [18], [19]), и теория ее унитарных представлений в обычном смысле этого слова невозможна.

Пусть $\alpha = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим через $S_\infty[\alpha]$ подгруппу в S_∞ , состоящую из перестановок, оставляющих на месте $1, \dots, \alpha$ (при $\alpha = 0$ имеем $S_\infty[0] = S_\infty$). Эта подгруппа состоит из 0-1-матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad \text{где } r \in S_\infty \quad (1.1)$$

¹В этом контексте употребляется термин “бордизмы”. Однако теория бордизмов – более старая область математики (см., например, [10]), и здесь легко возникают конфликты с устоявшейся терминологией. Термин “теория поля” был введен, видимо, по аналогии с “конформной квантовой теорией поля” (см. [11], [12]).

²Двумерные “топологические теории поля”, в которых поверхности снабжены замощениями многоугольниками, рассматривались в [13], [14].

³Мы называем 0-1-матрицей матрицу, у которой все элементы равны 0 или 1, причем каждая строка и каждый столбец содержат не более одной единицы. Такая матрица обратима, если каждый столбец и каждая строка содержат ровно одну единицу.

(1_α – единичная матрица размера α). Мы получаем цепочку подгрупп

$$S_\infty = S_\infty[0] \supset S_\infty[1] \supset S_\infty[2] \supset \dots$$

Все подгруппы $S_\infty[\alpha]$ канонически изоморфны группе S_∞ , изоморфизм в обозначениях (1.1) задан формулой $r \mapsto g$.

1.3. Полная бесконечная симметрическая группа. Через $\bar{S}_\infty$ мы обозначим группу всех перестановок счетного множества, а через $\bar{S}_\infty(\Omega)$ – группу всех перестановок счетного множества Ω . Точно так же, как выше, мы вводим подгруппы $\bar{S}_\infty[\alpha]$, состоящие из матриц вида $\begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, где $r \in \bar{S}_\infty$.

Мы вводим на S_∞ вполне несвязную топологию, полагая, что подгруппы $\bar{S}_\infty[\alpha]$ открыты. Дадим два эквивалентных определения этой топологии.

– $g_j \rightarrow g$ в $\bar{S}_\infty$, если для любого $k \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера j , выполнено равенство $g_j(k) = g(k)$;

– $g_j \rightarrow g$, если слабо⁴ сходится последовательность соответствующих 0-1-матриц.

Группа $\bar{S}_\infty$ является полной (в смысле Райкова⁵) топологической группой относительно введенной топологии⁶.

А. Либерман [2] в 1972 г. получил полную классификацию унитарных представлений группы $\bar{S}_\infty$. Эта классификация несложная: все неприводимые представления индуцированы с представлений $\rho \otimes I$ подгрупп $S(\alpha) \times \bar{S}_\infty[\alpha]$, где ρ неприводимо, а I – тривиальное одномерное представление $\bar{S}_\infty[\alpha]$ (подробнее см. ниже в разделе 2). С другой стороны, эта классификация, в определенном смысле, не очень интересна, поскольку в теории представлений группы $\bar{S}_\infty$ не возникает новых сущностей по сравнению с теорией представлений конечных симметрических групп.

Теория представлений бесконечной симметрической группы, однако, существует, но она не является ни теорией унитарных представлений группы S_∞ , ни теорией представлений группы $\bar{S}_\infty$. Ключевым шагом была работа Тома [1] 1964 г.

1.4. Теорема Тома. Пусть f – комплекснозначная функция на счетной группе G . Функция f называется *центральной*, если она постоянна на классах сопряженности. Она *положительно определена*, если для любого конечного набора $g_j \in G$ матрица, составленная из $f(g_i g_j^{-1})$, неотрицательно определена.

⁴См., например, [20]. В данном случае это означает поэлементную сходимость матриц, т.е. стабилизацию.

⁵Т.е. любая двусторонне фундаментальная последовательность сходится. Последовательность g_j называется двусторонне фундаментальной, если обе двойные последовательности $g_j g_k^{-1}$ и $g_k^{-1} g_j$ стремятся к единице при $j, k \rightarrow \infty$. Это определение отлично от определения полноты группы по Н. Бурбаки, когда требуется сходимость левофундаментальных и правофундаментальных последовательностей (см. [21], [22]).

⁶Это единственная метризуемая сепарабельная топология на $\bar{S}_\infty$ (см. [23]). Напомним, что топологическая группа называется польской, если она метризуема, сепарабельна и полна по Райкову (другой вариант определения – если ее топология является польской). Для польских групп есть большой набор теорем об автоматической непрерывности измеримых гомоморфизмов, просто об автоматической непрерывности гомоморфизмов, о единственности польских топологий (см. [24], [25] и ссылки в последней работе).

Множество всех центральных положительно определенных функций является выпуклым конусом. Через $\mathcal{K}(G)$ мы обозначим множество таких функций, удовлетворяющих условию $f(1) = 1$. Множество $\mathcal{K}(G)$ – выпуклый компакт относительно топологии поточечной сходимости на группе. Согласно теореме Крейна–Мильмана (см., например, [20]), $\mathcal{K}(G)$ является выпуклой оболочкой множества своих крайних точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [1]. *Характер* группы G – это крайняя точка множества $\mathcal{K}(G)$.

Отметим, что для конечных или компактных групп определенные таким образом “характеры” имеют вид $\chi(g)/\dim \chi$, где $\chi(g)$ – обычные неприводимые характеры группы G .

Рассмотрим набор неотрицательных чисел $\alpha_j, \beta_j, \gamma$, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots, \quad \sum \alpha_j + \sum \beta_j + \gamma = 1.$$

Для такого набора параметров определим функцию $\chi_{\alpha, \beta, \gamma}(g)$ на S_∞ формулой

$$\chi_{\alpha, \beta, \gamma}(g) = \prod_{k=2}^{\infty} \left(\sum_j \alpha_j^k + (-1)^{j-1} \sum_j \beta_j^k \right)^{r_k(g)},$$

где $r_k(g)$ – число циклов длины k перестановки g (произведение в правой части фактически конечно).

ТЕОРЕМА 1.2 Тома [1]. *Функции $\chi_{\alpha, \beta, \gamma}(g)$ являются характерами группы S_∞ , и все характеры группы S_∞ имеют такой вид.*

Есть два равносильных, но различных способа определить представления, соответствующие характеру.

Первый способ (который и имел в виду Тома): эти выражения в самом деле имеют вид $\text{tr } \rho(g)$ для представлений симметрической группы, порождающих факторы Мюррея–фон Неймана типа II_1 . Мы не будем здесь объяснять, что это значит (см., например, [18; § 5, § 13.1], [26]), отметим лишь, что явное построение таких “факторпредставлений” есть в [3] и в [4], а также что характеры Тома являются пределами неприводимых характеров конечных симметрических групп (см. [5]).

Второй способ (который и является отправной точкой для настоящей работы) был предложен Г. И. Олшанским в [6]. Характеры Тома отвечают унитарным представлениям дубля симметрической группы, к обсуждению которого мы переходим.

1.5. Бисимметрическая группа. Возьмем характер Тома $\chi_{\alpha, \beta, \gamma}(g)$ и набор формальных векторов v_g , нумеруемых элементами g группы S_∞ . “Назначим” для этих векторов скалярные произведения

$$\langle v_g, v_h \rangle := \chi_{\alpha, \beta, \gamma}(gh^{-1}).$$

В силу положительной определенности функции $\chi_{\alpha,\beta,\gamma}$ система векторов с такими скалярными произведениями может быть реализована в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}$. Естественно также считать, что векторы v_g порождают $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}$. Такой набор векторов единственен в том смысле, что если есть другой набор $v'_g \in \mathcal{H}'$ с такими же скалярными произведениями, то есть и унитарный оператор $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ такой, что $Uv_g = v'_g$ (это стандартная конструкция гильбертова пространства по положительно определенному ядру; см., например, [27; § 7.1]).

Далее, заметим, что для любых $p, q \in S_\infty$ мы имеем

$$\begin{aligned}\langle v_{pg_1q^{-1}}, v_{pg_2q^{-1}} \rangle &= \chi(pg_1q^{-1}(pg_2q^{-1})^{-1}) \\ &= \chi(pg_1g_2^{-1}p^{-1}) = \chi(g_1g_2^{-1}) = \langle v_{g_1}, v_{g_2} \rangle,\end{aligned}$$

т. е. преобразование $v_g \mapsto v_{pgq^{-1}}$ не меняет матрицу скалярных произведений. Поэтому существует унитарный оператор $T(p, q)$ в $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}$ такой, что

$$T(p, q)v_g = v_{pgq^{-1}}$$

для всех $g \in S_\infty$. Легко видеть, что $T(p, q)$ есть унитарное представление дубля группы S_∞ , т. е. группы $S_\infty \times S_\infty$. Отметим также, что вектор v_e является неподвижным относительно диагонали $\text{diag}(S_\infty)$ группы $S_\infty \times S_\infty$.

Явная конструкция представлений дубля $S_\infty \times S_\infty$, соответствующих характеристам Тома, дана ниже в п. 4.3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть χ – характер неприводимого представления ρ конечной или компактной группы G в пространстве W . Применив к нему только что описанную конструкцию, мы получим представление группы $G \times G$ в пространстве $\text{Hom}(W)$ линейных операторов в пространстве W , заданное формулой

$$T(g_1, g_2)A = \rho(g_1^{-1})A\rho(g_2).$$

Скалярное произведение в $\text{Hom}(W)$ задается формулой $\langle A, B \rangle = \text{tr } AB^*$. Вектор, неподвижный относительно диагонали, – это единичный оператор в W , а система v_g совпадает с $\rho(g) \in \text{Hom}(W)$.

Напомним несколько определений теории представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть G – группа, а K – подгруппа.

1) Неприводимое унитарное представление ρ группы G в гильбертовом пространстве H называется *сферическим относительно K* или *K -сферическим*, если в H есть единственный с точностью до пропорциональности ненулевой K -инвариантный вектор v .

2) При тех же обозначениях функция

$$\phi(g) = \langle \rho(g)v, v \rangle$$

называется *сферической функцией*.

3) Если для любого унитарного представления ρ группы G существует не более одного (с точностью до пропорциональности) K -неподвижного вектора, то пара (G, K) называется *сферической*^{7,8}.

ТЕОРЕМА 1.4. а) Пара $(S_\infty \times S_\infty, \text{diag}(S_\infty))$ – сферическая.

б) Сферические функции на $S_\infty \times S_\infty$ – это характеры $\chi_{\alpha, \beta, \gamma}(g_1 g_2^{-1})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно, что для многих типов групп (конечные и компактные группы, полупростые вещественные и полупростые p -адические группы, нильпотентные группы Ли) неприводимые унитарные представления прямого произведения $G_1 \times G_2$ – это в точности тензорные произведения $\rho_1 \otimes \rho_2$ неприводимых представлений G_1 и G_2 . Такая теорема имеет место, если хотя бы одна группа имеет тип I (см. [18; предложение 13.1.8]); в случае $G_1 = G_2 = S_\infty$ это не так. Представления Тома группы $S_\infty \times S_\infty$ не разлагаются в тензорные произведения (за исключением случаев $\alpha_1 = 1$ или $\beta_1 = 1$, отвечающих одномерным представлениям). В этом нет никакой патологии.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничим представление Тома дубля на первый множитель. Рассмотрим слабо замкнутую операторную алгебру, порожденную операторами представления. Оказывается, что получается фактор типа II_1 . След на этом факторе имеет вид

$$\text{tr}(A) := \langle \rho(A)v_e, v_e \rangle.$$

Еще раз напомним, что язык факторов в настоящей статье не используется.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть r – элемент полной симметрической группы $\bar{S}_\infty$. Очевидно, что для любых $g_1, g_2 \in \bar{S}_\infty$ выполнено равенство

$$\langle e_{r g_1 r^{-1}}, e_{r g_2 r^{-1}} \rangle = \langle e_{g_1}, e_{g_2} \rangle.$$

Это значит, что оператор $T(r, r)$ определен для всех $r \in \bar{S}_\infty$.

Определим *бисимметрическую группу* $\mathbf{G}$ как подгруппу в $\bar{S}_\infty \times \bar{S}_\infty$, состоящую из пар (g, h) таких, что $gh^{-1} \in S_\infty$. Мы видим, что верно следующее утверждение.

⁷В случае унитарных представлений групп Ли основное утверждение о сферичности – это следующая теорема И. М. Гельфанда 1950 г.: *пусть G/K – риманово симметрическое пространство, тогда подгруппа K сферична в G* . Позднее выяснилось, что бывают другие сферические пары, которые получаются, если чуть-чуть увеличить G или чуть-чуть уменьшить K (на эту тему была работа [28] с разнообразными продолжениями).

Есть теория бесконечномерных сферических пар, получаемых пределами гильбертовских (или почти гильбертовских) пар, см. работы Г. И. Ольшанского [6], [29]. Позднее Н. И. Несонов [30] заметил, что в бесконечномерных группах сферические подгруппы могут быть неожиданно “маленькими” и, что более важно, с такими сферическими парами можно работать. В настоящей статье рассматриваются многочисленные сферические пары, у которых нет конечных аналогов (о классических группах см. [31], о группе диффеоморфизмов окружности – [32]).

⁸Строго говоря, к этому определению надо добавить еще одно требование: для любого $g \notin K$ существует сферическое представление ρ с K -сферическим вектором v такое, что $\rho(g)v \neq v$. Объясним, в чем дело.

Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}$ на счетном множестве с тривиальными стабилизаторами. Тем самым, получается вложение $\mathbb{Z} \rightarrow \bar{S}_\infty$. Из теоремы Либермана легко вывести, что $\mathbb{Z}$ -неподвижный вектор в унитарном представлении $\bar{S}_\infty$ автоматически является $\bar{S}_\infty$ -неподвижным. Поэтому для любых сферических пар вида $G \supset \bar{S}_\infty$ (в настоящей статье много примеров таких пар) $\mathbb{Z}$ -неподвижные векторы стабилизируются подгруппой $\bar{S}_\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Любое представление Тома продолжается до унитарного представления бисимметрической группы $\mathbf{G}$.*

Оказывается, что бисимметрическая группа является “хорошим объектом”. Она является группой типа I (Г.И. Олшанский [6]), все ее унитарные представления расклассифицированы (А.Ю. Окуньков [33], см. ниже теорему 4.3), с ней связан и содержательный гармонический анализ [7]. Для нее имеет место и следующее явление, которое не имеет конечномерных аналогов.

1.6. Умножение двойных классов смежности и шлейфовая категория. Пусть G – группа, а K_1, K_2 – ее подгруппы. *Двойной класс смежности* – это подмножество в G вида $K_1 g K_2$. Через $K_1 \setminus G / K_2$ обозначается множество всех двойных классов смежности, т.е. фактормножество группы G по отношению эквивалентности $g \sim k_1 g k_2$, где $k_1 \in K_1, k_2 \in K_2$.

В диагонали $\bar{S}_\infty$ группы $\mathbf{G}$ рассмотрим подгруппы $\mathbf{K}[\alpha] := \bar{S}_\infty[\alpha]$. Сейчас будет определена операция умножения

$$\mathbf{K}[\alpha] \setminus \mathbf{G} / \mathbf{K}[\beta] \times \mathbf{K}[\beta] \setminus \mathbf{G} / \mathbf{K}[\gamma] \rightarrow \mathbf{K}[\alpha] \setminus \mathbf{G} / \mathbf{K}[\gamma].$$

Для этого рассмотрим следующую последовательность $\theta_j[\beta]$ в $\mathbf{K}[\beta]$:

$$\theta_j[\beta] = \begin{pmatrix} 1_\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_j & 0 \\ 0 & 1_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_\infty \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Возьмем двойные классы смежности

$$\mathfrak{p} \in \mathbf{K}[\alpha] \setminus \mathbf{G} / \mathbf{K}[\beta], \quad \mathfrak{q} \in \mathbf{K}[\beta] \setminus \mathbf{G} / \mathbf{K}[\gamma]$$

и их представителей $p \in \mathfrak{p}, q \in \mathfrak{q}$. Рассмотрим последовательность двойных классов смежности

$$\mathfrak{r}_j := \mathbf{K}[\alpha] \cdot p \theta_j[\beta] q \cdot \mathbf{K}[\gamma] \in \mathbf{K}[\alpha] \setminus \mathbf{G} / \mathbf{K}[\gamma].$$

ЛЕММА 1.6. *Последовательность $\mathfrak{r}_j$ стабилизируется.*

Лемма легко проверяется посредством перемножения 0-1-матриц.

Теперь мы можем определить произведение $\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q}$ как

$$\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q} = \mathfrak{r} := \mathfrak{r}_N \quad \text{для достаточно больших } N.$$

Несложно проверить (тоже посредством перемножения матриц), что построенное умножение ассоциативно. Иными словами, мы получаем категорию $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ – шлейф пары $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$. Ее объекты – неотрицательные целые числа, а

$$\text{Mor}_{\mathcal{S}}(\alpha, \beta) = \mathbf{K}[\alpha] \setminus \mathbf{G} / \mathbf{K}[\beta].$$

Категория $\mathcal{S}$ допускает прозрачное комбинаторное описание (фактически полученное в [6], см. ниже п. 4.2).

1.7. Мультипликативность. Представления шлейфовой категории.

Рассмотрим унитарное представление ρ бисимметрической группы $\mathbf{G}$ в гильбертовом пространстве H (представление предполагается непрерывным на подгруппе $\mathbf{K}$). Обозначим через $H[\alpha]$ подпространство $\mathbf{K}[\alpha]$ -неподвижных векторов и через $P[\alpha]$ ортогональный проектор на $H[\alpha]$. Рассмотрим двойной класс смежности $\mathfrak{p} \in \mathbf{K}[\alpha] \setminus G/\mathbf{K}[\beta]$. Определим оператор

$$\tilde{\rho}(\mathfrak{p}): H[\beta] \rightarrow H[\alpha].$$

Для этого мы выберем представителя $p \in \mathfrak{p}$ и положим

$$\tilde{\rho}(\mathfrak{p}) := P[\alpha] \rho(p) \big|_{H[\beta]}.$$

ЛЕММА 1.7. *Оператор $\tilde{\rho}(\mathfrak{p})$ не зависит от выбора представителя $p \in \mathfrak{p}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in H[\alpha]$, $w \in H[\beta]$ и $h_1 \in \mathbf{K}[\alpha]$, $h_2 \in \mathbf{K}[\beta]$. Тогда

$$\langle v, \rho(h_1 p h_2) w \rangle = \langle \rho(h_1^{-1}) v, \rho(p) \rho(h_2) w \rangle = \langle v, \rho(p) w \rangle.$$

Лемма доказана.

Оказывается, что мы получаем представление категории $\mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 1.8 (теорема мультипликативности). *Для любых α, β, γ и любых $\mathfrak{p} \in \mathbf{K}[\alpha] \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}[\beta]$, $\mathfrak{q} \in \mathbf{K}[\beta] \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}[\gamma]$ выполнено равенство*

$$\tilde{\rho}(\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q}) = \tilde{\rho}(\mathfrak{p}) \circ \rho(\mathfrak{q}).$$

Отметим также, что операторы $\rho(\mathfrak{p})$ являются сжимающими:

$$\|\tilde{\rho}(\mathfrak{p})\| \leq 1. \quad (1.3)$$

Введем на категории $\mathcal{S}$ инволюцию $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}^*$,

$$\mathbf{K}[\alpha] \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}[\beta] \rightarrow \mathbf{K}[\beta] \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}[\alpha],$$

индуцированную отображением $p \mapsto p^{-1}$. Очевидно, что

$$(\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q})^* = \mathfrak{q}^* \circ \mathfrak{p}^*.$$

Построенное таким образом представление категории $\mathcal{S}$ является $*$ -представлением, т. е.

$$\tilde{\rho}(\mathfrak{p}^*) = \tilde{\rho}(\mathfrak{p})^*. \quad (1.4)$$

ТЕОРЕМА 1.9. *Отображение $\rho \mapsto \tilde{\rho}$ есть биекция между множеством унитарных представлений бисимметрической группы $\mathbf{G}$ и множеством сжимающих $*$ -представлений шлейфовой категории $\mathcal{S}$.*

1.8. Цели статьи. Все то, о чем говорилось выше, было известно к середине 1990-х годов [1], [3], [5], [6], [34]. Теория факторпредставлений Тома и представлений бисимметрической группы рассматривалась как предел классической теории представлений. В [34] было замечено, что умножение двойных классов смежности и теорема мультипликативности – весьма общее явление для бесконечномерных групп⁹. Однако вопрос упирался в явное описание самих двойных классов смежности, которое для симметрической группы было получено в [15]–[17]. Настоящая статья посвящена главным образом геометрическим описаниям различных шлейфовых категорий в терминах “топологических теорий поля”.

1.9. Структура статьи. Раздел 2 содержит доказательство теоремы Либмана.

Основная “типовая” конструкция описана в разделе 3. Для группы $G = S_\infty \times S_\infty \times S_\infty$ и ее подгруппы $K = \text{diag}(S_\infty)$ описывается категория двойных классов смежности. Показывается, что морфизмы описываются двумерными поверхностями с раскрашенными в шахматном порядке триангуляциями и раскрашенными ребрами. Умножение морфизмов оказывается склейкой поверхностей. Строится соответствие (в ту и другую сторону) между унитарными представлениями группы G и представлениями категории триангулированных поверхностей. Строится семейство K -сферических представлений G и высказывается гипотеза об описании всех сферических представлений. “Типовыми” в разделе 3 являются также доказательства, которые без существенных изменений применимы для обширного класса пар (G, K) . Поэтому в разделах 4–7 мы сосредотачиваемся на комбинаторно-геометрических описаниях шлейфов (категорий двойных классов смежности).

В разделе 4 мы возвращаемся к представлениям бисимметрической группы. В этом случае комбинаторная структура сводится к одномерным объектам, которые были описаны в [6]. В разделе 4 рассматриваются другие примеры пар (G, K) , чьи шлейфы описываются в терминах “одномерных многообразий”.

Для бисимметрической группы известна полная классификация унитарных представлений, полученная Г.И. Ольшанским и А.Ю. Окуньковым. Ее восприятие требует большего знакомства с теорией представлений, чем основной текст настоящей статьи, и она изложена в дополнении к разделу 4 (см. п. 4.7).

Некоторые пары (G, K) , приводящие к двумерным теориям, обсуждаются в разделе 5 (тут возможен большой зоопарк, описанный в [16]).

Далее мы вводим в рассмотрение в качестве подгрупп K сплитения $S_\infty \times (S_m^\infty)$, в качестве G мы можем взять, например, увеличенную в m раз бесконечную симметрическую группу. Тогда получается категория, морфизмы которой описываются m -валентными двудольными графами.

Вслед за бисимметрической и трисимметрической группой естественно рассмотреть n -кратное произведение $G = S_\infty \times \cdots \times S_\infty$ с подгруппой $K = \text{diag}(S_\infty)$.

⁹Первый пример такого умножения был описан Р.С. Имагиловым в [35]. Сейчас конструкции, аналогичные настоящей работе, построены для бесконечномерных классических групп [29], [31], [36], [37], для бесконечномерных p -адических групп [38], для групп автоморфизмов пространств с мерой [39]–[41].

Соответствующий шлейф допускает (по меньшей мере) два внешне различных геометрических описания. Один вариант – в терминах двумерных поверхностей, замощенных n -угольниками, кратко упоминается нами в п. 3.18. Та же категория может быть описана в терминах бордизмов $(n - 1)$ -мерных псевдомногообразий, это составляет содержание раздела 7.

В разделе 8 мы рассматриваем пару из бесконечной симметрической группы G и юнговской подгруппы K . В этом случае применение общей технологии приводит к двумерным поверхностям, замощенным покрашенными одноугольниками (разумеется, есть описание шлейфа в менее экзотических терминах). Эта самый простой представитель нашего зоопарка, и здесь удастся достигнуть большей ясности. Мы приводим доказательство формулы для K -сферических функций на G , полученной Н. И. Нессоновым.

1.10. Замечания к разделу 1. а) Различные доказательства теоремы Тома есть в [1], [5], [33].

б) Вопрос о характерах типа Тома можно ставить для любых групп G . Интересная теория получается для бесконечномерной унитарной, ортогональной и бесконечномерной симплектической (кватернионно-унитарной) групп (см. [42], [43]). Характеры могут интерпретироваться как характеры факторпредставлений или как сферические функции дубля.

с) Для дискретной группы S_∞ легко строятся неисчислимы семейства неприводимых унитарных представлений (см., например, [44] и добавление F.4 к русскому изданию книги [34]. Продолжить деятельность такого рода куда-либо дальше массового производства представлений, насколько автору известно, не удастся.

д) В работах [1]–[6], о которых мы писали в начале статьи, теория представлений бесконечной симметрической группы так или иначе возникает как предел из теории представлений конечных симметрических групп. Почти все конструкции настоящей статьи (кроме сюжета с бисимметрической группой и представлениями Тома) не получаются таким пределом. Соответственно, встает неформальный вопрос о “спуске вниз”: что могли бы дать наши построения (например, различные способы “геометрического кодирования” симметрических групп) на уровне классической теории?

2. Теорема Либермана

В этом разделе доказана классификационная теорема Либермана (теорема 2.8). Для дальнейшего изложения важна не она, а полученная в [45] теорема 2.4 о продолжении унитарных представлений $\bar{S}_\infty$ на полугруппу всех 0-1-матриц (эти теоремы легко выводятся друг из друга). Кроме того, мы ниже ссылаемся на доказательства нескольких лемм этого раздела как на “ типовые рассуждения”.

2.1. Равносильные определения непрерывности. Рассмотрим унитарное представление ρ группы S_∞ в гильбертовом пространстве H . Пусть, как и раньше, $H[\alpha]$ обозначает пространство всех $S_\infty[\alpha]$ -неподвижных векторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. а) Следующие условия равносильны:

(*) ρ продолжается до непрерывного представления¹⁰ группы $\bar{S}_\infty$;

(**) $\bigcup_{\alpha} H[\alpha]$ плотно в H .

б) Если ρ неприводимо, то эти условия эквивалентны условию:

(***) $\bigcup_{\alpha} H[\alpha] \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Неочевидным является высказывание $(*) \Rightarrow (**)$. Пусть $v \in H$, $\|v\| = 1$. Обозначим через $W[\alpha]$ замкнутую выпуклую оболочку орбиты $S_\infty[\alpha] \cdot v$. Так как подгруппы $S_\infty[\alpha]$ образуют фундаментальную систему окрестностей единицы, то для любого $\varepsilon > 0$ существует α такое, что для любого $g \in S_\infty[\alpha]$ выполнено неравенство $\langle gv, v \rangle > 1 - \varepsilon$, а следовательно, и неравенство $\|\rho(g)v - v\| < \sqrt{2\varepsilon}$. Поэтому для любого $w \in W[\alpha]$ имеем $\|w - v\| \leq \sqrt{2\varepsilon}$. С другой стороны, в любом замкнутом выпуклом множестве гильбертова пространства есть единственный элемент наименьшей длины, обозначим такой элемент в $W[\alpha]$ через w° . В силу своей единственности w° является $S_\infty[\alpha]$ -инвариантным. Итак, мы можем с любой точностью аппроксимировать v элементами из $\bigcup_{\alpha} H[\alpha]$.

$(**) \Rightarrow (*)$. Пусть $v \in H$, $\|v\| = 1$. Пусть $w \in H[\beta]$ таково, что $\|w - v\| \leq \delta$. Тогда для всех $g \in S_\infty[\beta]$ выполнено $\|\rho(g)v - w\| = \|\rho(g)v - \rho(g)w\| \leq \delta$ и, в частности, $\|\rho(g)v - v\| < 2\delta$.

б) Рассмотрим в S_∞ подгруппу S_α , состоящую из перестановок, оставляющих на месте $\alpha + 1, \alpha + 2, \dots$. Если $\beta > \alpha$, то подгруппы S_α и $S_\infty[\beta]$ коммутируют, и, значит, подпространство $H[\beta]$ является S_α -инвариантным. Поэтому подпространство $\bigcup H[\beta]$ является S_α -инвариантным для любого α . Следовательно, $\bigcup H[\beta]$ инвариантно относительно объединения подгрупп S_α , т. е. всей группы S_∞ . В силу неприводимости замыкание $\bigcup_{\beta} H[\beta]$ совпадает с H .

Предложение доказано.

2.2. Продолжение на полугруппу B_n всех 0-1-матриц. Обозначим через B_n полугруппу 0-1-матриц порядка n , а через B_∞ полугруппу всех бесконечных 0-1-матриц, снабженную слабой операторной топологией¹¹. Отметим, что умножение на B_∞ является раздельно непрерывным¹², но не совместно непрерывным.

Следующее высказывание легко проверяется (формальное доказательство есть в [34; лемма VIII.1.1]).

ЛЕММА 2.2. *Группа S_∞ плотна в B_∞ .*

¹⁰Напомним, что представление топологической группы – это непрерывный гомоморфизм в группу всех унитарных операторов, снабженную слабой операторной топологией (на группе унитарных операторов слабая топология совпадает с сильной операторной топологией).

¹¹В данном случае последовательность $g^{(k)}$ сходится к g , если для любых i, j последовательность матричных элементов $g_{ij}^{(k)}$, начиная с некоторого номера, совпадает с g_{ij} .

¹²На пространстве операторов с нормой ≤ 1 , снабженном слабой топологией, умножение раздельно непрерывно.

Для матрицы $p \in B_\infty$ обозначим через

$$\{p\}_n \in B_n$$

ее левый верхний уголок размера $n \times n$. Следующее высказывание очевидно.

ЛЕММА 2.3. *Отображение $p \mapsto \{p\}_n$ индуцирует биекцию*

$$S_\infty[k] \setminus S_\infty/S_\infty[k] \rightarrow B_k.$$

Введем обозначение для следующего элемента полугруппы B_∞ :

$$\theta[\beta] := \begin{pmatrix} 1_\beta & 0 \\ 0 & 0_\infty \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Подчеркнем, что

$$\theta[\beta] = \lim_{j \rightarrow \infty} \theta_j[\beta], \quad (2.2)$$

где $\theta_j[\beta]$ задается формулой (1.2).

ТЕОРЕМА 2.4. а) Любое унитарное представление ρ группы $\bar{S}_\infty$ единственным образом продолжается до непрерывного представления $\bar{\rho}$ полугруппы B_∞ , причем $\bar{\rho}(p^*) = \bar{\rho}(p)^*$.

б) $\bar{\rho}(\theta[\alpha]) = P[\alpha]$, где $P[\alpha]$ – проектор на $H[\alpha]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $p \in B_\infty$. Выберем элемент $g_n \in S_\infty$ такой, что $\{g_n\}_n = \{p\}_n$. Обозначим через $\mathfrak{g}_n \in S_\infty[n] \setminus S_\infty/S_\infty[n]$ двойной класс смежности, содержащий g_n . В силу леммы 2.3 мы имеем $g_{n+k} \in \mathfrak{g}_n$. Поэтому

$$P[n]\rho(g_{n+j})P[n] = P[n]\rho(g_n)P[n] \quad (2.3)$$

(см. доказательство леммы 1.7). Определим операторы

$$A_n(g) := P[n]\rho(g_n)P[n].$$

Равенство (2.3) тогда принимает вид

$$P_n A_{n+j} P_n = A_n.$$

Учитывая, что $\|A_n\| \leq 1$, мы получаем, что последовательность A_n имеет слабый предел, который мы и обозначим через $\bar{\rho}(p)$.

Легко проследить, что отображение $p \mapsto \bar{\rho}(p)$ является слабо непрерывным отображением из B_∞ в полугруппу операторов с нормой, меньшей 1. В силу раздельной непрерывности умножения в B_∞ и в полугруппе сжимающих операторов непрерывное продолжение представления является представлением.

б) Во-первых, $\theta[n]^2 = \theta[n] = \theta[n]^*$. Поэтому $\bar{\rho}(\theta[n])$ является ортогональным проектором. Обозначим через W его образ.

Во-вторых, в силу (2.2) и непрерывности представления $\bar{\rho}$ последовательность $\rho(\theta_j[n])$ сходится к $\bar{\rho}(\theta[\beta])$. Но $\rho(\theta_j[n])$ является тождественным оператором на $H[n]$, поэтому $H[n] \subset W$.

В-третьих, пусть $g \in S_\infty[n]$, $w \in W$. Тогда

$$\rho(g)w = \rho(g)\bar{\rho}(\theta[n])w = \bar{\rho}(g\theta[n])w = \bar{\rho}(\theta[n])w = w,$$

т. е. $W \subset H[n]$.

Теорема доказана.

2.3. Действие полугруппы B_n в пространстве $H(n)$ неподвижных векторов. Рассмотрим элемент $r \in B_n$. Построим по нему элемент $\pi(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0_\infty \end{pmatrix} \in B_\infty$. Обозначим полученную подполугруппу в B_∞ через B_n° . Очевидно, что $\pi(r)\theta[n] = \theta[n]\pi(r) = \pi(r)$. Подставляя эти операторы в $\bar{\rho}$, мы получаем, что оператор $\bar{\rho}(\pi(r))$ имеет блочное строение:

$$\bar{\rho} \begin{pmatrix} \xi_n(r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: H[n] \oplus H[n]^\perp \rightarrow H[n] \oplus H[n]^\perp,$$

где $\xi_n(r)$ – оператор в $H[n]$.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. а) Для любого унитарного представления ρ группы $\bar{S}_\infty$ и любого $n \geq 0$ в подпространстве $H[n]$ определено естественное представление $\xi_n(r)$ полугруппы B_n .

б) В $H[n]^\perp$ полугруппа B_n° действует нулевыми операторами.

ЛЕММА 2.6. Если ρ неприводимо, то $\xi_n(r)$ тоже неприводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует B_n -инвариантное подпространство $V \subset H[n]$. Мы утверждаем, что для любого $g \in B_\infty$ выполнено $P[n]\bar{\rho}(g)V \subset V$. Действительно, пусть $v \in V$. Тогда

$$P[n]\bar{\rho}(g)v = P[n]\bar{\rho}(g)P[n]v = \bar{\rho}(\theta[n])\bar{\rho}(g)\bar{\rho}(\theta[n])v = \bar{\rho}(\theta[n]g\theta[n])v.$$

Заметим, что $\theta[n]g\theta[n] \in B_n^\circ$, а значит, $P[n]\bar{\rho}(g)v \in V$. Следовательно, $\rho(g)$ содержится в собственном подпространстве H . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. Допустим, что подпространство $H[n]$ является S_∞ -циклическим, т.е. система подпространств $\rho(g)H[n]$, где g пробегает S_∞ , тотальна в H . Тогда представление ρ однозначно определяется представлением ξ_n полугруппы B_n в $H[n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v, w \in H[n]$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \rho(g)v, \rho(h)w \rangle &= \langle \rho(g)\rho(\theta[n])v, \rho(h)\rho(\theta[n])w \rangle \\ &= \langle \rho(\theta[n])\rho(h^*)\rho(g)\rho(\theta[n])v, w \rangle = \langle \rho(\theta[n]h^*g\theta[n])v, w \rangle \\ &= \langle \xi_n(\theta[n]h^*g\theta[n])v, w \rangle, \end{aligned}$$

и мы видим, что скалярные произведения $\langle \rho(g)v, \rho(h)w \rangle$ однозначно определяются представлением ξ_n . Поэтому система векторов $\rho(g)v$, где g пробегает S_∞ , а v пробегает $H[n]$, определена однозначно с точностью до унитарной эквивалентности. Но тогда и операторы

$$\rho(h): \rho(g)v \mapsto \rho(hg)v$$

определены однозначно. Лемма доказана.

2.4. Теорема Либбермана. Зафиксируем $n = 0, 1, \dots$ и неприводимое представление μ конечной группы S_n в пространстве $L = L(\mu)$. Обозначим через ι тривиальное одномерное представление группы $\bar{S}_\infty[n]$. Рассмотрим представление группы $\bar{S}_\infty$, индуцированное с представления $\mu \otimes \iota$ подгруппы $S_n \times S_\infty[n]$. Объясним, что в данном конкретном случае значит слово “индуцированное”¹³.

Рассмотрим множество Ω всех n -элементных подмножеств в $\mathbb{N}$ и пространство V всех L -значных функций на Ω . Для любых $g \in S_\infty$, $I \in \Omega$ определим подстановку $\sigma(g, I)$ по следующему правилу. Обозначим элементы I через $i_1 < \dots < i_n$, а элементы gI через $j_1 < \dots < j_n$. Для каждого i_m элемент gi_m имеет вид j_l . Мы полагаем $\sigma(g, I)m = l$. Действие группы S_∞ в пространстве V мы определим формулой

$$T_{n,\mu}(g)f(I) = \mu(\sigma(g, I))f(gI).$$

ТЕОРЕМА 2.8. а) Любое неприводимое унитарное представление группы $\bar{S}_\infty$ имеет вид $T_{n,\mu}$.

б) Любое унитарное представление ρ группы $\bar{S}_\infty$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений.

с) Это разложение единственно (в том смысле, что набор слагаемых с кратностями всегда будет один и тот же).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Назовем глубиной представления минимальное n , для которого $H[n] \neq 0$. Пусть глубина ρ равна n .

а) В $H[n]$ действует полугруппа $B[n]$, причем при $g \in B_n \setminus S_n$ мы имеем $\xi_n(g) = 0$ (в противном случае n не минимально). Поэтому мы имеем в $H[n]$ неприводимое представление μ группы S_n , причем ρ однозначно определено представлением μ . Но тогда $\rho = T_{n,\mu}$.

б) Объясним, как выбрать неприводимое подпредставление.

Пусть сначала представление ξ_n полугруппы B_n в $H[n]$ неприводимо. Возьмем B_n -циклическую оболочку R подпространства $H[n]$. Допустим, что R приводимо, $R = R_1 \oplus R_2$. Тогда проекторы $H[n]$ на R_1 и R_2 являются, в частности, B_n° -сплетающими и их образы являются подпредставлениями в $H[n]$, которое неприводимо. Поэтому одна из проекций (скажем, на R_2) равна нулю. Но тогда $H[n] \subset R_1$, и циклическая оболочка $H[n]$ содержится в R_1 . Противоречие.

Пусть ξ_n приводимо и V – неприводимое B_n -подпредставление в $H[n]$. Тогда (см. доказательство леммы 2.6) B_∞ -циклическая оболочка подпространства V содержится в $V \oplus H[n]^\perp$. В силу только что доказанного циклическая оболочка является неприводимым подпредставлением.

Повторяя эту процедуру, мы раскладываем ρ в сумму неприводимых подпредставлений.

¹³Формально унитарное индуцирование в смысле Макки (см. [46; § 13.2]) определено для локально компактных групп. В нашем случае оно применимо (см. [46; § 13.2, задачи 5–7]), потому что $S_\infty/(S_\alpha \times S_\infty[\alpha])$ является счетным пространством, на котором есть дискретная мера. Можно было бы также применить конструкцию с косым произведением (см., например, [46; п.13.4]) или конструкцию для конечных групп из [47; § 7].

с) Возьмем разложение ρ на неприводимые представления и разложим H в сумму $H = H^0 := \bigoplus_{j=0}^{\infty} \rho_j$, где ρ_j – сумма всех неприводимых слагаемых глубины j . Заметим, что ρ_0 – это подпространство S_{∞} -инвариантных векторов. Оно однозначно определено самим представлением ρ , а это в свою очередь определяет $H^1 := \bigoplus_{j=1}^{\infty} \rho_j$. Далее, ρ_1 является циклической оболочкой подпространства $H^1[1]$, и поэтому тоже однозначно определено самим представлением ρ , и т. д.

Итак, все слагаемые ρ_j канонически определены. Вопрос о разложении ρ_j на неприводимые подпредставления равносильен разложению представления группы S_j в $H^j[j]$, а такое разложение однозначно.

Теорема доказана.

2.5. Замечания к разделу 2. Похожими свойствами обладают полная бесконечномерная унитарная, ортогональная и симплектическая группы [48], а также группа всех сохраняющих меру преобразований лебеговского пространства с мерой (см. [34; гл. VIII]).

3. Трисимметрическая группа и триангулированные двумерные бордизмы

3.1. Умножение двойных классов смежности. Рассмотрим произведение $G = S_{\infty} \times S_{\infty} \times S_{\infty}$ трех копий бесконечной симметрической группы. Для элементов группы G мы будем использовать обозначение $\mathbf{g} = (g_{\text{red}}, g_{\text{yellow}}, g_{\text{blue}})$, символ g_{ν} будет обозначать одну из этих “цветных” подстановок. Через $K \simeq S_{\infty}$ обозначим диагональную подгруппу, т. е. группу, состоящую из троек вида (g, g, g) . Пусть $K[\alpha]$ – подгруппы, соответствующие $S_{\infty}[\alpha]$ при изоморфизме $S_{\infty} \rightarrow K$. Определим элементы $\theta_j[\beta] \in K[\beta]$ той же формулой (1.2), что и выше.

Для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+$ определим умножение двойных классов смежности

$$K[\alpha] \setminus G/K[\beta] \times K[\beta] \setminus G/K[\gamma] \rightarrow K[\alpha] \setminus G/K[\gamma]$$

так же, как и выше. А именно, возьмем классы смежности $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, выберем их представителей $p \in \mathfrak{p}, q \in \mathfrak{q}$ и рассмотрим следующую последовательность двойных классов смежности:

$$\mathfrak{r}_j = K[\alpha] \cdot p \theta_j[n] q \cdot K[\gamma]. \quad (3.1)$$

ЛЕММА 3.1. *Последовательность $\mathfrak{r}_j$ стабилизируется. Ее предельное значение не зависит от выбора представителей p и q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $I[\beta] = \{1, 2, \dots, \beta\}$.

Носителем $\text{supp}(g)$ перестановки g мы будем называть множество всех $i \in \mathbb{N}$ таких, что $gi \neq i$. Отметим, что $\text{supp}(g) = \text{supp}(g^{-1})$. Обозначим через $s(g)$ максимальный элемент носителя. В качестве j в (3.1) теперь можно взять любое число, большее $\max_{\nu} \max(s(p_{\nu}), s(q_{\nu})) - \beta$. Тогда для всех ν имеем

$$(\text{supp}(p_{\nu}) \setminus I[\beta]) \cap (\theta_j[\beta] \text{supp}(q_{\nu}) \setminus I[\beta]) = \emptyset.$$

Рис. 1. Раздвигание. К определению умножения двойных классов смежности.

Объясним возникающий эффект – см. рис. 1. Там изображены подстановки q_ν , $\theta_j[\beta]$, p_ν и их произведение. Вертикальные пунктиры символизируют склейку картинок. Жирными кружочками отмечены элементы множеств $I[\alpha]$, $I[\beta]$, $I[\gamma]$ (на рисунке $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $j = 6$). Все остальные элементы соответствующих копий $\mathbb{N}$ мы назовем “молочными”. “Вертикальная” дуга в q_ν , $\theta_j[\beta]$, p_ν выделена жирным, если хотя бы один из ее концов является жирным кружочком. Кроме того, в случае q_ν , p_ν жирным помечены дуги, концы которых лежат в носителе. Неформально, жирными дугами помечена содержащая входную информацию часть картинки.

Все остальные вертикальные дуги мы назовем “молочными”. При нашем выборе j молочный конец жирной дуги подстановки q_ν не может соединиться (через $\theta_j[\beta]$) с жирной дугой p_ν . И наоборот.

В последней строчке рисунка, где изображена подстановка $p_\nu \theta_j[\beta] q_\nu$, мы выделили жирным те дуги, которые были получены при склейке дуг, хотя бы одна из которых была жирной.

Заменим j на $j + 1$ и посмотрим, что произойдет с жирной частью картинки. Молочные концы жирных дуг (как верхние, так и нижние) передвинутся на две единицы вправо. Теперь вспомним, что мы имеем дело с двойными классами смежности. Мы можем сделать перестановку молочных точек верхнего ряда и перестановку молочных точек нижнего ряда так, чтобы вернуть все концы

жирных дуг на место, причем эти перестановки будут одними и теми же для всех $\nu = 1, 2, 3$. Это доказывает первое утверждение.

Теперь рассмотрим элемент $p_\nu h \theta_j[\beta] q_\nu$, где $h \in K[\beta]$. Тогда при больших j выполнено равенство

$$p_\nu h \theta_j[\beta] q_\nu = p_\nu \theta_j[\beta] q_\nu (\theta_j[\beta]^{-1} h \theta_j[\beta]),$$

и это доказывает второе утверждение. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Умножение двойных классов смежности ассоциативно.*

Мы опускаем доказательство. Формальное доказательство лемм 3.1, 3.2 на уровне умножения 0-1-матриц есть в [17].

Отображение $g \mapsto g^{-1}$ индуцирует инволюцию $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}^*$:

$$K[\alpha] \setminus G/K[\beta] \rightarrow K[\beta] \setminus G/K[\alpha].$$

Очевидно, что

$$(\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q})^* = \mathfrak{p}^* \circ \mathfrak{q}^*.$$

3.2. Группа G и комбинаторные данные. Зафиксируем элемент $\mathfrak{g} = (g_{\text{red}}, g_{\text{yellow}}, g_{\text{blue}}) \in G$. Рассмотрим счетный набор одинаковых треугольников, стороны которых покрашены в красный, желтый, синий цвета, расположенные по часовой стрелке. Пронумеруем эти треугольники натуральными числами и пометим их знаком $+$. Рассмотрим другой счетный набор пронумерованных треугольников, у которых стороны раскрашены в те же цвета, но против часовой стрелки. Пометим их знаком $-$. Треугольники считаются ориентированными, см. рис. 2, (a).

Пусть перестановка g_{red} переводит k в l . Тогда мы отождествляем красную сторону k -го плюс-треугольника с красной стороной l -го минус-треугольника в соответствии с ориентацией. Мы проделываем это для всех $k \in \mathbb{N}$ и для всех цветов (красный, желтый, синий). В итоге мы получаем (несвязную) триангулированную двумерную поверхность, см. рис. 2, (b).

Отметим, что смысл слова “триангуляция” может чуть-чуть варьироваться. Уточним, что у нас каждый треугольник вкладывается в поверхность инъективно, но пересечение двух треугольников не обязательно является вершиной или стороной, см. рис. 2, (c). Более того, если m достаточно велико, то $g_\nu m = m$ для всех цветов, а потому m -й плюс-треугольник склеивается вдоль периметра с m -м минус-треугольником и получается сфера, разбитая “экватором” на два треугольника. Мы назовем сферу, склеенную из двух треугольников, *двойным треугольником*, см. рис. 2, (d).

Назовем *оснащенной поверхностью* Ξ объединение счетного числа ориентированных триангулированных компактных двумерных поверхностей, снабженное следующей комбинаторной структурой:

– на каждом треугольнике стоит знак “плюс” или “минус”, причем плюсы и минусы идут в шахматном порядке (т. е. все соседи плюс-треугольника являются минус-треугольниками и наоборот);

Рис. 2. (а) Два счетных набора крашенных треугольников. (б) Результат склейки. (с) Такое положение треугольников допустимо. (д) Двойной треугольник.

– ребра триангуляции раскрашены в красный, желтый и синий цвета так, что у треугольника не может быть двух ребер одного цвета, причем упомянутые цвета на плюс-треугольниках идут по часовой стрелке, а на каждом минус-треугольнике – против часовой стрелки;

– все плюс-треугольники занумерованы натуральными числами; все минус-треугольники – тоже;

– все компоненты связности поверхности Ξ , кроме конечного числа, являются двойными треугольниками такими, что числовые метки плюс-треугольника и минус-треугольника совпадают.

Оснащенные поверхности рассматриваются с точностью до комбинаторной эквивалентности, сохраняющей все перечисленные структуры.

ТЕОРЕМА 3.3. Построенное выше отображение из группы $G = S_\infty \times S_\infty \times S_\infty$ в пространство всех оснащенных поверхностей является биекцией.

Для доказательства достаточно построить обратное отображение. Рассмотрим оснащенную поверхность. Для каждого красного ребра ζ смотрим на числовые метки $k(\zeta)$ на прилегающей плюс-границе и $l(\zeta)$ на прилегающей минус-границе. Далее полагаем $g_{\text{red}}k(\zeta) = l(\zeta)$. Аналогично определяем g_{yellow} и g_{blue} .

ПРИМЕРЫ И ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если $\mathbf{g} = (g, g, g)$ – элемент диагонали, то поверхность Ξ состоит из двойных треугольников.

2) Заменяя бесконечность на конечное число n , мы получаем взаимно однозначное соответствие между группой $S_n \times S_n \times S_n$ и множеством оснащенных поверхностей, склеенных из $2n$ треугольников.

3) Легко видеть, что в каждую вершину входят ребра лишь двух цветов, причем цвета этих ребер чередуются (см. рис. 2, (b)). Покрасим вершину в цвет, дополнительный к этим двум. Легко видеть, что красные вершины находятся во взаимно однозначном соответствии с независимыми циклами подстановки $g_{\text{yellow}}^{-1}g_{\text{blue}}$.

4) Для $g \in G$ рассмотрим подгруппу Γ_g в S_∞ , порожденную элементами $g_{\text{yellow}}^{-1}g_{\text{blue}}$, $g_{\text{blue}}^{-1}g_{\text{red}}$. Легко видеть, что компоненты поверхности находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами группы Γ_g .

5) Пусть $g \in G$, $h \in K$. Операция правого умножения $g \mapsto gh$ сводится к перестановке плюс-меток на оснащенной поверхности.

3.3. Произведение трех симметрических групп и комбинаторные данные. Последнее замечание влечет такое следствие.

ТЕОРЕМА 3.4. *Переход от g к соответствующему классу смежности $g \in K[\alpha] \setminus G/K[\beta]$ равносильен забыванию плюс-меток с номерами $> \beta$ и минус-меток с номерами $> \alpha$.*

Для соблюдения формальностей мы дадим описание комбинаторных данных, соответствующих двойным классам смежности. Обозначим через $\mathcal{L}[\alpha, \beta]$ множество компактных триангулированных поверхностей, оснащенных следующими данными:

- на каждом треугольнике стоит знак “плюс” или “минус”, причем плюсы и минусы идут в шахматном порядке;
- ребра триангуляции раскрашены в красный, желтый и синий цвета; цвета красный, желтый, синий на плюс-треугольниках идут по часовой стрелке, а на минус-треугольниках – против часовой стрелки;
- даны инъективное отображение ι^+ множества $\{1, \dots, \beta\}$ в множество плюс-треугольников и инъективное отображение ι^- из $\{1, \dots, \alpha\}$ в множество минус-треугольников; помеченные таким образом треугольники мы будем называть *входами* и *выходами*;
- на любом двойном треугольнике есть хотя бы одна метка.

ПРИМЕРЫ И ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Сохранять или не сохранять двойные треугольники без меток в счетном количестве – вопрос вкусовой. Информации они все равно никакой не несут.

2) Пусть K – группа. Двойные классы смежности

$$\text{diag}(K) \setminus K \times K \times K / \text{diag}(K)$$

находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности $K \times K$ по $\text{diag}(K)$.

3) В частности, мы получаем комбинаторное описание пар подстановок σ_1, σ_2 с точностью до общего сопряжения, $(\sigma_1, \sigma_2) \sim (\tau\sigma_1\tau^{-1}, \tau\sigma_2\tau^{-1})$.

3.4. Умножение двойных классов смежности. Пусть $\mathfrak{P} \in \mathcal{L}[\alpha, \beta]$, $\Omega \in \mathcal{L}[\beta, \gamma]$. Определим новый класс $\mathfrak{R} \in \mathcal{L}[\alpha, \gamma]$ по следующему правилу. Мы проделываем дырки на месте отмеченных плюс-треугольников (входов) $\iota_{\mathfrak{P}}^+(k) \in \mathfrak{P}$ и минус-треугольников (выходов) $\iota_{\Omega}^-(k) \in \Omega$, а дальше склеиваем

Рис. 3. К п. 3.4. Поверхность, у которой склеены вершины.

границы $\iota_{\mathfrak{P}}^+(k)$ и $\iota_{\mathfrak{Q}}^-(k)$ в соответствии с раскраской ребер. Прodelав это со всеми k , мы получаем новый двумерный объект с триангуляцией, раскраской ребер, с плюсами, минусами и метками на треугольниках. Объект состоит из треугольников, склеенных по ребрам, причем к каждому ребру прилежит ровно два треугольника. Такой объект является двумерной триангулированной поверхностью, у которой могут быть склеены некоторые пары вершин¹⁴ (см. рис. 3). Мы разорвем склейки и получим новую поверхность, у которой по-прежнему раскрашены ребра, на гранях по-прежнему в шахматном порядке стоят плюсы и минусы, а также имеются минус-метки, не превосходящие α , и плюс-метки, не превосходящие γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Описанная операция склейки поверхностей соответствует умножению двойных классов смежности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два элемента $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ группы $\mathbf{G}$. Поставим им в соответствие триангулированные поверхности $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и склеим эти поверхности по описанному рецепту. Легко проверить, что это соответствует умножению в группе.

“Посчитаем” таким способом произведение

$$\mathbf{p}\theta_j[\beta]\mathbf{q} = \mathbf{p}(\theta_j[\beta]\mathbf{q})$$

при большом j .

Перед склейкой мы должны перенумеровать минус-метки на поверхности, соответствующей $\mathbf{q}$. Минус-треугольники поверхности $\theta_j[\beta]\mathbf{q}$ с номерами $> \beta$ будут склеиваться с двойными треугольниками поверхности $\mathbf{p}$. Поверхность при такой склейке останется прежней, лишь метки на переклеенных треугольниках сменятся. Аналогично, плюс-треугольники поверхности $\mathbf{p}$ с метками $> \beta$ склеиваются с двойными треугольниками поверхности $\theta_j[\beta]\mathbf{q}$. Заметим, что произошедшая при этом смена меток не имеет никакого значения, они все равно забываются при переходе к двойным классам смежности.

Таким образом, нетривиальные преобразования поверхностей происходят лишь при склейке по треугольникам с метками $\leq \beta$, а это и есть наша операция. Предложение доказано.

ПРИМЕР. Умножение в полугруппе $K[0] \setminus G/K[0]$ – это операция несвязного объединения поверхностей. В частности, эта полугруппа коммутативна.

¹⁴Такой эффект может возникать, если два входа, касающихся вершинами, склеиваются с двумя выходами, касающимися вершинами.

Следующее высказывание очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Отображение $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}^*$ соответствует смене ориентации поверхности и замене всех плюсов на минусы, а минусов на плюсы.*

3.5. Теорема мультипликативности. Пусть ρ – унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H . Пусть $H[\alpha]$, $P[\alpha]$, $\tilde{\rho}(\mathfrak{g})$ вводятся так же, как выше в п. 1.7. Тогда верна следующая теорема мультипликативности.

ТЕОРЕМА 3.7. *Для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+$ и любых*

$$\mathfrak{p} \in K[\alpha] \setminus G/K[\beta], \quad \mathfrak{q} \in K[\beta] \setminus G/K[\gamma]$$

выполнено равенство

$$\tilde{\rho}(\mathfrak{p})\tilde{\rho}(\mathfrak{q}) = \tilde{\rho}(\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q}). \quad (3.2)$$

Кроме того,

$$\tilde{\rho}(\mathfrak{p}^*) = \tilde{\rho}(\mathfrak{p})^*, \quad \|\tilde{\rho}(\mathfrak{p})\| \leq 1. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Те же аргументы, что и в доказательстве предложения 2.1, б) показывают, что замыкание V подпространства $\bigcup H[\alpha]$ является G -инвариантным. Поэтому ортогональное дополнение $V^\perp$ тоже G -инвариантно, следовательно, операторы $\tilde{\rho}(\mathfrak{p})$ зависят только от ограничения ρ на подпространство V . Значит, без ограничения общности можно положить $V = H$. В силу предложения 2.1 представление подгруппы $K \simeq S_\infty$ в H непрерывно продолжается на полную симметрическую группу $\bar{S}_\infty$. Теперь, применяя теорему 2.4, б), мы получаем, что последовательность $\rho(\theta_j[\beta])$ слабо сходится к проектору $P[\beta]$.

Выберем представителей двойных классов смежности: $p \in \mathfrak{p}$, $q \in \mathfrak{q}$. Для достаточно большого j имеем

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q})P[\gamma] &= P[\alpha]\rho(p\theta_j[\beta]q)P[\gamma] = \lim_{k \rightarrow \infty} P[\alpha]\rho(p\theta_k[\beta]q)P[\gamma] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P[\alpha]\rho(p)\rho(\theta_k[\beta])\rho(q)P[\gamma] \\ &= P[\alpha]\rho(p)\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\theta_k[\beta])\right)\rho(q)P[\gamma] = P[\alpha]\rho(p)P[\beta]\rho(q)P[\gamma] \\ &= (P[\alpha]\rho(p)P[\beta])(P[\beta]\rho(q)P[\gamma]) = \tilde{\rho}(\mathfrak{p})\tilde{\rho}(\mathfrak{q})P[\gamma], \end{aligned}$$

знак предела обозначает слабый операторный предел. Это доказывает (3.2). Утверждения (3.3) очевидны. Предложение доказано.

3.6. Сферичность.

ТЕОРЕМА 3.8. *Пара (G, K) сферична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полугруппа $K \setminus G/K$ является абелевой. Поэтому любое ее неприводимое представление, согласованное с инволюцией, одномерно. Эта полугруппа действует в $H[0]$. Если ее представление в $H[0]$ приводимо, то (см. доказательство леммы 2.6) приводимо и представление всей группы G . Теорема доказана.

Стоит отдельно отметить следующее высказывание (которое только что было упомянуто и использовано).

ТЕОРЕМА 3.9. *K -сферические функции группы G являются гомоморфизмами полугруппы $K \setminus G/K$ в мультипликативную полугруппу комплексных чисел, по модулю не превосходящих 1.*

3.7. Трисимметрическая группа $\mathbf{G}$. Заметим, что в доказательстве теоремы 3.7 есть некоторый диссонанс. Пространство H раскладывается в сумму двух G -инвариантных подпространств: $H = V \oplus V^\perp$. Относительно подпредставления в V мы делаем нетривиальное утверждение, а в отношении $V^\perp$ мы ссылаемся на тождество $0 \cdot 0 = 0$. В связи с этим естественно сузить класс представлений, с которыми мы работаем.

Трисимметрической группой мы назовем подгруппу $\mathbf{G}$ в $\bar{S}_\infty \times \bar{S}_\infty \times \bar{S}_\infty$, состоящую из троек $(g_{\text{red}}, g_{\text{yellow}}, g_{\text{blue}})$ таких, что $g_{\text{red}}g_{\text{yellow}}^{-1}, g_{\text{yellow}}g_{\text{blue}}^{-1} \in S_\infty$. Иными словами, мы берем подгруппу в $\bar{S}_\infty \times \bar{S}_\infty \times \bar{S}_\infty$, порожденную группой $G = S_\infty \times S_\infty \times S_\infty$ и диагональной подгруппой $\mathbf{K}$, состоящей из элементов (g, g, g) с $g \in \bar{S}_\infty$. На группе $\mathbf{G}$ мы введем топологию, считая, что на $\mathbf{K}$ это топология группы $\bar{S}_\infty$, а вся группа является несвязным объединением односторонних классов смежности $\mathbf{G}/\mathbf{K}$.

Следующее высказывание тавтологично (см. предложение 2.1).

ЛЕММА 3.10. а) *Унитарное представление группы G в пространстве H непрерывно продолжается на $\mathbf{G}$ тогда и только тогда, когда его ограничение на K непрерывно продолжается на $\mathbf{K}$.*

б) *Унитарное представление группы G в пространстве H непрерывно продолжается на $\mathbf{G}$ тогда и только тогда, когда подпространство $\bigcup H[\alpha]$ плотно в H .*

Так же, как и раньше, мы введем семейство подгрупп $\mathbf{K}[\alpha]$ в $\mathbf{K}$. Тогда по-прежнему определено умножение двойных классов смежности, при этом естественное отображение

$$K[\alpha] \setminus G/K[\beta] \rightarrow \mathbf{K}[\alpha] \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}[\beta]$$

является биекцией.

Точно так же по элементу группы $\mathbf{G}$ строится раскрашенная триангулированная поверхность с метками. Она по-прежнему является несвязным объединением счетного числа компактных триангулированных поверхностей, причем почти все поверхности являются двойными треугольниками. Единственное отличие – теперь мы не налагаем условия на метки на разных сторонах почти всех двойных треугольников.

3.8. Теорема аппроксимации. Рассмотрим категорию $\mathcal{H}(G, K)$ – шлейф пары (G, K) , объектами которой являются неотрицательные целые числа, а морфизмами – двойные классы смежности $K[\alpha] \setminus G/K[\beta]$. Рассмотрим ее $*$ -представление R . Это значит, что для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ мы имеем гильбертово пространство $V[\alpha]$, для любого морфизма $\mathbf{p}: \beta \rightarrow \alpha$ мы имеем ограниченный

линейный оператор $R(\mathbf{p}): V[\beta] \rightarrow V[\alpha]$, причем

$$R(\mathbf{p} \circ \mathbf{q}) = R(\mathbf{p})R(\mathbf{q}), \quad R(\mathbf{p}^*) = R(\mathbf{p})^*, \quad R(\text{Id}_\alpha) = 1_{V[\alpha]},$$

где Id_α – единичный автоморфизм объекта α , а $1_{V[\alpha]}$ – единичный оператор в $V[\alpha]$.

ТЕОРЕМА 3.11. *Любое $*$ -представление R категории $\mathcal{K}(G, K)$ эквивалентно представлению $\tilde{\rho}$, полученному из некоторого унитарного представления ρ группы $\mathbf{G}$, причем представление ρ однозначно определено.*

В следующем пункте мы построим это представление ρ как предел представлений полугрупп $\text{Mor}(\alpha, \alpha)$.

3.9. Обратная конструкция. Доказательство теоремы 3.11. Ниже следующая конструкция – частный случай абстрактной теоремы VIII.1.10 из [34].

Пусть $\alpha \leq \beta$. Определим следующие морфизмы нашей категории:

- $\theta_\alpha^\beta \in \text{Mor}(\beta, \beta)$ – набор из двойных треугольников с метками

$$(1, 1), (2, 2), \dots, (\alpha, \alpha), (\alpha + 1, \emptyset), \dots, (\beta, \emptyset), (\emptyset, \alpha + 1), \dots, (\emptyset, \beta);$$

- $\mu_\alpha^\beta \in \text{Mor}(\alpha, \beta)$ – набор из двойных треугольников с метками

$$(1, 1), (2, 2), \dots, (\alpha, \alpha), (\emptyset, \alpha + 1), \dots, (\emptyset, \beta);$$

- $\nu_\alpha^\beta \in \text{Mor}(\beta, \alpha)$ определяется как $\nu_\alpha^\beta = (\mu_\alpha^\beta)^*$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (\theta_\alpha^\beta)^* &= \theta_\alpha^\beta = (\theta_\alpha^\beta)^2; & \mu_\alpha^\beta \circ \nu_\alpha^\beta &= \theta_\alpha^\beta, & \nu_\alpha^\beta \circ \mu_\alpha^\beta &= 1_\alpha; \\ \theta_\alpha^\beta \circ \mu_\alpha^\beta &= \mu_\alpha^\beta, & \nu_\alpha^\beta \circ \theta_\alpha^\beta &= \nu_\alpha^\beta. \end{aligned}$$

Применим к этим равенствам функтор R . Получаем, что $R(\theta_\alpha^\beta)$ является ортогональным проектором в $V[\beta]$, а $R(\mu_\alpha^\beta)$ – оператором изометрического вложения $V[\alpha] \rightarrow V[\beta]$, отождествляющего $V[\alpha]$ с образом оператора $R(\theta_\alpha^\beta)$.

Далее определим вложение полугрупп $\zeta: \text{Mor}(\alpha, \alpha) \rightarrow \text{Mor}(\beta, \beta)$. К поверхности из $\text{Mor}(\alpha, \alpha)$ мы добавляем набор двойных треугольников с метками¹⁵

$$(\alpha + 1, \emptyset), \dots, (\beta, \emptyset), (\emptyset, \alpha + 1), \dots, (\emptyset, \beta).$$

Обозначим

$$\Gamma = \varinjlim \text{Mor}(\alpha, \alpha).$$

Легко видеть, что

$$\zeta(\mathbf{p})\theta_\alpha^\beta = \theta_\alpha^\beta\zeta(\mathbf{p}), \quad \zeta(\mathbf{p})\mu_\alpha^\beta = \mu_\alpha^\beta\mathbf{p}.$$

Разложим пространство $V[\beta]$ в прямую сумму $\text{im } R(\theta_\alpha^\beta) \oplus (\text{im } R(\theta_\alpha^\beta))^\perp$. В силу только что выписанных равенств, оператор $R(\zeta(\mathbf{p}))$ имеет следующую блочную структуру:

$$\begin{pmatrix} R(\mathbf{p}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¹⁵Отметим, что все элементы образа необратимы.

Далее заметим, что при $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ выполнено равенство

$$\mu_\beta^\gamma \circ \mu_\alpha^\beta = \mu_\alpha^\gamma.$$

Рассмотрим цепочку вложений гильбертовых пространств

$$\cdots \longrightarrow V[\alpha] \longrightarrow V[\alpha + 1] \longrightarrow \cdots,$$

возьмем объединение всех членов этой цепочки, обозначим пополнение через V . В каждом $V[\alpha]$ действует полугруппа $\text{Mor}(\alpha, \alpha)$, эти действия согласованы, поэтому в предельном пространстве мы получаем некоторое представление $R^\diamond$ полугруппы Γ . Через $P[\alpha]$ мы обозначим проектор на $V[\alpha]$. Тогда

$$P[\alpha]|_{V[\beta]} = R^\diamond(\theta_\alpha^\beta).$$

ЛЕММА 3.12. *Для любого $\mathfrak{p} \in \Gamma$ выполнено неравенство $\|R^\diamond(\mathfrak{p})\| \leq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{p} \in \text{Mor}(\alpha, \alpha)$, и пусть соответствующая поверхность состоит из $2N$ треугольников. Расставляя метки на пустых треугольниках произвольным образом, мы получаем $g \in S_N$ такой, что $\mathfrak{p} = \nu_\alpha^N g \mu_\alpha^N$. Поэтому $R^\diamond(\mathfrak{p}) = R(\nu_\alpha^N)R(g)R(\mu_\alpha^N)$. Но

$$R(g)R(g)^* = R(g)R(g^{-1}) = 1_{H[N]},$$

т. е. $R(g)$ унитарен. Оператор $R(\mu_\alpha^N)$ является изометрическим вложением, а $R(\nu_\alpha^N)$ сопряжен к нему. Поэтому норма произведения не превосходит 1. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.13. *Пусть $\mathfrak{p} \in \mathbf{G}$. Пусть $\mathfrak{p}_\alpha \in \text{Mor}(\alpha, \alpha)$ – двойной класс смежности, содержащий $\mathfrak{p}$, его же мы рассматриваем как элемент полугруппы Γ . Тогда последовательность операторов $R^\diamond(\mathfrak{p}_\alpha)$ имеет слабый предел и его норма не превосходит 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из согласованности

$$P[\alpha]R^\diamond(\mathfrak{p}_{\alpha+1})P[\alpha] = R^\diamond(\mathfrak{p}_\alpha)$$

и из предыдущей леммы. Разложим H в прямую сумму подпространств:

$$H = \bigoplus_{\alpha=0}^{\infty} (H[\alpha] \ominus H[\alpha - 1])$$

и представим элементы $R^\diamond(\mathfrak{p}_\alpha)$ в виде блочных матриц. Все блоки такой матрицы, у которых хотя бы один из индексов больше α , равны нулю. Переход от $R^\diamond(\mathfrak{p}_\alpha)$ к $R^\diamond(\mathfrak{p}_{\alpha-1})$ состоит в занулении блоков, у которых есть индекс α . Обратный переход состоит в дописывании блоков, причем норма остается не большей 1. Лемма доказана.

Для $\mathfrak{p} \in G$ обозначим $\rho(\mathfrak{p}) := \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \rho(\mathfrak{p}_\alpha)$. Пусть $p, q \in G$, а $r = pq$. Пусть все 6 перестановок p_ν, q_ν тривиальны на элементах $N + 1, N + 2, \dots$. Мы будем брать лишь α, β , большие N . Тогда

$$\mathfrak{p}_\alpha \mathfrak{q}_\beta = \mathfrak{r}_{\min(\alpha, \beta)}.$$

Применяя к обеим частям функтор R и переходя к слабому пределу

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\lim_{\beta \rightarrow \infty} \dots \right),$$

мы получаем $\rho(p)\rho(q) = \rho(r) = \rho(pq)$.

Представление группы G построено. Его ограничение на диагональ непрерывно в топологии полной симметрической группы, поэтому представление продолжается по непрерывности на всю группу $\mathbf{G}$. Теорема 3.11 доказана.

3.10. Счетные тензорные произведения гильбертовых пространств.

(См. [49].) Пусть H_j – гильбертовы пространства, причем в каждом H_j выделен единственный вектор ξ_j . Выберем в каждом H_j по ортогональному базису $e_k^{(j)}$ так, что $e_1^{(j)} = \xi_j$. Рассмотрим гильбертово пространство

$$\bigotimes_{j=1}^{\infty} (H_j, \xi_j),$$

базисом которого являются формальные векторы

$$e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)} \otimes e_{k_3}^{(3)} \otimes \dots,$$

причем все сомножители, начиная с некоторого номера, имеют вид $e_1^{(n)}$ (так что общее число элементов базиса счетно).

Для последовательности векторов $v^{(j)} \in H_j$ мы определим разложимый вектор

$$v^{(1)} \otimes v^{(2)} \otimes v^{(3)} \otimes \dots,$$

раскладывая его по базису посредством открывания скобок (выбирая из почти всех скобок слагаемое с $e_1^{(j)} = \xi_j$). Чтобы получился вектор из нашего пространства, необходимо и достаточно, чтобы произведения

$$\prod_{j=1}^{\infty} \|v^{(j)}\|, \quad \prod_{j=1}^{\infty} \langle v^{(j)}, \xi_j \rangle$$

сходились. При выполнении этих условий имеет место равенство

$$\left\langle \bigotimes_{j=1}^{\infty} v^{(j)}, \bigotimes_{j=1}^{\infty} w^{(j)} \right\rangle = \prod_{j=1}^{\infty} \langle v^{(j)}, w^{(j)} \rangle_{H_j}. \quad (3.4)$$

Полученная конструкция не зависит от выбора базисов в H_j (формулу (3.4) можно взять в качестве инвариантного определения тензорного произведения), но зависит от выбора отмеченных векторов ξ_j .

3.11. Конструкция сферических представлений группы $\mathbf{G}$. I.

Рассмотрим три гильбертовых пространства, V_{red} , V_{yellow} , V_{blue} (они могут быть как конечномерными, так и бесконечномерными). Рассмотрим тензорное произведение

$$X := V_{\text{red}} \otimes V_{\text{yellow}} \otimes V_{\text{blue}} \quad (3.5)$$

и единичный вектор $\xi \in X$. Далее рассмотрим счетное тензорное произведение $H := (X, \xi) \otimes (X, \xi) \otimes \cdots = (V_{\text{red}} \otimes V_{\text{yellow}} \otimes V_{\text{blue}}, \xi) \otimes (V_{\text{red}} \otimes V_{\text{yellow}} \otimes V_{\text{blue}}, \xi) \otimes \cdots$.

Обозначим также

$$\Xi := \xi^{\otimes \infty} \in H.$$

Определим действие ρ группы $\mathbf{G}$ в H . Первая копия группы S_∞ переставляет красные множители V_{red} , вторая – желтые множители V_{yellow} , третья – синие множители V_{blue} . Диагональная подгруппа $\mathbf{K} = \bar{S}_\infty$ действует перестановками множителей (X, ξ) .

ЗАМЕЧАНИЕ. а) Мы не можем (за исключением очень вырожденных случаев) продолжить действие красной копии группы S_∞ до действия полной симметрической группы. Действительно, перестановка двух множителей V_{red} в

$$(V_{\text{red}} \otimes V_{\text{yellow}} \otimes V_{\text{blue}}, \xi) \otimes (V_{\text{red}} \otimes V_{\text{yellow}} \otimes V_{\text{blue}}, \xi),$$

вообще говоря, не оставляет вектор $\xi \otimes \xi$ на месте, а потому произведение элементарных транспозиций $(12)(34)(56) \dots$ выводит вектор Ξ из H .

б) Вектор Ξ является единственным $\mathbf{K}$ -неподвижным вектором. Действительно, дополним вектор ξ до ортонормального базиса $r_1 = \xi, r_2, r_3, \dots$ в X . Пусть h – неподвижный вектор и $\beta_{i_1 i_2 \dots}$ – его коэффициенты разложения по базису $r_{i_1} \otimes r_{i_2} \otimes \cdots$. Тогда $\beta_{\dots}$ не должны меняться при перестановках индексов. Поэтому если не все i_k равны 1, то мы получаем счетное число одинаковых коэффициентов. Следовательно, этот коэффициент равен нулю.

с) Аналогично, $H[\alpha]$ есть

$$\underbrace{(X, \xi) \otimes \cdots \otimes (X, \xi)}_{\alpha \text{ раз}} \otimes \xi \otimes \xi \otimes \cdots.$$

д) Обозначим через $U(V)$ группу всех унитарных операторов пространства V . Рассмотрим в $X = U(V_{\text{red}}) \times U(V_{\text{yellow}}) \times U(V_{\text{blue}})$ подгруппу Q , оставляющую ξ на месте. Тогда Q действует на каждом множителе произведения $X \times X \times \cdots$ и на всем этом произведении. Это действие коммутирует с действием $\mathbf{G}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. *Циклическая $\mathbf{G}$ -оболочка вектора Ξ является неприводимым представлением $\mathbf{G}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вариант леммы 2.6.

3.12. Сферические функции. Пусть $e_i^{\text{red}}, e_j^{\text{yellow}}, e_k^{\text{blue}}$ – ортонормированные базисы в $V_{\text{red}}, V_{\text{yellow}}, V_{\text{blue}}$. Пусть

$$\xi = \sum \alpha_{ijk} e_i^{\text{red}} \otimes e_j^{\text{yellow}} \otimes e_k^{\text{blue}}.$$

Выпишем выражение для сферической функции

$$\Phi(\mathfrak{g}) := \langle \rho(\mathfrak{g})\Xi, \Xi \rangle, \quad g \in \mathfrak{g} \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}.$$

Рассмотрим соответствующую триангулированную поверхность $\mathfrak{G} \in \mathcal{L}[0, 0]$. Поставим на каждом ребре поверхности базисный вектор e_i^ν соответствующего

цвета ν . Назовем такие данные *оснащением*. Зафиксируем оснащение $\mathcal{E}$. Для каждого треугольника Δ обозначим через $\iota_{\text{red}}(\Delta)$, $\iota_{\text{yellow}}(\Delta)$, $\iota_{\text{blue}}(\Delta)$ номера базисных векторов, стоящих на ребрах.

ТЕОРЕМА 3.15. *Сферические функции задаются формулой*

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{g}) = & \sum_{\mathcal{E}} \prod_{\Delta - \text{плюс-треугольник}} \alpha_{\iota_{\text{red}}(\Delta)\iota_{\text{yellow}}(\Delta)\iota_{\text{blue}}(\Delta)} \\ & \times \prod_{\Delta - \text{минус-треугольник}} \overline{\alpha_{\iota_{\text{red}}(\Delta)\iota_{\text{yellow}}(\Delta)\iota_{\text{blue}}(\Delta)}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\mathcal{E}$ пробегает все оснащения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть носитель g содержится в $\{1, \dots, N\}$. Тогда достаточно рассмотреть представление $S_N \times S_N \times S_N$ в $X^{\otimes N}$ и вычислить матричный элемент $\langle \rho(g)\xi^{\otimes N}, \xi^{\otimes N} \rangle$. Обозначим для краткости красную, желтую и синюю перестановки через p , q , r , а элементы базисов через x_i , y_j , z_k . В этих обозначениях

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum (\alpha_{i_1 j_1 k_1} \alpha_{i_2 j_2 k_2} \dots) (x_{i_1} \otimes y_{j_1} \otimes z_{k_1}) \otimes (x_{i_2} \otimes y_{j_2} \otimes z_{k_2}) \otimes \dots, \\ \rho(g)\Xi &= \sum (\alpha_{i_1 j_1 k_1} \alpha_{i_2 j_2 k_2} \dots) (x_{i_{p(1)}} \otimes y_{j_{q(1)}} \otimes z_{k_{r(1)}}) \\ &\quad \otimes (x_{i_{p(2)}} \otimes y_{j_{q(2)}} \otimes z_{k_{r(2)}}) \otimes \dots. \end{aligned}$$

Возьмем базисный вектор $(x_{i_1} \otimes y_{j_1} \otimes z_{k_1}) \otimes (x_{i_2} \otimes y_{j_2} \otimes z_{k_2}) \otimes \dots$. Коэффициенты при нем в Ξ и в $\rho(g)\Xi$ равны соответственно

$$\prod_m \alpha_{i_m j_m k_m} \quad \text{и} \quad \prod_m \alpha_{i_{p^{-1}(m)} j_{q^{-1}(m)} k_{r^{-1}(m)}}. \quad (3.7)$$

Теперь мы пишем $e_{i_m}^{\text{red}}$ на красном ребре между плюс-треугольником с меткой m и минус-треугольником с меткой $p(m)$, и аналогично для желтых и синих ребер. Мы получаем оснащение триангулированной поверхности, а произведение выражений (3.7) как раз дает слагаемое в (3.6). Теорема доказана.

3.13. Конструкции сферических представлений группы G . II. Предыдущая конструкция допускает обобщение, а именно, вместо тензорных произведений мы можем рассмотреть супертензорные произведения.

Пусть $V = V^{\bar{0}} \oplus V^{\bar{1}}$ – линейное суперпространство, т. е. пространство, разложенное в сумму четной и нечетной части. Мы будем называть такой объект *суперпространством*. Определим тензорный квадрат V обычным образом. Однако заменим оператор перестановки сомножителей на

$$\begin{aligned} (v^{\bar{0}} \oplus v^{\bar{1}}) \otimes (w^{\bar{0}} \oplus w^{\bar{1}}) &= (v^{\bar{0}} \otimes w^{\bar{0}}) + (v^{\bar{0}} \otimes w^{\bar{1}}) + (v^{\bar{1}} \otimes w^{\bar{0}}) + (v^{\bar{1}} \otimes w^{\bar{1}}) \\ &\mapsto (w^{\bar{0}} \otimes v^{\bar{0}}) + (w^{\bar{0}} \otimes v^{\bar{1}}) + (w^{\bar{1}} \otimes v^{\bar{0}}) - (w^{\bar{1}} \otimes v^{\bar{1}}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Зная действие транспозиций (12), (23), $\dots$, мы можем определить действие симметрической группы S_n в тензорной степени $V^{\otimes n}$. Можно сказать иначе: пронося нечетный вектор мимо нечетного вектора, мы меняем знак. Тензорное

произведение, снабженное таким действием симметрической группы, мы назовем *супертензорным произведением*.

Теперь пусть $V_{\text{red}}, V_{\text{yellow}}, V_{\text{blue}}$ – суперпространства. Введем в их тензорном произведении X структуру суперпространства очевидным образом:

$$\begin{aligned} X^{(0)} := & (V_{\text{red}}^{(0)} \otimes V_{\text{yellow}}^{(0)} \otimes V_{\text{blue}}^{(0)}) \oplus (V_{\text{red}}^{(1)} \otimes V_{\text{yellow}}^{(1)} \otimes V_{\text{blue}}^{(0)}) \\ & \oplus (V_{\text{red}}^{(1)} \otimes V_{\text{yellow}}^{(0)} \otimes V_{\text{blue}}^{(1)}) \oplus (V_{\text{red}}^{(0)} \otimes V_{\text{yellow}}^{(1)} \otimes V_{\text{blue}}^{(1)}), \end{aligned}$$

а $X^{(1)}$ – ортогональное дополнение к $X^{(0)}$. Выберем единичный вектор $\xi \in X^{(0)}$ и рассмотрим супертензорное произведение $H = (X, \xi) \otimes (X, \xi) \otimes \dots$. Полная симметрическая группа $\mathbf{K} = \overline{S}_{\infty}$ действует в H перестановками множителей.

Действительно, векторы вида $\bigotimes_{j=1} v_j$, где каждый из векторов v_j является или

четным, или нечетным, причем $v_j = \xi$ для всех j , кроме конечного числа, образуют тотальную систему в H . С другой стороны, действие бесконечной перестановки на любом таком векторе определено. Действие трех копий симметрической группы S_{∞} мы определяем так же, как выше.

Как и в случае обычных тензорных произведений, $\bigotimes \xi^{\infty}$ является единственным $\mathbf{K}$ -неподвижным вектором и его $\mathbf{G}$ -циклическая оболочка является неприводимым представлением.

3.14. Фоковское представление группы изометрий вещественного гильбертова пространства. Подробнее см., например, [34; § 6.1]. Обозначим через $\text{Isom}(V)$ группу изометрий вещественного гильбертова пространства V . Очевидно, что изометрии имеют вид $Rv = Uv + h$, где U – ортогональный оператор (мы обозначим группу всех ортогональных операторов через $O(V)$), а $h \in V$.

ЛЕММА 3.16. Пусть V – вещественное гильбертово пространство. Тогда существуют гильбертово пространство $F(V)$ (пространство Фока) и тотальная система векторов $\psi_v \in F(V)$, где v пробегает V , такая, что

$$\langle \psi_v, \psi_w \rangle_{F(V)} = \exp\left(-\frac{\|v - w\|^2}{2}\right). \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$ с гауссовой мерой $\pi^{-n}e^{-\|z\|^2}$. В пространстве L^2 по этой мере рассмотрим систему векторов

$$\psi_v(z) = \exp\left(\langle z, v \rangle - \frac{\langle v, v \rangle}{2}\right).$$

В качестве $F(\mathbb{R}^n)$ возьмем замыкание линейной оболочки $\psi_v(z)$, $v \in \mathbb{C}^n$ (на самом деле это подпространство в L^2 , состоящее из целых функций на $\mathbb{C}^n$).

Далее мы берем вложение пространств $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, а также соответствующее вложение J_n пространств функций,

$$J_n f(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = f(z_1, \dots, z_n).$$

Легко видеть, что это – изометричное вложение

$$L^2(\mathbb{C}^n, \pi^{-n}e^{-\|z\|^2}) \rightarrow L^2(\mathbb{C}^{n+1}, \pi^{-n-1}e^{-\|z\|^2}),$$

индуцирующее вложение $F(\mathbb{R}^n) \rightarrow F(\mathbb{R}^{n+1})$. Векторы $\psi_{v_1, \dots, v_n}$ переходят в $\psi_{v_1, \dots, v_n, 0}$. В пределе получаем гильбертово пространство с системой векторов $\psi_{v_1, v_2, \dots}$, где $v_j = 0$ начиная с некоторого места, а их скалярные произведения задаются формулой (3.9). Остается замкнуть эту систему в предельном пространстве. Таким образом, мы построили пространство $F(\ell_2)$, а любое гильбертово пространство отождествляется с ℓ_2 . Лемма доказана.

Пусть R – изометрия пространства V . Рассмотрим отображение системы ψ_v в себя, заданное формулой

$$\psi_v \rightarrow \psi_{Rv}.$$

Тогда $\langle \psi(Rv), \psi(Rw) \rangle = \langle \psi(v), \psi(w) \rangle$, а потому это отображение продолжается до некоторого унитарного оператора $\sigma(R)$ в пространстве $F(V)$. В итоге мы получаем унитарное представление группы $\text{Isom}(V)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Данная конструкция описана несколько “нематериальным” способом. В действительности, пространство $F(V)$ может быть реализовано как пространство голоморфных функций на комплексификации пространства V , а операторы, отвечающие ортогональным преобразованиям и сдвигам, имеют соответственно вид

$$f(z) \mapsto (zU), \quad f(z) \mapsto f(z+h) \exp(-\langle z, h \rangle_V).$$

Легко проверить, что построенное представление группы $\text{Isom}(V)$ является $O(V)$ -сферическим, $O(V)$ -неподвижный вектор – это ψ_0 , а сферическая функция равна $\exp(-\|h\|^2/2)$.

3.15. Конструкции сферических представлений группы $\mathbf{G}$. III. Наша следующая цель – вложить группу $\mathbf{G}$ в группу изометрий гильбертова пространства, а затем – получить представления группы $\mathbf{G}$ в фоковском пространстве путем ограничения построенного выше представления группы $\text{Isom}(V)$.

В качестве V мы возьмем тензорное произведение $\ell_2 \otimes \ell_2 \otimes \ell_2$. В нем очевидным образом определено представление $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ прямого произведения $\bar{S}_\infty \times \bar{S}_\infty \times \bar{S}_\infty$ (через π_ν мы обозначаем тавтологическое представление ν -й копии $\bar{S}_\infty$ в ν -й копии ℓ_2). Рассмотрим формальное выражение

$$\mathbf{u} := \sum_j e_j \otimes e_j \otimes e_j, \quad (3.10)$$

которое, разумеется, не лежит в гильбертовом пространстве $\ell_2 \otimes \ell_2 \otimes \ell_2$.

Рассмотрим следующие преобразования пространства $\ell_2 \otimes \ell_2 \otimes \ell_2$:

$$R_t(g_1, g_2, g_3)v = \pi_1(g_1) \otimes \pi_2(g_2) \otimes \pi_3(g_3)v + t \cdot [\pi_1(g_1) \otimes \pi_2(g_2) \otimes \pi_3(g_3)\mathbf{u} - \mathbf{u}], \quad (3.11)$$

где t – вещественный параметр. Во-первых, заметим, что выражение в квадратных скобках при $g_1 = g_2 = g_3$ равно нулю. Следовательно, при $(g_1, g_2, g_3) \in \mathbf{G}$ это выражение лежит в $\ell_2 \otimes \ell_2 \otimes \ell_2$, а потому аффинные изометрические преобразования (3.11) корректно определены в $\ell_2 \otimes \ell_2 \otimes \ell_2$. Во-вторых, мы получаем действие группы $\mathbf{G}$ (это легко проверить непосредственно, но можно заметить, что формула (3.11) устроена как запись линейного преобразования в системе координат, центр которой смещен в вектор $\mathbf{u}$).

Ограничивая фоковское представление группы $\text{Isom}(\ell_2 \otimes \ell_2 \otimes \ell_2)$ на подгруппу $\mathbf{G}$, мы получаем серию представлений группы $\mathbf{G}$ (обозначим эти представления через $v_t^{1,1,1}$).

Далее, имеется представление $\mathbf{G}$ в $\ell_2(\mathbf{G}/\mathbf{K}) = \ell_2(G/K)$. Оно сферично, и его естественно понимать как $v_\infty^{1,1,1}$ (во всяком случае это так на уровне предела сферических функций).

Конструкция может быть проварьирована. Рассмотрим действие группы $S_\infty \times S_\infty \times S_\infty$ в $\ell_2 \otimes \ell_2$, где первые два сомножителя действуют тавтологическим образом, а третий – тривиальным, т. е. фактически действует группа $S_\infty \times S_\infty$. Далее берем выражение $\sum_j e_j \otimes e_j$ и повторяем ту же конструкцию. В итоге мы получаем серию представлений $v_s^{1,1,0}$ группы G .

Мы можем повторить то же самое, опуская первый или второй множитель в произведении $S_\infty \times S_\infty \times S_\infty$ (обозначим полученные представления через $v_p^{1,0,1}$, $v_q^{1,0,1}$).

3.16. Гипотезы. 1) Пусть Υ – некоторое представление $\mathbf{G}$ в супертензорном произведении. Рассмотрим тензорное произведение

$$\Upsilon \otimes v_t^{1,1,1} \otimes v_s^{1,1,0} \otimes v_p^{1,0,1} \otimes v_q^{1,0,1}. \quad (3.12)$$

Оно содержит единственный $\mathbf{K}$ -неподвижный вектор, и его циклическая оболочка является неприводимым представлением группы $\mathbf{G}$. ГИПОТЕЗА: все $\mathbf{K}$ -сферические представления группы $\mathbf{G}$ получаются таким образом.

2) Рассмотрим неприводимое унитарное представление κ группы $\bar{S}_\infty \times \bar{S}_\infty \times \bar{S}_\infty$ (ввиду того, что $\bar{S}_\infty$ – группа типа I, κ разлагается в тензорное произведение $\kappa_1 \otimes \kappa_2 \otimes \kappa_3$ представлений $\bar{S}_\infty$). ГИПОТЕЗА: любое унитарное неприводимое представление группы содержится в разложении некоторого представления вида

$$\Upsilon \otimes v_t^{1,1,1} \otimes v_s^{1,1,0} \otimes v_p^{1,0,1} \otimes v_q^{1,0,1} \otimes \kappa. \quad (3.13)$$

3) ГИПОТЕЗА: группа $\mathbf{G}$ имеет тип I, а любое ее унитарное представление разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений.

3.17. Сферические характеры и самоподобие. Рассмотрим полугруппу $\text{Mor}(\alpha, \alpha)$ и в ней элементы следующего вида. Мы берем набор из α двойных треугольников с метками $(1, 1), (2, 2), \dots, (\alpha, \alpha)$, к которому добавлена произвольная поверхность без меток. Полугруппа Σ_α всех таких морфизмов является центром полугруппы $\text{Mor}(\alpha, \alpha)$.

Полугруппы Σ_α при разных α изоморфны, изоморфизм $\pi_\alpha^{\alpha+1}: \Sigma_{\alpha+1} \rightarrow \Sigma_\alpha$ состоит в забывании двух меток $\alpha + 1$. В обозначениях п. 3.9 имеем

$$\pi_\alpha^{\alpha+1}(\mathbf{p}) = \nu_\alpha^{\alpha+1} \circ \mathbf{p} \circ \mu_\alpha^{\alpha+1}.$$

Отметим, что $\Sigma_0 = \text{Mor}(0, 0) = K \setminus G/K$.

Пусть ρ – неприводимое унитарное представление группы $\mathbf{G}$ в пространстве. Тогда полугруппа Σ_α должна действовать в $H[\alpha]$ скалярными операторами, т. е. мы получаем гомоморфизм χ_α из Σ_α в мультипликативную полугруппу

комплексных чисел, по модулю не превосходящих 1. Для любого унитарного представления ρ группы $\mathbf{G}$

$$\tilde{\rho}(\pi_{\alpha}^{\alpha+1}(\mathbf{p})) = \tilde{\rho}(\nu_{\alpha}^{\alpha+1})\tilde{\rho}(\mathbf{p})\tilde{\rho}(\mu_{\alpha}^{\alpha+1}) = \chi_{\alpha+1}(\mathbf{p}) \cdot 1.$$

Мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.17. *Характер χ не зависит от α .*

Назовем $\chi: K \setminus G/K \rightarrow \mathbb{C}$ *сферическим характером* неприводимого представления.

Определим в группе $\mathbf{G} \subset \overline{S}_{\infty} \times \overline{S}_{\infty} \times \overline{S}_{\infty}$ подгруппу

$$\mathbf{G}[\alpha] := \mathbf{G} \cap (\overline{S}_{\infty}[\alpha] \times \overline{S}_{\infty}[\alpha] \times \overline{S}_{\infty}[\alpha]).$$

Понятно, что подгруппа $\mathbf{G}[\alpha]$ канонически изоморфна группе $\mathbf{G}$.

Рассмотрим неприводимое унитарное представление ρ группы $\mathbf{G}$ в пространстве H . Ограничим его на $\mathbf{G}[\alpha]$. Если α достаточно велико, то $H[\alpha] \neq 0$. В $H[\alpha]$ действует скалярными операторами полугруппа Σ_{α} группы $\mathbf{G}$, она же полугруппа Σ_0 группы $\mathbf{G}[\alpha]$. Легко проверить, что $\mathbf{G}[\alpha]$ -циклическая оболочка любого ненулевого вектора из $H[\alpha]$ является сферическим представлением $\mathbf{G}[\alpha]$. При этом все сферические подпредставления ограничения $\rho|_{\mathbf{G}[\alpha]}$ эквивалентны, а их сферические функции совпадают со сферическим характером представления ρ (при всех α).

3.18. Несколько копий симметрической группы. Рассмотрим произведение n копий симметрической группы $G = S_{\infty} \times \cdots \times S_{\infty}$ и диагональную подгруппу K . Предшествующие построения настоящего раздела в этом случае повторяются дословно. Единственное отличие – мы рисуем n -угольники вместо треугольников.

Заметим, что при этом мы должны фиксировать циклический порядок на множестве копий симметрической группы. Смена циклического порядка приведет к равносильной теории, но поверхности, которые ставятся в соответствие элементам группы G , будут другими.

Рис. 4. Поверхности, склеенные из двуугольников и из одноугольников

Мы можем применить общую конструкцию при $n = 2$ и получить поверхность, склеенную из двуугольников (см. рис. 4). Здесь, однако, возможен более простой язык, который обсуждается в разделе 4.

Отметим, что иной язык, а именно язык $(n - 1)$ -мерных комплексов, возможен и в общем случае (см. раздел 7).

3.19. Замечания к разделу 3. а) Основные конструкции этого раздела получены в [15].

б) *Данные Белого.* Рассмотрим триангулированную раскрашенную поверхность $\mathfrak{P} \in K \setminus G/K$. Мы утверждаем, что существует каноническое отображение из $\mathfrak{P}$ в двойной треугольник $\mathfrak{T}$. А именно, каждый плюс-треугольник из $\mathfrak{P}$ мы отображаем в плюс-треугольник из $\mathfrak{T}$ в соответствии с раскраской сторон, а каждый минус-треугольник из $\mathfrak{P}$ мы отображаем в минус-треугольник из $\mathfrak{T}$. Далее, двойной треугольник естественно отождествляется со сферой Римана (вершины – с точками $0, 1, \infty$, а ребра – с отрезками $[0, 1], [1, \infty], [\infty, 0]$). Тогда комплексная структура поднимается на поверхность $\mathfrak{P}$, и мы получаем аналитическое отображение из римановой поверхности $\mathfrak{P}$ в сферу $\mathfrak{T}$ с точками ветвления в вершинах триангуляции и с тремя критическими значениями $0, 1, \infty$. Согласно теореме Белого [50], [51], отображения в сферу с тремя критическими значениями существуют в точности для кривых, определенных над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{Q}}$ поля $\mathbb{Q}$.

Соответствие между $K \setminus G/K$ и множеством накрытий над сферой Римана с тремя критическими значениями является странным апостериорным совпадением двух множеств. Что это значит, на данный момент не ясно. Отметим, что на данных Белого (накрытия над сферой с тремя критическими значениями), по определению, действует группа Галуа $\overline{\mathbb{Q}}$ над $\mathbb{Q}$, которой при нашем подходе тоже не видно.

с) Для любой группы P на классах сопряженности $P \times P$ по диагональной подгруппе P действует группа $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ как группа внешних автоморфизмов свободной группы с двумя образующими (см., например, [52]). В нашем случае $P = S_\infty$ и $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ действует на $K \setminus G/K$.

4. Одномерные конструкции (чипы)

4.1. (G, K) -пары. В разделах 4–8 рассматриваются многочисленные примеры пар (группа G , подгруппа K). Во всех обсуждаемых ниже случаях выполнен следующий набор свойств.

- 1) Пара $G \supset K$ сферична¹⁶.
- 2) Определена категория двойных классов смежности.
- 3) Имеет место теорема мультипликативности (типа теоремы 3.7).
- 4) Имеет место теорема аппроксимации (типа теоремы 3.11).
- 5) Есть (кроме вырожденного случая, рассматриваемого в разделе 8) трех-этажная конструкция сферических представлений типа пп. 3.11, 3.13, 3.15.
- 6) Представление обладает сферическим характером (см. п. 3.17).

¹⁶Отметим, что за исключением бисимметрической группы, обсуждаемой в этом разделе, конечные аналоги всех этих пар не сферичны. Стоит также заметить, что небольшие шевеления наших конструкций приводят к большому набору несферических пар $G \supset K$ (см. [16]), мы не будем стремиться к такому увеличению общности.

Предложенная в разделах 2, 3 аргументация легко переносится на рассматриваемые ниже случаи. Основное внимание ниже сосредоточено на построении комбинаторных реализаций двойных классов смежности. Обозначения G , K , $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$ меняются и каждый раз относятся к группам, обсуждаемым в данный момент.

4.2. Бисимметрическая группа и чипы Ольшанского. Пусть G – произведение двух копий симметрической группы, $S_\infty \times S_\infty$, и пусть K – диагональ. Мы будем представлять себе пары перестановок как диаграммы вида

Две копии (левую и правую) натурального ряда мы считаем отождествленными посредством осевой симметрии относительно пунктирной линии.

Рис. 5. Построение чипа по двум перестановкам. После склейки дуг остается набор линий. От каждой линии мы оставляем в памяти лишь ее концы (если линия не замкнута) и число крестиков на линии.

Объясним, как описываются двойные классы смежности $K[\alpha] \setminus G/K[\beta]$. Рассмотрим элемент $(g_1, g_2) \in G$ и соответствующую диаграмму. Соединим “горизонтальной” дугой каждый левый кружочек верхнего ряда, имеющий номер больше β , с правым кружочком, имеющим тот же номер. Проделаем то же самое с кружочками нижнего ряда с номерами больше α (см. рис. 5, где $\beta = 3$,

$\alpha = 2$). На каждой “горизонтальной” дуге поставим крестик. Склеим горизонтальные дуги с вертикальными. На полученной картинке (назовем ее *чипом*) возможны дуги трех типов.

а) *Дуги, идущие сверху вниз*. Концы такой дуги находятся по одну сторону осевой линии, а число крестиков на дуге четно.

б) *Дуги, у которых оба конца лежат в верхнем ряду или оба конца лежат в нижнем ряду*. Число крестиков на такой дуге нечетно.

с) *Циклы*. Число крестиков на цикле четно. Отметим, что число циклов счетно, но почти все они несут ровно два крестика (и такие циклы могут быть забыты без потери информации).

Разумеется, наборы крестиков на дугах могут быть заменены на целые числа.

Умножение диаграмм осуществляется посредством склейки (см. рис. 6). Циклы сомножителей добавляются к циклам произведения.

Рис. 6. Умножение чипов. Мы отождествляем верхние кружочки нижней диаграммы с нижними кружочками верхней диаграммы.

Инволюция $K[\alpha] \setminus G/K[\beta] \rightarrow K[\beta] \setminus G/K[\alpha]$ на языке чипов состоит в отражении относительно горизонтальной прямой.

4.3. Представления. Повторим конструкцию п. 3.11, только вместо трех множителей в (3.5) мы должны брать два, V и W . Возьмем единичный вектор $\xi \in V \otimes W$. Легко проверить, что существуют ортонормальные системы $e_j \in V$, $e'_k \in W$ такие, что

$$\xi = \sum \alpha_j^{1/2} e_j \otimes e'_j, \quad \sum \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0.$$

Если $V = V^{(0)} \oplus V^{(1)}$, $W = W^{(0)} \oplus W^{(1)}$ – суперпространства, как в п. 3.13, а $\xi \in V \otimes W$ – четный единичный вектор, то существуют ортонормальные системы

$$e_j \in V^{(0)}, \quad e'_k \in W^{(0)}, \quad f_m \in V^{(1)}, \quad f'_l \in W^{(1)} \quad (4.2)$$

такие, что

$$\xi = \sum \alpha_j^{1/2} e_j \otimes e'_j + \sum \beta_m^{1/2} f_m \otimes f'_m, \quad \sum \alpha_j + \sum \beta_m = 1, \quad \alpha_j, \beta_j \geq 0.$$

Как и в п. 3.13, рассмотрим супертензорное произведение

$$(V \otimes W, \xi) \otimes (V \otimes W, \xi) \otimes \dots \quad (4.3)$$

и действие G в нем. Вектор $\Xi = \xi^{\otimes \infty}$ будет сферическим вектором, а числа α_j, β_m будут параметрами Тома (при этом выполнено равенство $\gamma = 0$, т. е. получаются не все представления).

Конструкция п. 3.15 дает фоковское представление с

$$\alpha_1 = e^{-t^2/2}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \beta_1 = \beta_2 = \dots = 0. \quad (4.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Произведение двух сферических функций в нашем случае будет сферической функцией. Действительно, рассмотрим тензорное произведение двух сферических представлений G со сферическими векторами v, w . Тогда в нем есть единственный K -неподвижный вектор¹⁷, а сферическая функция, очевидно, будет произведением сферических функций. Перемножая сферические функции с параметрами α_i, β_i и α'_i, β'_i , мы получаем функцию, у которой параметры “альфы” равны $\alpha_i \alpha'_j, \beta_i \beta'_j$, а параметры “беты” равны $\alpha_i \beta'_j, \beta_i \alpha'_j$.

Рассматривая тензорные произведения представлений в супертензорных степенях (4.3) с фоковскими представлениями, мы получаем все сферические функции Тома, за единственным исключением $\gamma = 1$. Последнее представление реализуется в $\ell_2(S_\infty)$, группа $S_\infty \times S_\infty$ действует в нем левыми и правыми сдвигами.

4.4. Другой пример. Рассмотрим теперь множество $\Omega = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ и группу $G = S_\infty(\Omega)$. Пусть подгруппа K действует перестановками на произведении $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ лишь на первый множитель (по сравнению с предыдущим примером мы имеем ту же подгруппу K , а группа G увеличена). Мы рисуем элементы группы G как диаграммы вида

$$\dots \quad \begin{array}{cccccccccccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \end{array} \quad \dots \quad (4.5)$$

(теперь возможны дуги, идущие из левой половинки в правую и наоборот). Для того чтобы перейти к двойным классам (см. рис. 7, (а)) смежности $K[\alpha] \setminus G/K[\beta]$, мы по-прежнему соединяем соответствующие элементы верхнего ряда с номерами $> \beta$ дугой. Однако теперь мы ставим на дуге стрелку справа налево, а также знак $+$. Аналогично поступаем с соответствующими элементами нижнего ряда, но на этих стрелках рисуем знак $-$.

¹⁷Подробнее см. [32; теорема 4]. Пусть $G \supset K$ – сферическая пара, причем у группы K нет нетривиальных конечномерных представлений. Тогда произведение сферических функций является сферической функцией. Это легко доказывается.

Рис. 7. К п. 4.4

После склейки мы получаем набор цепей. Имеет место альтернатива: или эти цепи замкнуты, или оба их конца являются черными кружочками на картинке. Цепи состоят из чередующихся звеньев двух типов, один – стрелочки, снабженные знаками, другой – просто отрезки. Отрезки можно без потери информации стянуть в точки (единственное исключение – если вся цепь состоит из одного отрезка). Участок цепи показан на рис. 7, (b). Отметим, что плюсы и минусы на стрелках чередуются.

ЗАМЕЧАНИЕ. В этой конструкции плюсы и минусы существенны лишь для различения ориентаций циклов.

Правило умножения двойных классов смежности очевидно.

Конструкции представлений тоже легко переносятся на этот случай. Например, возьмем гильбертово пространство V и единичный вектор $\xi \in V \otimes V$. Рассмотрим счетное тензорное произведение

$$(V \otimes V, \xi) \otimes (V \otimes V, \xi) \otimes \dots$$

Группа G действует перестановками всевозможных множителей V , а ее подгруппа K – перестановками множителей $(V \otimes V, \xi)$. Действие K продолжается до действия полной симметрической группы $\mathbf{K} = S_\infty$.

4.5. Более сложный пример. Теперь рассмотрим объединение Ω четырех копий $\mathbb{N}$, нам удобно будет считать, что $\Omega = \mathbb{N} \times \{1, 2, 3, 4\}$. Пусть $G = S_\infty(\Omega)$. Рассмотрим подгруппу $K_1 \subset G$, которая оставляет на месте все элементы множества $\mathbb{N} \times \{3, 4\}$, а на произведении $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ действует перестановками множителя $\mathbb{N}$. Подгруппа K_2 аналогичным образом действует на $\mathbb{N} \times \{3, 4\}$, оставляя элементы $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ на месте, см. рис. 8. Элементы этой группы можно изображать картинками вида (4.1), (4.5), только теперь мы должны рисовать четыре копии натурального ряда, для определенности расставим их в порядке

$$\dots 5_1 4_1 3_1 2_1 1_1 \quad 1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 \dots \quad \dots 5_3 4_3 3_3 2_3 1_3 \quad 1_4 2_4 3_4 4_4 5_4 \dots$$

Рис. 8. К п. 4.5. Группа K_1 действует перестановкой столбиков верхнего ряда, а группа K_2 – перестановкой столбиков нижнего ряда.

Обозначим

$$K[\alpha_1, \alpha_2] := K_1[\alpha_1] \times K_2[\alpha_2].$$

Теперь возникает умножение

$$K[\alpha_1, \alpha_2] \setminus G/K[\beta_1, \beta_2] \times K[\beta_1, \beta_2] \setminus G/K[\gamma_1, \gamma_2] \rightarrow K[\alpha_1, \alpha_2] \setminus G/K[\gamma_1, \gamma_2].$$

Нарисуем картинку, соответствующую двойному классу смежности (см. рис. 9). Мы рисуем стрелки, соединяющие соответствующие элементы $\mathbb{N} \times \{2\}$ и $\mathbb{N} \times \{1\}$, и красим эти стрелки, скажем, в синий цвет. Рисуем на верхних стрелках $+$, на нижних стрелках $-$. Проводим ту же операцию со стрелками из $\mathbb{N} \times \{4\}$ в $\mathbb{N} \times \{3\}$, только красим стрелки в красный цвет (на рисунке это изображено наложением жирного точечного пунктира). Далее клеим цепи так же, как выше.

Рис. 9. К п. 4.5. Построение чипа. В верхнем ряду стоят четыре копии $\mathbb{N}$ (т. е. множество $\mathbb{N} \times \{1, 2, 3, 4\}$, вытянутое в линию). В нижнем ряду – другая копия множества $\mathbb{N} \times \{1, 2, 3, 4\}$. Элемент G изображается как набор ниточек, идущих сверху вниз.

Осталось объяснить, как строить представления. Рассмотрим гильбертово пространство V и два единичных вектора $\xi \in V \otimes V$, $\eta \in V \otimes V$. Рассмотрим тензорное произведение

$$(V \otimes V, \xi) \otimes (V \otimes V, \eta) \otimes (V \otimes V, \xi) \otimes (V \otimes V, \eta) \otimes \dots$$

Группа G действует перестановками множителей V , подгруппа K_1 – перестановками множителей $(V \otimes V, \xi)$, группа K_2 – перестановками $(V \otimes V, \eta)$. Действие K_1 (а также действие K_2) продолжается до действия полной симметрической группы.

4.6. Замечания к разделу 4. а) *Категория Брауэра* (см. [53], а также [54]). Объекты категории Брауэра – неотрицательные целые числа. Морфизм из m в n – диаграмма вида, изображенного на рис. 10, (а), с m жирными точками вверху и n жирными точками внизу ($m - n$ должно быть четно). Произведение морфизмов $m \rightarrow n$ и $n \rightarrow k$ получается посредством склейки диаграмм.

Рис. 10. К п. 4.6, а). Диаграммы Брауэра.

Рассмотрим пространство $V = \mathbb{C}^p$, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой (и, соответственно, действием ортогональной группы $O(p, \mathbb{C})$). По диаграмме строится оператор $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n}$. Вертикальным дугам соответствует перестановка сомножителей, верхним горизонтальным дугам – свертка по соответствующим индексам, нижним горизонтальным дугам – умножение на инвариант. Циклу соответствует умножение на скаляр p . В итоге мы получаем действие категории Брауэра $O(p)$ -сплетающими операторами в тензорных степенях V .

Буквально такая же конструкция есть для симплектических групп $Sp(2n, \mathbb{C})$ (в этом случае циклу соответствует умножение на $(-2p)$), а также для полных линейных групп. В последнем случае мы берем смешанные тензоры $V^{\otimes m} \otimes (V')^{\otimes k}$ с фиксированной разностью $m - k$. Соответствующее множество жирных точек тогда разбито на две части (m и k штук). Горизонтальные дуги могут соединять лишь точки из различных групп (свертки возможны лишь для пар V, V'), а вертикальные – лишь точки из однотипных групп, см. рис. 10.

б) Конструкция сферических представлений бисимметрической группы получилась как итог ряда трансформаций из конструкции Вершика и Керова [3]. Действие в пространстве (4.3) введено в [6]. Общая конструкция предлагалась в [55], мы следуем [56].

4.7. Дополнение к разделу 4. Классификация представлений бисимметрической группы. Вернемся к обозначениям пп. 4.2, 4.3.

4.7.1. Двойственность. Обозначим через $U(V)$ и $U(W)$ группы всех унитарных операторов в V и W соответственно. Обозначим через $\mathcal{U}$ подгруппу в $U(V) \times U(W)$, состоящую из всех операторов $A \otimes B$, оставляющих вектор ξ на месте. Легко видеть, что эта группа является прямым произведением унитарных групп

$$\mathcal{U} := \prod_{x \in [-1, 1], x \neq 0} U(n_x),$$

где n_x – кратность вхождения числа x в набор чисел α_i, β_j . Фактически, это произведение является конечным или счетным (причем почти все нетривиальные множители имеют вид $U(1)$), полученная группа $\mathcal{U}$ компактна и сепарабельна. Ее неприводимые представления разлагаются в тензорное произведение представлений сомножителей (причем эти тензорные произведения фактически конечны, см. [57; п. 27.43]). Далее заметим, что пары операторов вида $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ лежат в центре $\mathcal{U}$ и действуют на $V \otimes W$ тривиально.

Группа $\mathcal{U}$ действует в каждом сомножителе произведения (4.3). Так как она оставляет ξ на месте, она действует и во всем произведении. Очевидно, что она коммутирует с действием бисимметрической группы $\mathbf{G}$. Имеет место следующий аналог двойственности Шура–Вейля (см. [6]).

ТЕОРЕМА 4.1. а) Группы $\mathbf{G}$ и $\mathcal{U}$ двойственны в тензорном произведении (4.3) в следующем смысле. Представление группы $\mathbf{G} \otimes \mathcal{U}$ разлагается в однократную прямую сумму $\rho_\nu \otimes \pi_\nu$, где ρ_j – унитарные представления группы $\mathbf{G}$, а π_μ – унитарные представления группы $\mathcal{U}$, причем ρ_ν попарно различны и π_μ попарно различны.

б) Сферическое подпредставление $\mathbf{G}$ реализуется в пространстве $\mathcal{U}$ -неподвижных векторов.

4.7.2. Классификация унитарных представлений бисимметрической группы.

Пусть ρ – унитарное неприводимое представление бисимметрической группы $\mathbf{G}$ в пространстве H , пусть $H[n]$ – подпространства $\mathbf{K}[n]$ -неподвижных векторов. У представления ρ определен сферический характер (см. п. 3.17), который в нашем случае должен быть одним из характеров Тома (тем самым определены числа $\alpha_i, \beta_j, \gamma$).

Рис. 11. (а) Единичный чип. (б) Проектор $H[n+1] \rightarrow H[n]$. (с) Элемент полугруппы Γ_1 .

В подпространствах $H[n]$ реализуются неприводимые представления полугруппы чипов $\mathbf{K}[n] \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}[n]$, согласованные с инволюцией. Аргументация из доказательства леммы 2.7 показывает, что любое такое представление однозначно определяет начальное представление ρ . Пусть n – глубина представления, т. е. минимальное n , при котором $H[n] \neq 0$. Несложно проверить, что чип, изображенный на рис. 11, (б), соответствует проектору $H[n]$ на $H[n-1]$. Поэтому соответствующий оператор равен нулю, а следовательно, равны нулю и все операторы, соответствующие чипам, имеющим горизонтальные дуги. Обозначим полугруппу чипов без горизонтальных дуг через Δ_n . Она естественным образом распадается в прямое произведение трех полугрупп:

$$\Delta_n = \Xi \times \Gamma_1 \times \Gamma_2,$$

здесь Ξ – свободная абелева полугруппа, элементы которой являются единичным чипом (см. рис. 11, (а)), к которому добавлен набор циклов. Полугруппы Γ_1 и Γ_2 изоморфны между собой; Γ_1 состоит из диаграмм вида, изображенного на рис. 11, (с), где в левой половинке нет крестиков на дугах; Γ_2 состоит из зеркально отраженных диаграмм.

Полугруппа Ξ изоморфна $\mathbf{K}[0] \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}[0]$. Ее действие определяется сферическим характером представления.

Полугруппы Γ_1, Γ_2 изоморфны полупрямому произведению $\Gamma := S_n \ltimes \mathbb{Z}_+^n$.

Диаграммы Юнга мы будем обозначать через $\lambda, \mu, \dots$. Число клеток диаграммы λ обозначается через $|\lambda|$, число строк – через $l(\lambda)$, число столбцов – через $h(\lambda)$. Напомним, что неприводимые представления группы S_k канонически нумеруются k -клеточными диаграммами Юнга (см., например, [46; п. 16.2]).

Рис. 12. К п. 4.7.2. Диаграммное распределение.

Назовем *диаграммным распределением* Λ конечное подмножество $\mathcal{I}$ (носитель распределения) отрезка $[-1, 1]$, причем каждой точке $x \in \mathcal{I}$ поставлена в соответствие диаграмма Юнга $\lambda(x)$, см. рис. 12. Мы также требуем, чтобы было выполнено равенство $\sum_{x \in \mathcal{I}} |\lambda(x)| = n$.

ЛЕММА 4.2. *Неприводимые $*$ -представления полугруппы Γ нумеруются диаграммными распределениями.*

Это легко доказывается с помощью аргументации Вигнера–Макки (см. [46; п. 13.3]). Опишем представление, соответствующее диаграммному распределению Λ . Рассмотрим в Γ подполугруппу

$$\Gamma_\Lambda := \prod_{x \in \mathcal{I}} S_{|\lambda(x)|} \ltimes \mathbb{Z}_+^{|\lambda(x)|}.$$

Возьмем неприводимое представление группы $S_{|\lambda(x)|}$, соответствующее диаграмме $\lambda(x)$, и продолжим его на полугруппу $S_{|\lambda(x)|} \ltimes \mathbb{Z}_+^{|\lambda(x)|}$, положив, что все образующие полугруппы $\mathbb{Z}_+^{|\lambda(x)|}$ действуют как умножение на x . Рассмотрим тензорное произведение таких представлений и индуцируем¹⁸ представление Γ с построенного представления полугруппы Γ_Λ .

Таким образом, представление полугруппы Δ_n определяется параметрами Тома α_i, β_j и двумя диаграммными распределениями, скажем Λ и M . Однако не любое такое представление нам подходит.

¹⁸Формально индуцирование представлений определено для групп, а не для полугрупп. Но, например, определение из [47; § 7] в данном случае применимо.

ТЕОРЕМА 4.3 (Ольшанский–Окуньков [6], [33]). *Представление полугруппы Δ_n , определяемое параметрами α, β и Λ, M , реализуется в пространстве $H[n]$ неприводимого представления бисимметрической группы $\mathbf{G}$ глубины n тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.*

- *Носители распределений Λ и M содержатся в множестве*

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, -\beta_1, -\beta_2, \dots, 0\}.$$

- *При $x > 0$ число $l(\lambda(x)) + l(\mu(x))$ не превосходит кратности вхождения x в последовательность α_i .*
- *При $x < 0$ число $h(\lambda(x)) + h(\mu(x))$ не превосходит кратности вхождения x в последовательность $(-\beta_j)$.*

Отметим, что восстановление представлений ρ из таких данных в определенном смысле конструктивно (см. доказательство леммы 2.7), однако остается открытым вопрос о более явных реализациях. Кстати, и для сферических представлений $\mathbf{G}$ с $\gamma > 0$ точное описание пространства представления, по-видимому, не известно.

5. Двумерные конструкции

5.1. Пример. Рассмотрим множество $\Omega = \mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}$. Мы будем считать элементы подмножеств $\mathbb{N} \times \{1\}$, $\mathbb{N} \times \{2\}$, $\mathbb{N} \times \{3\}$ покрашенными в красный, желтый, синий цвета соответственно. Поэтому каждый элемент Ω однозначно определяется номером и цветом. Пусть $G = S_\infty(\Omega)$. Через K обозначим группу всех финитных перестановок множества $\mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}$, индуцированных перестановками множества $\mathbb{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. По сравнению с трисимметрической группой из раздела 3, мы увеличили группу G , оставив группу K такой же.

Сейчас мы каждому элементу группы G поставим в соответствие триангулированную поверхность с некоторыми дополнительными данными. Для этого рассмотрим счетный набор одинаковых треугольников, у которых стороны закрашены с внутренней стороны красным, желтым, синим по часовой стрелке. Пронумеруем эти треугольники и поставим на них плюсы (см. рис. 13, (а)). Нарисуем зеркально отраженный набор точно таких же треугольников, их тоже пронумеруем и поставим на них минусы. Пусть $g \in G$ переводит элемент Ω с номером k и цветом ν в элемент с номером l и цветом μ . Тогда мы склеиваем ν -ребро k -го плюс-треугольника с μ -ребром l -го минус-треугольника в соответствии с ориентацией. Как и в разделе 3, мы получаем ориентированную триангулированную поверхность (см. рис. 13, (b)), на которой:

- плюс-треугольники и минус-треугольники стоят в шахматном порядке;
- плюс-треугольники занумерованы натуральными числами, минус-треугольники – тоже;
- на внутренних сторонах плюс-треугольников цвета идут по часовой стрелке, на внутренних сторонах минус-треугольников – против часовой стрелки; цвета на ребре с двух боков, вообще говоря, не совпадают;

Рис. 13. К п. 5.1. (а) Треугольники, крашенные изнутри. (б) Поверхность, полученная при склейке.

• все компоненты поверхности – компактные поверхности; все компоненты, кроме конечного числа, склеены из пары треугольников так, что номера и цвета на сторонах ребер двойных треугольников совпадают.

Легко видеть, что по этим данным элемент g однозначно восстанавливается. Надо лишь перебрать все ребра и посмотреть, какие цвета и какие метки стоят по две стороны ребра.

Переход к двойным классам смежности $K[\alpha] \setminus G/K[\beta]$ состоит в забывании плюс-меток с номерами $> \beta$ и минус-меток с номерами $> \alpha$.

Все остальное, сказанное выше о трисимметрической группе, в нашем случае повторяется более-менее дословно.

5.2. Степень общности. Рассмотрим конечный набор счетных множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_p$. Пусть

$$G = S_\infty(\Omega_1) \times \dots \times S_\infty(\Omega_p).$$

Пусть $K_1, \dots, K_q$ – копии бесконечной симметрической группы и каждая группа K_j действует на каждом Ω_i , так, что все орбиты или являются одноточечными множествами, или устроены как $S_\infty/S_\infty[1] \simeq \mathbb{N}$. Предположим, что нетривиальные орбиты разных групп K_j не пересекаются. Тогда на $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_p$ действует группа $K_1 \times \dots \times K_q$. Таким образом, мы получаем вложение

$$K_1 \times \dots \times K_q \rightarrow G.$$

Пусть (хотя без этого ограничения можно обойтись) группа $K_1 \times \dots \times K_q$ не имеет неподвижных точек на $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_p$.

Тогда по каждому элементу группы G строится двумерная поверхность, замощенная многоугольниками и определенным образом раскрашенная примерно так же, как в разобранных выше примерах. Разные типы многоугольников – их тоже удобно закрашивать¹⁹ – соответствуют множителям K_j , число сторон многоугольника соответствует числу нетривиальных орбит группы K_j .

¹⁹Ввиду того, что цвета многоугольников, различающие группы K_j , имеют происхождение, отличное от цветов ребер, можно вместо “цвета” использовать какой-нибудь другой атрибут: “запах”, “мелодия”, “гражданство” и т. п.

Мы опускаем изложение формального правила, оно есть в [16].

Все сказанное про трисимметрическую группу в разделе 3 может быть перенесено на этот случай.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда каждая группа K_j имеет не более двух нетривиальных орбит, склейка поверхности проводится из двуугольников, и в этом случае работает язык чипов. Есть еще случай, когда у каждой группы K_j имеется лишь одна нетривиальная орбита. Он разбирается в разделе 8.

5.3. Сплетения. Пусть H – группа. Рассмотрим группу $H^{\mathbb{N}}$, состоящую из функций f на $\mathbb{N}$, принимающих значения в H и равных единице почти для всех $n \in \mathbb{N}$. Умножение вводится поточечно. Группа S_{∞} действует на $H^{\mathbb{N}}$ перестановками $\mathbb{N}$. Поэтому определено полупрямое произведение $S_{\infty} \ltimes H^{\mathbb{N}}$. Эта группа называется *сплетением* групп S_{∞} и H . Мы его обозначаем

$$S_{\infty} * H := S_{\infty} \ltimes H^{\mathbb{N}}.$$

Фактически нам встретятся $H = \mathbb{Z}_k$ и $H = S_k$. Опишем соответствующие сплетения в более удобном для нас виде.

Рис. 14. К п. 5.3

Рассмотрим множество $\mathbb{N} \times \{1, \dots, k\}$. Представим его как вершины целочисленной решетки, лежащие в полосе. Разобьем это множество на вертикальные столбики (см. рис. 14). Сплетение S_{∞} с S_k состоит из подстановок, сохраняющих разбиение на столбики (т.е. мы можем переставлять столбики, а потом произвольным образом переставлять элементы внутри каждого столбика).

Сплетение S_{∞} с $\mathbb{Z}_k$ – это группа перестановок, сохраняющих разбиение на столбики и циклический порядок в каждом столбике.

Введем также *пополненное сплетение* $\bar{S}_{\infty} \bar{*} H$, которое является полупрямым произведением полной симметрической группы и группы всех функций $\mathbb{N} \rightarrow H$.

5.4. Пример со сплетением. Рассмотрим $\Omega = \mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}$. Пусть $G = S_{\infty}(\Omega)$. В качестве подгруппы K мы рассмотрим сплетение $S_{\infty} * \mathbb{Z}_3$. Через $K[\alpha]$ мы обозначим подгруппу в K , фиксирующую поэлементно первые α столбцов.

Двумерную поверхность по элементу $g \in G$ мы построим буквально так же, как и в п. 5.1. Различие появляется, когда мы переходим к двойным классам смежности. В этом случае при стирании метки с треугольника мы должны еще стереть окраску внутренней стороны его периметра.

ПРИМЕР. Элемент $K \backslash G / K$ – это триангулированная поверхность, на гранях которой расставлены в шахматном порядке плюсы и минусы.

Объясним, что надо изменить при переходе к представлениям. Рассмотрим гильбертово пространство V и вектор $\xi \in V \otimes V \otimes V$, который не меняется при циклических перестановках сомножителей. Далее рассматриваем тензорное произведение

$$(V \otimes V \otimes V, \xi) \otimes (V \otimes V \otimes V, \xi) \otimes \dots$$

Группа G действует перестановками множителей V , а группа K – перестановками $(V \otimes V \otimes V, \xi)$ и циклическими перестановками множителей в каждой группе $V \otimes V \otimes V$. При этом действие группы K продолжается до действия полного сплетения $\bar{S}_\infty \bar{\otimes} \mathbb{Z}_3$.

6. Категории двудольных графов

Здесь мы рассмотрим лишь один пример (хотя нижеследующая конструкция тоже является “массовой”).

6.1. Соответствие между перестановками и двудольными трехвалентными графами. Рассмотрим в качестве G группу финитных перестановок множества $\Omega := \mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}$, а в качестве K – сплетение S_∞ с S_3 . Как и выше, мы будем считать, что элементы множеств $\mathbb{N} \times \{1\}$, $\mathbb{N} \times \{2\}$, $\mathbb{N} \times \{3\}$ покрашены соответственно в красный, желтый и синий цвет. Нарисуем счетное число таких картинок: вершина, из которой выходят три отрезка (мы будем их называть *полурёбрами*) – красный, желтый и синий. На вершине поставим знак “плюс” и номер $\in \mathbb{N}$. Нарисуем еще счетное число таких же картинок, только на вершинах поставим знак “минус” и номер (см. рис. 15, (а)). Пусть элемент $g \in G$ переводит элемент цвета ν с номером k в элемент цвета μ с номером l . Тогда мы подсоединяем полурёбро цвета ν , выходящее из плюс-вершины с номером k , к полурёбру цвета μ , выходящему из минус-вершины с номером l . Мы проделываем это со всеми элементами Ω и получаем двудольный граф (см. рис. 15, (b)) со следующими дополнительными структурами и следующими свойствами:

Рис. 15. К п. 6.1

- на вершинах стоят плюсы и минусы, причем ребра могут соединять лишь плюс-вершины и минус-вершины;
- из каждой вершины выходят ровно три ребра;
- половинки ребер раскрашены в три цвета – красный, желтый, синий; половинки, выходящие из одной вершины, раскрашены в разные цвета;
- плюс-вершины пронумерованы натуральными числами; минус-вершины – тоже;
- граф состоит из конечных компонент, при этом почти все компоненты являются двухвершинными, и половинки одного ребра там раскрашены в один цвет, а числовые метки на двух вершинах совпадают (см. рис. 15, (с)).

Легко видеть, что элемент симметрической группы однозначно восстанавливается по такой картинке.

Рассмотрим большую группу $\mathbf{K} \supset K$ – пополненное сплетение $\bar{S}_\infty \bar{*} S_3$ и группу перестановок $\mathbf{G}$, порожденную $\mathbf{K}$ и G . К этой группе можно применить ту же процедуру построения графа. Список свойств полученного графа будет почти тем же, только последнее условие должно быть ослаблено до следующего:

- граф состоит из конечных компонент, при этом почти все компоненты являются двухвершинными (см. рис. 15, (d)).

6.2. Категория двойных классов смежности. Пусть $K[\alpha]$ – подгруппа в K , оставляющая на месте все точки множества

$$\{1, \dots, \alpha\} \times \{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}.$$

Переход к двойным классам смежности соответствует забыванию плюс-меток с номерами $> \beta$ и цветов полуребер, выходящих из этих вершин, а также забыванию минус-меток с номерами $> \alpha$ и цветов выходящих из них полуребер.

Рис. 16. К п. 6.2. Склейка трехвалентных графов.

ПРИМЕР. Переход к $K[0] \setminus G/K[0]$ означает забывание всех числовых меток и всех цветов. Рассмотрим такую же конструкцию для конечных групп $G = S_{3N}$, $K = S_N \bar{*} S_3$. Мы получаем, что

$$(S_N \bar{*} S_3) \setminus S_{3N}/(S_N \bar{*} S_3^N)$$

находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех $2N$ -вершинных двудольных трехвалентных графов (плюс-доля и минус-доля остаются отмеченными).

Рассмотрим двойные классы смежности

$$\mathfrak{p} \in K[\alpha] \setminus G/K[\beta], \quad \mathfrak{q} \in K[\beta] \setminus G/K[\gamma].$$

Опишем их произведение на языке графов (см. рис. 16). Для $k \leq \beta$ возьмем плюс-вершину графа графа $\mathfrak{p}$ с меткой k и минус-вершину графа $\mathfrak{q}$ с меткой k . Отрежем от графов эти вершины вместе с входящими в них полуребрами и склеим образовавшиеся три обрубленных полуребра графа $\mathfrak{p}$ с тремя обрубленными полуребрами графа $\mathfrak{q}$ в соответствии с цветами *отрезанных* полуребер. Проделав это для всех k , мы получаем морфизм γ в α .

6.3. Представления группы $\mathbf{G}$. Эти представления строятся так же, как в предыдущих случаях. Например, мы можем рассмотреть (супер)гильбертово пространство V , вектор $\xi \in V \otimes V \otimes V$, инвариантный относительно любых перестановок сомножителей, и действие группы $\mathbf{G}$ в тензорном произведении

$$(V \otimes V \otimes V, \xi) \otimes (V \otimes V \otimes V, \xi) \otimes \dots$$

Чтобы повторить конструкцию представлений в фоковском пространстве, мы рассмотрим гильбертово пространство L с ортонормальным базисом $e_{k,\nu}$, где $\nu = 1, 2, 3$, а k пробегает $\mathbb{N}$. Группа $\mathbf{G}$ действует в L естественным образом. Далее рассматриваем тензорное произведение $L \otimes L \otimes L$, в качестве вектора $\mathbf{u}$ (см. п. 3.10) берем

$$\mathbf{u} := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\sigma \in S_3} e_{k,\sigma(1)} \otimes e_{k,\sigma(2)} \otimes e_{k,\sigma(3)}$$

и повторяем конструкцию п. 3.15.

6.4. Вариации. А) Рассмотрим в качестве группы G группу всех финитных перестановок множества $\Omega := \mathbb{N} \times \{1, \dots, l\}$, а в качестве K – сплетение $S_{\infty} * S_l$. Тогда все вышесказанное повторяется дословно с той лишь разницей, что мы получаем двудольные l -валентные графы вместо трехвалентных.

Рис. 17. К п. 6.4. Триангуляция и двойственный ленточный граф.

В) Пусть

$$G = S_{\infty}(\mathbb{N} \times \{1, \dots, 6\}), \quad K = (S_{\infty} * S_3) \times (S_{\infty} * S_3).$$

Тогда мы вводим два “цвета” (или “аромата”) для раскраски вершин графа и повторяем ту же конструкцию.

С) Здесь можно действовать в большой общности типа п. 5.2.

Д) Конструкции раздела 5 могут излагаться на языке ленточных графов. Напомним, что ленточный граф – это граф, у которого при каждой вершине фиксирован циклический порядок ребер. По ориентированной триангулированной поверхности стандартным способом строится ленточный граф (см. рис. 17).

7. Бордизмы псевдомногообразий

7.1. Псевдомногообразие. Напомним определение псевдомногообразий.

Сначала определим *симплициальный клеточный комплекс*. Рассмотрим несвязное объединение $\bigsqcup \Xi_j$ конечного набора симплексов Ξ_j . Рассмотрим факторпространство Σ пространства $\bigsqcup \Xi_j$ по набору эквивалентностей, удовлетворяющих следующим свойствам.

а) Для любого симплекса Ξ_i тавтологическое отображение $\xi_i: \Xi_i \rightarrow \Sigma$ является вложением (поэтому мы можем считать Ξ_i подмножеством Σ).

б) Для любой пары симплексов Ξ_i, Ξ_j их пересечение $\xi_i^{-1}(\xi_i(\Xi_i) \cap \xi_j(\Xi_j)) \subset \Xi_i$ является объединением граней Ξ_i и частично определенное отображение

$$\Xi_i \xrightarrow{\xi_i} \Sigma \xrightarrow{\xi_j^{-1}} \Xi_j$$

является аффинным на каждой грани.

Полученные таким способом объекты называются *симплициальными клеточными комплексами*²⁰.

Псевдомногообразие (подробнее см. [58], [59]) размерности n – это симплициальный клеточный комплекс, удовлетворяющий следующим условиям.

а) Каждая грань содержится в n -мерной грани (мы будем называть n -мерные грани *камерами*).

б) Каждая $(n - 1)$ -мерная грань содержится в точности двух камерах²¹.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, откуда берется понятие псевдомногообразия. Как известно (Р. Том), не любой сингулярный цикл в многообразии может быть реализован как образ многообразия. С другой стороны, любой сингулярный $\mathbb{Z}$ -цикл (или $\mathbb{Z}_2$ -цикл) может быть реализован псевдомногообразием (по определению цикла, см. [58]). Кроме того, intersection homologies у Горецкого и Макферсона были введены через псевдомногообразия [60].

Линк. Пусть Σ – псевдомногообразие, Γ – его k -мерная грань. Рассмотрим всевозможные $(k + 1)$ -мерные грани Φ_j , содержащие Γ , и выберем по точке φ_j во внутренности каждой грани Φ_j . Для любой грани $\Psi_k \supset \Gamma$ рассмотрим выпуклую оболочку всех точек φ_j , содержащихся в Ψ_k . Линк грани Γ – это

²⁰В определении симплициального комплекса требуется более жесткое условие: пересечение двух симплексов пусто или является гранью.

²¹Обычно требуется также “сильная связность”: комплекс связан и после вырезания из него всех граней коразмерности ≥ 2 он должен остаться связным.

симплициальный клеточный комплекс, гранями которого являются такие выпуклые оболочки.

Псевдомногообразие называется *нормальным*, если линк любой грани коразмерности ≥ 2 связан.

Нормализацией $\tilde{\Sigma}$ псевдомногообразия Σ (см. [60]) называется псевдомногообразие $\tilde{\Sigma}$ и отображение $\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ такое, что

- ограничение π на каждую грань $\tilde{\Sigma}$ является аффинной биекцией граней,
- отображение π переводит разные n -мерные и $(n-1)$ -мерные грани в разные грани.

Любое псевдомногообразие имеет единственную с точностью до естественной эквивалентности нормализацию [60].

Опишем ее построение. Пусть Σ не нормально. Пусть Ξ – грань коразмерности ≥ 2 , чей линк состоит из $m > 1$ связных компонент (см. рис. 18). Рассмотрим маленькую замкнутую окрестность $\mathcal{O}$ грани Ξ псевдомногообразия Σ . Тогда множество $\mathcal{O} \setminus \Xi$ несвязно и состоит из m компонент, обозначим их через $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m$. Пусть $\overline{\mathcal{O}}_j$ – замыкание $\mathcal{O}_j$ в Σ , $\overline{\mathcal{O}}_j = \mathcal{O}_j \cup \Xi_j$. Мы заменяем $\mathcal{O}$ на несвязное объединение множеств $\overline{\mathcal{O}}_j$ и получаем новое псевдомногообразие Σ' . Повторим ту же операцию с другой гранью с несвязным линком. Эти операции увеличивают число граней коразмерности ≥ 2 . Грани размерностей n и $(n-1)$ остаются теми же (и отношение включения таких граней сохраняется). Поэтому процесс конечен, и в итоге мы придем к нормальному псевдомногообразию.

Рис. 18. К определению нормализации. Грань (нульмерная) с несвязным линком.

7.2. Наборы перестановок и псевдомногообразия. В качестве группы G возьмем произведение $n+1$ копий группы S_∞ , а в качестве K – диагональную подгруппу²². Возьмем $n+1$ сорт краски: красный, оранжевый, ..., синий; помечим этими цветами копии группы S_∞ и изготовим счетный набор одинаковых n -мерных симплексов, грани которых раскрашены в эти цвета (разные грани – в разные цвета). Отдельно покрасим вершины так, чтобы цвет вершины совпадал с цветом противоположной грани. Пронумеруем эти симплексы и, кроме того, поставим на каждом симплексе метку “+”. Нарисуем другой набор симплексов, которые отличаются от симплексов первого набора

²²Напомним, что эта пара (группа, подгруппа) уже рассматривалась нами в п. 3.18.

зеркальным отражением²³. Пронумеруем эти симплексы и проставим на них знаки “—”.

Пусть элемент, скажем, зеленой копии S_∞ переводит k в l . Тогда склеим зеленую грань k -го плюс-симплекса с зеленой гранью l -го минус-симплекса так, чтобы каждая вершина отождествлялась с вершиной того же цвета. Мы проделываем это со всеми копиями симметрической группы и со всеми номерами k . В итоге мы получаем склеенный из симплексов комплекс, который представляет собой счетное несвязное объединение *ориентированных нормальных* псевдомногообразий. При этом:

- на камерах проставлены плюсы и минусы, причем соседом (через $(n-1)$ -мерную стенку) плюс-камеры является минус-камера и наоборот;
- плюс-камеры (соответственно минус-камеры) пронумерованы натуральными числами;
- $(n-1)$ -мерные грани раскрашены в вышеупомянутые цвета; у $(n-1)$ -мерных граней любой камеры цвета попарно различны, причем раскраски стенок плюс-камер и минус-камер соответствуют ориентации; вершины тоже раскрашены так, что цвет вершины отличен от всех цветов прилегающих к ней $(n-1)$ -мерных граней;
- почти все компоненты являются склейками двух симплексов, причем метки на плюс-симплексе и минус-симплексе совпадают.

Легко видеть что такие наборы данных находятся во взаимно однозначном соответствии с группой G .

7.3. Бордизмы псевдомногообразий. Переход к двойным классам смежности проводится как обычно: мы забываем плюс-метки с номерами $> \beta$ и минус-метки с номерами $> \alpha$.

Пусть $\mathbf{p} \in K[\alpha] \setminus G/K[\beta]$, $\mathbf{q} \in K[\beta] \setminus G/K[\gamma]$. Для любого $k \leq \beta$ возьмем минус-камеру псевдомногообразия $\mathbf{q}$ и плюс-камеру псевдомногообразия $\mathbf{p}$. Удалим эти камеры из псевдомногообразий и склеим границы полученных дырок в соответствии с цветами их $(n-1)$ -мерных граней. Проделав это со всеми $k \leq \beta$, мы получаем новое псевдомногообразие, с крашенными $(n-1)$ -мерными гранями и вершинами, с плюсами и минусами, расставленными в шахматном порядке, а также с числовыми плюс-метками $\leq \gamma$ и с числовыми минус-метками $\leq \alpha$. Полученное многообразие, вообще говоря, не нормально. Его нормализация соответствует произведению двойных классов смежности $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}$.

7.4. Соответствие с двумерной конструкцией. Выше в п. 3.18 тем же двойным классам смежности $K[\alpha] \setminus G/K[\beta]$ мы ставили в соответствие двумерные поверхности, замощенные n -угольниками. Объясним, как построить ту же поверхность, исходя из псевдомногообразия. Перенумеруем $(n-2)$ -мерные грани $A_1, \dots, A_n$ нашего симплекса Δ . Выберем строго внутри каждого пересечения $A_1 \cap A_2, A_2 \cap A_3, \dots, A_n \cap A_1$ по точке и соединим их замкнутой ломаной. Каждое звено ломаной покрасим в цвет грани, через которую оно проходит.

²³Отметим, что все раскраски n -граней камеры в $n+1$ попарно различных цвет эквивалентны относительно аффинных преобразований $\mathbb{R}^n$. Если рассматривать лишь собственные аффинные преобразования, то мы получим два неэквивалентных типа симплексов.

Рассмотрим двумерную гомеоморфную кругу пленку Π , чья граница совпадает с нашей ломаной, а внутренность лежит строго внутри симплекса. Осталось заметить, что все камеры нашего псевдомногообразия являются копиями симплекса Π , а потому в каждой камере мы имеем копию пленки Π . Объединяя эти пленки, мы получаем двумерную поверхность, замощенную n -угольниками.

7.5. Замечания к разделу 7. Конструкции псевдомногообразий по крашенным графам рассматривались в [61]–[63]. В [59], [64] использовалось соответствие между псевдомногообразиями и наборами инволюций. Здесь мы следуем работе [17].

8. Сферические функции относительно юнговской подгруппы. Теорема Нессонова

Объект, описываемый ниже, на общем языке раздела 5 и работы [16] соответствует двумерным поверхностям, склеиваемым из одноугольников (см. рис. 4).

8.1. (G, K) -пара с юнговской подгруппой. Пусть теперь

$$G = S_\infty(\mathbb{N} \times \{1, \dots, m\}).$$

Пусть $K_j = S_\infty(\mathbb{N} \times \{j\})$, $\mathbf{K}_j = \bar{S}_\infty(\mathbb{N} \times \{j\})$ и

$$K = K_1 \times \dots \times K_m, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \dots \times \mathbf{K}_m.$$

Пусть $\mathbf{G}$ – группа, порожденная G и $\mathbf{K}$.

Для $g \in \mathbf{G}$ мы обозначим через $s_{\nu\mu}(g)$ число элементов цвета ν , которые переводятся перестановкой $g \in \mathbf{G}$ в элементы цвета μ . Эти числа для любого μ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{\nu: \nu \neq \mu} s_{\nu\mu} = \sum_{\nu: \nu \neq \mu} s_{\mu\nu} \quad (8.1)$$

(сколько элементов ушло из строки $\mathbb{N} \times \{\mu\}$, столько и пришло).

8.2. Построение представлений. Построим набор представлений группы $\mathbf{G}$. Рассмотрим евклидово пространство V и m единичных векторов $\xi_1, \dots, \xi_m \in V$, порождающих V . Рассмотрим тензорное произведение

$$[(V, \xi_1) \otimes (V, \xi_1) \otimes \dots] \otimes [(V, \xi_2) \otimes (V, \xi_2) \otimes \dots] \otimes \dots.$$

Группа G действует перестановками множителей V , а каждая $\mathbf{K}_j$ действует перестановками внутри каждой группы. Вектор

$$\xi_1^{\otimes \infty} \otimes \dots \otimes \xi_m^{\otimes \infty}$$

является **K**-неподвижным вектором. Его циклическая оболочка является **K**-сферическим представлением G . Сферическая функция равна

$$\Phi(g) = \prod_{\nu, \mu: \nu \neq \mu} \langle \xi_\nu, \xi_\mu \rangle^{s_{\nu\mu}(g)}.$$

8.3. Теорема Нессонова.

ТЕОРЕМА 8.1 [65]. *Описанная выше конструкция исчерпывает все **K**-сферические представления группы G .*

Доказательство приводится ниже в пп. 8.5, 8.6.

8.4. Категория двойных классов смежности. Обозначим

$$K[\alpha_1, \dots, \alpha_m] = K_1[\alpha_1] \times \dots \times K_m[\alpha_m].$$

Опишем категорию двойных классов смежности

$$K[\alpha_1, \dots, \alpha_m] \setminus G / K[\beta_1, \dots, \beta_m].$$

Пусть для определенности $m = 3$ (см. рис. 19).

Рис. 19. К п. 8.4

Обозначим

$$J_\nu[\gamma] := \{1, \dots, \gamma\} \times \{\nu\} \subset \mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}.$$

Мы рисуем диаграмму “с ниточками”, у которых в верхнем ряду стоят элементы множества $J_1[\beta_1] \cup J_2[\beta_2] \cup J_3[\beta_3]$, а в нижнем ряду – элементы из $J_1[\alpha_1] \cup J_2[\alpha_2] \cup J_3[\alpha_3]$. Разные “цвета” ($\nu = 1, 2, 3$) мы будем маркировать крестиками, квадратиками и треугольниками. Пусть g переводит (l, ν) в (k, μ) . Мы рисуем следующие объекты, в зависимости от того, где лежат пары (l, ν) и (k, μ) :

- если $(l, \nu) \in J_\nu[\beta_\nu]$, $(k, \mu) \in J_\mu[\alpha_\mu]$, то мы рисуем дугу из (l, ν) в (k, μ) ;
- если $(l, \nu) \in J_\nu[\beta_\nu]$, $(k, \mu) \notin J_\mu[\alpha_\mu]$, то мы рисуем дугу с началом (l, ν) и со свободным нижним концом, помеченным цветом μ ; аналогично мы поступаем в случае $(l, \nu) \notin J_\nu[\beta_\nu]$, $(k, \mu) \in J_\mu[\alpha_\mu]$ (мы рисуем дугу с концом в (l, μ) и со свободным верхним концом, помеченным цветом ν);
- если $(l, \nu) \notin J_\nu[\beta_\nu]$, $(k, \mu) \notin J_\mu[\alpha_\mu]$ и $\mu \neq \nu$, то мы рисуем дугу, у которой верхний конец помечен цветом ν , а нижний конец – цветом μ (причем мы различаем верхний и нижний концы дуги);
- если $(l, \nu) \notin J_\nu[\beta_\nu]$, $(k, \mu) \notin J_\mu[\alpha_\mu]$ и $\mu = \nu$, то мы ничего не рисуем (так что итоговая картинка оказывается конечной).

Умножение состоит в подклейке одной диаграммы к другой, как и в случае чипов.

8.5. Полугруппа $\Gamma := K \setminus G/K$ и ее характеры. По конструкции предыдущего пункта, двойному классу смежности из $K \setminus G/K$ соответствует набор ниточек, идущих сверху вниз, с покрашенными концами. Существенно лишь число ниточек $s_{\nu\mu}$ с каждым окрасом. Таким образом, каждому двойному классу смежности ставится в соответствие набор чисел $s_{\nu\mu}$, где $\nu, \mu \leq m$, причем $\mu \neq \nu$ (т. е. эти числа заполняют матрицу S размера $m \times m$ без диагонали²⁴). Числа $s_{\nu\mu}$ целые неотрицательные и удовлетворяют условиям (8.1). Умножению двойных классов смежности соответствует сложение матриц.

Как и в случае трисимметрической группы, полугруппа $\Gamma := K \setminus G/K$ вкладывается в качестве центра в любую полугруппу $K[\alpha_1, \dots, \alpha_m] \setminus G/K[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$. Каждому унитарному K -сферическому представлению группы G соответствует гомоморфизм χ из $K \setminus G/K$ в мультипликативную полугруппу комплексных чисел, по модулю не превосходящих 1:

$$\chi(S_1 + S_2) = \chi(S_1)\chi(S_2).$$

При этом

$$\chi(S^t) = \overline{\chi(S)}.$$

На этом языке теорема 8.1 равносильна следующему высказыванию: для любого унитарного K -сферического представления ρ группы G существует эрмитова неотрицательно определенная матрица A размера m с единицами на диагонали такая, что сферическая функция представления ρ равна

$$\chi(S) = \prod_{\mu, \nu: \mu \neq \nu} a_{\nu\mu}^{s_{\nu\mu}}.$$

Это высказывание было бы совсем простым, если бы характер χ не обращался в нуль. Приходится, однако, выяснять, как устроена подполугруппа его нулей, что удлинняет доказательство.

Обозначим через $E_{\nu\mu}$ матрицу-единицу, т. е. матрицу, у которой на месте $\nu\mu$ стоит единица, а остальные элементы равны нулю. Мы будем записывать матрицы S в виде $S = \sum s_{\nu\mu} E_{\nu\mu}$. Назовем *циклами* элементы Γ вида

$$\sigma[l_1 \dots l_p] = E_{l_1 l_2} + E_{l_2 l_3} + \dots + E_{l_p l_1}, \quad \text{где } l_i \neq l_j.$$

ЛЕММА 8.2. *Полугруппа Γ порождается циклами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем матрицу $S \in \Gamma$. Пусть $s_{p_1 p_2} > 0$. В силу условия (8.1) существует p_3 такое, что $s_{p_2 p_3} > 0$. Если $p_3 \neq p_1$, мы выбираем $s_{p_3 p_4} > 0$, и т. д., пока не окажется, что $p_i = p_j$. Но тогда матрица $S - \sigma[p_i p_{i+1} \dots p_j]$ неотрицательна и удовлетворяет (8.1). Лемма доказана.

Зафиксируем сферическое представление ρ и его характер χ . Мы будем говорить, что цвета μ и ν лежат в одной компоненте, если существует цикл σ , содержащий μ и ν , такой, что $\chi(\sigma) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В конструкции представлений из п. 8.2 участвовали пространство V и набор векторов $\xi_1, \dots, \xi_n$. Цвета μ, ν лежат в разных компонентах, если существует ортогональное разложение $V = V_1 \oplus V_2$ такое, что все векторы ξ_j содержатся в этих слагаемых, причем $\xi_\mu \in V_1$, $\xi_\nu \in V_2$.

²⁴На диагонали можно было бы поставить бесконечности.

ЛЕММА 8.3. Если μ и ν не лежат в одной компоненте, то для любой матрицы $S \in \Gamma$ такой, что $s_{\mu\nu} > 0$ (или $s_{\nu\mu} > 0$), выполнено равенство $\chi(S) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно разложить S в сумму циклов.

ЛЕММА 8.4. Пусть ν, μ лежат в одной компоненте. Тогда существует цепочка $\nu_1 = \nu, \nu_2, \dots, \nu_k = \mu$ такая, что

$$\chi(E_{\nu_j \nu_{j+1}} + E_{\nu_{j+1} \nu_j}) \neq 0.$$

Отметим, что

$$E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu} = \sigma[\mu\nu].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем цикл $\sigma[l_1 \dots l_p]$, содержащий ν и μ . Тогда

$$\sigma[l_1 \dots l_p] + \sigma[l_1 \dots l_p]^t = \sigma[l_1 l_2] + \sigma[l_2 l_3] + \dots + \sigma[l_p l_1].$$

Так как $\chi(\sigma + \sigma^t) = |\chi(\sigma)|^2 \neq 0$, мы имеем $\chi(\sigma[l_k l_{k+1}]) \neq 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8.5. Пусть $\chi(\sigma[l_1 l_2]) = 0$. Тогда для любого цикла $\sigma[l_1 l_2 \dots l_p]$ выполнено равенство $\chi(\sigma[l_1 l_2 \dots l_p]) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица

$$(\sigma[l_1 l_2 \dots l_p] + \sigma[l_1 l_2 \dots l_p]^t) - \sigma[l_1 l_2]$$

содержится в Γ .

8.6. Доказательство теоремы 8.1. Сохраним обозначения предыдущего пункта. Рассмотрим для определенности компоненту, содержащую цвет $\nu = 1$. Без ограничения общности можно считать, что компонента состоит из идущих подряд цветов $\nu = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим граф Δ , вершинами которого являются точки $1, 2, \dots, n$, а ребро соединяет точки μ и ν , если $\chi(\sigma[\mu\nu]) \neq 0$. Рассмотрим произвольное остовное дерево Ξ этого графа.

Рассмотрим группу $K[1, 0, \dots, 0]$, подпространство V векторов, неподвижных относительно $K[1, 0, \dots, 0]$, и представление полугруппы

$$\Gamma_1 := K[1, 0, \dots, 0] \setminus G/K[1, 0, \dots, 0]$$

в V . Рассмотрим элементы π_j полугруппы, заданные картинками типа изображенных на рис. 20.

Рис. 20. Элементы π_j

Легко видеть, что $\pi_j^2 = \pi_j$. Поэтому соответствующие операторы P_j в V являются ортогональными проекторами.

Заметим, что

$$P_i P_j P_i = P_i \cdot \chi(\sigma[ij]).$$

В левой части стоит положительный оператор, поэтому

$$\chi(\sigma(ij)) \geq 0.$$

Выпишем чуть более общее равенство. Для цикла $\sigma[\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q]$ имеем

$$P_{\nu_q} P_{\nu_1} P_{\nu_2} \dots P_{\nu_q} = \chi(\sigma[\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q]) P_{\nu_q}. \quad (8.2)$$

ЛЕММА 8.6. *Для любого $j \leq n$ образ проектора P_j одномерен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор P_1 является проектором на сферический вектор. Пусть $\chi(\sigma[1j]) = s \neq 0$. Тогда $P_1 P_j P_1 = s P_1$, следовательно, $P_j \neq 0$. С другой стороны, $P_j P_1 P_j = s P_j$, поэтому ранг P_j не превосходит 1. Таким образом, для всех j , соединенных с 1 ребром графа Δ , мы имеем $\text{rk } P_j = 1$. Далее повторяем то же рассуждение с P_j вместо P_1 и ссылаемся на связность графа Δ . Лемма доказана.

Обозначим через L_ν прямую $P_\nu V$. Выберем в L_1 единичный вектор v_1 . Пусть $\nu_1 = 1, \nu_2, \dots, \nu_q = \nu$ — путь из 1 в ν по остовному дереву Ξ . Рассмотрим вектор

$$w_\nu := P_{\nu_q} \dots P_{\nu_1} v_1 \in L_\nu.$$

Этот вектор не равен нулю, более того,

$$\begin{aligned} \langle w_\nu, w_\nu \rangle &= \langle P_{\nu_q} \dots P_{\nu_1} v_1, P_{\nu_q} \dots P_{\nu_1} v_1 \rangle = \langle P_{\nu_1} \dots P_{\nu_q} \dots P_{\nu_1} v_1, v_1 \rangle \\ &= \langle v_1, v_1 \rangle \chi \left(\sum E_{\nu_q \nu_{q+1}} + \sum E_{\nu_{q+1} \nu_q} \right) = \langle v_1, v_1 \rangle \prod_q \chi(\sigma[\nu_q \nu_{q+1}]). \end{aligned}$$

Положим

$$v_\nu := \frac{w_\nu}{\|w_\nu\|}.$$

Тогда для пар μ, ν , являющихся соседними вершинами остовного дерева, имеем

$$\langle v_\mu, v_\nu \rangle = \chi(\sigma[\mu\nu])^{-1/2}. \quad (8.3)$$

Пусть S — матрица размера $n \times n$ с неотрицательными целыми элементами (как и раньше, будем считать, что диагональные элементы матрицы не определены, условий (8.1) мы не налагаем). Положим

$$\psi(S) = \prod_{\mu \neq \nu} \langle v_\mu, v_\nu \rangle^{s_{\mu\nu}}.$$

ЛЕММА 8.7. Если S удовлетворяет условию

$$\sum_{\mu: \mu \leq n, \mu \neq \nu} s_{\mu\nu} = \sum_{\mu: \mu \leq n, \mu \neq \nu} s_{\nu\mu}, \quad (8.4)$$

то $\psi(S) = \chi(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что полугруппа $\Gamma_{(1)}$ всех S , удовлетворяющих (8.4), порождается циклами. Если цикл не содержится в графе, то в обеих частях равенства (8.4) стоит нуль. Если цикл имеет вид $\sigma[\mu\nu]$, где $\mu\nu$ – ребро остоного дерева, то обе части равенства совпадают в силу (8.3). Пусть $\mu\nu$ – ребро графа Δ , не лежащее в дереве Ξ . Добавляя $\mu\nu$ к Ξ , мы получаем граф с единственным циклом. Пройдем его в направлении $\mu\nu$ и возьмем соответствующий элемент $\sigma[\kappa_1 \dots \kappa_p]$ (где $\kappa_1 = \nu$, $\kappa_p = \mu$) полугруппы $\Gamma_{(1)}$. Для этого случая равенство (8.4) сводится к (8.2).

Теперь берем произвольный цикл C , проходящий по ребрам Δ . Он является линейной комбинацией с целыми коэффициентами циклов $\sigma[\mu\nu]$ и только что определенных циклов $\sigma[\kappa_1 \dots \kappa_p]$. Учитывая, что значения ψ на циклах $\sigma[\mu\nu]$, $\sigma[\kappa_1 \dots \kappa_p]$ обратимы, мы получаем, что утверждение верно и для C . Лемма доказана.

Применяя лемму 8.7 ко всем компонентам множества $\{1, \dots, t\}$, мы получаем теорему 8.1.

8.7. Замечания. Как мы видели, существует много сферических пар $G \supset K$, связанных с бесконечной симметрической группой. Полнота списков сферических функций (см. гипотезы из п. 3.16) сейчас доказана лишь в следующих случаях: теорема Тома, теорема Нессонова и еще три случая, родственных бисимметрической группе, рассмотренных Ольшанским в [6]:

- 1) $G = S_{2\infty}$, K – гипероктаэдральная группа $S_\infty * \mathbb{Z}_2$;
- 2) $G = S_{2\infty+1}$, $K = S_\infty * \mathbb{Z}_2$;
- 3) $G = S_{\infty+1} \times S_\infty$, $K = \text{diag } S_\infty$.

При переходе на язык шлейфов видно, что эти 5 пар действительно проще остальных. Соответствующие комбинаторные многообразия одномерны, а дополнительная структура, приписываемая компонентам (линиям), является числом (“длина” в [6]), а не раскрашенным замощением, как это происходит в общих конструкциях.

Есть и другие случаи, обладающие упомянутым свойством. Один из них – симметрическая группа $S_{3\infty}$ с подгруппой $(S_\infty * \mathbb{Z}_2) \times S_\infty$ (можно рассматривать $S_{4\infty} \supset (S_\infty * \mathbb{Z}_2) \times S_\infty \times S_\infty$ и т. д., а два гипероктаэдральных сомножителя – уже сложный случай).

Следующими по уровню сложности выглядят сферические пары, связанные с чипами, прежде всего пример из п. 4.4 и пара, рассматривавшаяся Нессоновым в [66].

Список литературы

- [1] E. Thoma, “Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe”, *Math. Z.*, **85**:1 (1964), 40–61.
- [2] A. Lieberman, “The structure of certain unitary representations of infinite symmetric groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 189–198.
- [3] А. М. Вершик, С. В. Керов, “Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы”, *Докл. АН СССР*, **257**:5 (1981), 1037–1040; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Characters and factor representations of the infinite symmetric group”, *Soviet Math. Dokl.*, **23**:2 (1981), 389–392.
- [4] А. М. Вершик, “Totally nonfree actions and the infinite symmetric group”, *Mosc. Math. J.*, **12**:1 (2012), 193–212.
- [5] А. М. Вершик, С. В. Керов, “Асимптотическая теория характеров симметрической группы”, *Функц. анализ и прил.*, **15**:4 (1981), 15–27; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Asymptotic theory of characters of the symmetric group”, *Funct. Anal. Appl.*, **15**:4 (1981), 246–255.
- [6] Г. И. Ольшанский, “Унитарные представления (G, K) -пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ ”, *Алгебра и анализ*, **1**:4 (1989), 178–209; англ. пер.: G. I. Ol’shanskii, “Unitary representations of (G, K) -pairs that are connected with the infinite symmetric group $S(\infty)$ ”, *Leningrad Math. J.*, **1**:4 (1990), 983–1014.
- [7] S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, “Harmonic analysis on the infinite symmetric group”, *Invent. Math.*, **158**:3 (2004), 551–642.
- [8] M. Atiyah, “Topological quantum field theories”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **68** (1988), 175–186.
- [9] C. Teleman, *Five lectures on topological field theory*, 2014, 36 pp.
<http://math.berkeley.edu/~teleman/math/barclect.pdf>
- [10] Р. М. Свитцер, *Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии*, Наука, М., 1985, 607 с.; пер. с англ.: R. M. Switzer, *Algebraic topology – homotopy and homology*, Grundlehren Math. Wiss., **212**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975, xii+526 pp.
- [11] G. B. Segal, “The definition of conformal field theory”, *Differential geometrical methods in theoretical physics* (Como, 1987), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **250**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, 165–171.
- [12] Ю. А. Неретин, “Голоморфные продолжения представлений группы диффеоморфизмов окружности”, *Матем. сб.*, **180**:5 (1989), 635–657; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Holomorphic extensions of representations of the group of diffeomorphisms of the circle”, *Math. USSR-Sb.*, **67**:1 (1990), 75–97.
- [13] J. C. Baez, “An introduction to spin foam models of BF theory and quantum gravity”, *Geometry and quantum physics* (Schladming, 1999), Lecture Notes in Phys., **543**, Springer, Berlin, 2000, 25–93.
- [14] S. M. Natanzon, “Cyclic foam topological field theories”, *J. Geom. Phys.*, **60**:6-8 (2010), 874–883.
- [15] Yu. A. Neretin, “Infinite tri-symmetric group, multiplication of double cosets, and checker topological field theories”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2012**:3 (2012), 501–523.
- [16] Yu. A. Neretin, *Infinite symmetric group and combinatorial descriptions of semigroups of double cosets*, 2011, 39 pp., [arXiv:1106.1161](https://arxiv.org/abs/1106.1161).
- [17] A. A. Gaifullin, Yu. A. Neretin, *Infinite symmetric group and bordisms of pseudo-manifolds*, 2015, 14 pp., [arXiv:1501.04062](https://arxiv.org/abs/1501.04062).

- [18] Ж. Диксмье, *C*-алгебры и их приложения*, Наука, М., 1974, 400 с.; пер. с фр.: J. Dixmier, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Cahiers Scientifiques, **XXIX**, Gauthier-Villars & Cie, Éditeur-Imprimeur, Paris, 1964, xi+382 pp.
- [19] E. Thoma, “Eine Charakterisierung diskreter Gruppen vom Typ I”, *Invent. Math.*, **6**:3 (1968), 190–196.
- [20] А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани, *Теоремы и задачи функционального анализа*, Наука, М., 1979, 382 с.; англ. пер.: A. A. Kirillov, A. D. Gvishiani, *Theorems and problems in functional analysis*, Problem Books in Math., Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, ix+347 pp.
- [21] Д. А. Райков, “О пополнении топологических групп”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:6 (1946), 513–528.
- [22] Н. Бурбаки, *Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства*, Наука, М., 1969, 392 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Première partie. (Fascicule III.) Livre III. Topologie générale*, Chap. 3: Groupes topologiques. Chap. 4: Nombres réels, 3ème éd., rev. et augm., Actualités Sci. Indust., **1143**, Hermann, Paris, 1960, 236 pp.; Chap. V: Groupes à un paramètre. Chap. VI: Espaces numériques et espaces projectifs. Chap. VII: Les groupes additifs R^n . Chap. VIII: Nombres complexes, Actualités Sci. Indust., **1235**, 1963, 151 pp.
- [23] A. S. Kechris, C. Rosendal, “Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures”, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **94**:2 (2007), 302–350.
- [24] H. Becker, A. S. Kechris, *The descriptive set theory of Polish groups actions*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **232**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, xii+136 pp.
- [25] T. Tsankov, “Automatic continuity for the unitary group”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **141**:10 (2013), 3673–3680.
- [26] F. M. Goodman, P. de la Harpe, V. F. R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **14**, Springer-Verlag, New York, 1989, x+288 pp.
- [27] Yu. A. Neretin, *Lectures on Gaussian integral operators and classical groups*, EMS Ser. Lect. Math., Eur. Math. Soc. (EMS), Zürich, 2011, xii+559 pp.
- [28] M. Krämer, “Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen”, *Compositio Math.*, **38**:2 (1979), 129–153.
- [29] G. I. Ol’shanskii, “Unitary representations of infinite dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe”, *Representation of Lie groups and related topics*, Adv. Stud. Contemp. Math., **7**, Gordon and Breach, New York, 1990, 269–463.
- [30] Н. И. Нессонов, “Фактор-представления группы $GL(\infty)$ и допустимые представления $GL(\infty)^X$. I”, *Матем. физика, анализ, геометрия. Харьковский матем. журн.*, **10**:2 (2003), 167–187; “II”, **10**:4, 524–556.
- [31] Ю. А. Неретин, “Сферичность и умножение двойных классов смежности для бесконечномерных классических групп”, *Функц. анализ и его прил.*, **45**:3 (2011), 79–96; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Sphericity and multiplication of double cosets for infinite-dimensional classical groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **45**:3 (2011), 225–239.
- [32] Yu. A. Neretin, *The subgroup $PSL_2(\mathbb{R})$ is spherical in the group of diffeomorphisms of the circle*, 2015, 6 pp., arXiv: 1501.05820.
- [33] А. Ю. Окуньков, “Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы”, *Функц. анализ и его прил.*, **28**:2 (1994), 31–40; англ. пер.: A. Yu. Okounkov, “Thoma’s theorem and representations of the infinite bisymmetric group”, *Funct. Anal. Appl.*, **28**:2 (1994), 100–107.
- [34] Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, УРСС, М., 1998, 431 с.; англ. пер.: Yu. A. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-*

- dimensional groups*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **16**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1996, xiv+417 pp.
- [35] Р. С. Исмагилов, “Элементарные сферические функции на группе $SL(2, P)$ над полем P , не являющимся локально компактным, относительно подгруппы матриц с целыми элементами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:2 (1967), 361–390; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Elementary spherical functions on the group $SL(2, P)$ over a field P , which is not locally compact, with respect to the subgroup of matrices with integral elements”, *Math. USSR-Izv.*, **1**:2 (1967), 349–380.
 - [36] Yu. A. Neretin, “Multi-operator colligations and multivariate characteristic functions”, *Anal. Math. Phys.*, **1**:2-3 (2011), 121–138.
 - [37] Yu. A. Neretin, *Multiplication of conjugacy classes, colligations, and characteristic functions of matrix argument*, 2012 (v2 – 2015), 20 pp., arXiv: 1211.7091.
 - [38] Ю. А. Неретин, “Бесконечномерные p -адические группы, полугруппы двойных классов смежности и внутренние функции на ансамблях Брюа–Титса”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:3 (2015), 87–130; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Infinite-dimensional p -adic groups, semigroups of double cosets, and inner functions on Bruhat–Tits buildings”, *Izv. Math.*, **79**:3 (2015), 512–553.
 - [39] Ю. А. Неретин, “Категории бистochastic мер и представления некоторых бесконечномерных групп”, *Матем. сб.*, **183**:2 (1992), 52–76; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Categories of bistochastic measures, and representations of some infinite-dimensional groups”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75**:1 (1993), 197–219.
 - [40] Yu. A. Neretin, “Spreading maps (polymorphisms), symmetries of Poisson processes, and matching summation”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. VII*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **292**, ПОМИ, СПб., 2002, 62–91; *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **126**:2 (2005), 1077–1094.
 - [41] Yu. Neretin, “Symmetries of Gaussian measures and operator colligations”, *J. Funct. Anal.*, **263**:3 (2012), 782–802.
 - [42] Ş. Strătilă, D. Voiculescu, *Representations of AF-algebras and of the group $U(\infty)$* , Lecture Notes in Math., **486**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975, viii+169 pp.
 - [43] А. М. Вершик, С. В. Керов, “Характеры и фактор-представления бесконечномерной унитарной группы”, *Докл. АН СССР*, **267**:2 (1982), 272–276; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Characters and factor representations of the infinite unitary group”, *Soviet Math. Dokl.*, **26**:3 (1982), 570–574.
 - [44] N. Obata, “Certain unitary representations of the infinite symmetric group. I”, *Nagoya Math. J.*, **105** (1987), 109–119; “II”, *Nagoya Math. J.*, **106** (1987), 143–162.
 - [45] G. I. Olshansky, “Unitary representations of the infinite symmetric group: a semigroup approach”, *Representations of Lie groups and Lie algebras*, Pt. 2 (Budapest, 1971), Akad. Kiadó, Budapest, 1985, 181–197.
 - [46] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1972, 336 с.; англ. пер.: A. A. Kirillov, *Elements of the theory of representations*, Grundlehren Math. Wiss., **220**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, xi+315 pp.
 - [47] Ж.-П. Серр, *Линейные представления конечных групп*, Мир, М., 1970, 132 с.; пер. с англ.: J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967, xii+135 pp. (not consecutively paged).
 - [48] Г. И. Олшанский, “Бесконечномерные классические группы конечного R -ранга: описание представлений и асимптотическая теория”, *Функц. анализ и его прил.*, **18**:1 (1984), 28–42; англ. пер.: G. I. Ol’shanskii, “Infinite-dimensional classical groups of finite r -rank: description of representations and asymptotic theory”, *Funct. Anal. Appl.*, **18**:1 (1984), 22–34.

- [49] Дж. фон Нейман, “О бесконечных тензорных произведениях”, *Избранные труды по функциональному анализу*, **1**, Наука, М., 1987, 202–276; перевод с англ. J. von Neumann, “On infinite direct products”, *Compositio Math.*, **6** (1938), 1–77; reprinted in: *Collected works*, v. 3: *Rings of operators*, Pergamon Press, New York–Oxford–London–Paris, 1961, 323–399.
- [50] Г. В. Белый, “О расширениях Галуа максимального кругового поля”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:2 (1979), 267–276; англ. пер.: G. V. Belyi, “On Galois extensions of a maximal cyclotomic field”, *Math. USSR-Izv.*, **14**:2 (1980), 247–256.
- [51] Г. В. Белый, “Новое доказательство теоремы о трех точках”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 21–24; англ. пер.: G. V. Belyi, “Another proof of the three points theorem”, *Sb. Math.*, **193**:3 (2002), 329–332.
- [52] Ю. А. Неретин, “Спектральные данные для пары матриц порядка 3 и действие группы $GL(2, \mathbb{Z})$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 93–102; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Spectral data for a pair of matrices of order three and an action of the group $GL(2, \mathbb{Z})$ ”, *Izv. Math.*, **75**:5 (2011), 959–969.
- [53] R. Brauer, “On algebras which are connected with the semisimple continuous groups”, *Ann. of Math. (2)*, **38**:4 (1937), 857–872.
- [54] С. В. Керов, “Реализации представлений полугруппы Брауэра”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IX*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **164**, Изд-во Наука, Ленингр. отд., Л., 1987, 189–193; англ. пер.: S. V. Kerov, “Realizations of representations of the Brauer semigroup”, *J. Soviet Math.*, **47**:2 (1989), 2503–2507.
- [55] A. V. Dudko, N. I. Nessonov, *Invariant states on the wreath product*, 2009, 37 pp., arXiv: 0903.4987.
- [56] Ю. А. Неретин, “Одно замечание о представлениях бесконечных симметрических групп”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXI*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **403**, ПОМИ, СПб., 2012, 103–109; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “A remark on representations of infinite symmetric groups”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **190**:3 (2013), 464–467.
- [57] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. II: *Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах*, Мир, М., 1975, 901 с.; пер. с англ.: E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis*, v. II: *Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups*, Grundlehren Math. Wiss., **152**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1970, ix+771 pp.
- [58] Г. Зейферт, В. Трельфалль, *Топология*, ГОНТИ, М.–Л., 1938, 400 с.; пер. с нем.: H. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, B. G. Teubner, Leipzig, 1934, iv+353 pp.; англ. пер.: H. Seifert, W. Threlfall, *A textbook of topology*, Pure Appl. Math., **89**, Academic Press, Inc., New York–London, 1980, xvi+437 pp.
- [59] A. Gaifullin, “Universal realisers for homology classes”, *Geom. Topol.*, **17**:3 (2013), 1745–1772.
- [60] M. Goresky, R. MacPherson, “Intersection homology theory”, *Topology*, **19**:2 (1980), 135–162.
- [61] M. Pezzana, “Diagrammi di Heegaard e triangolazione contratta”, Collection in memory of Enrico Bompiani, *Boll. Un. Mat. Ital. (4)*, **12**:3, suppl. (1975), 98–105.
- [62] M. Ferri, “Una rappresentazione delle n -varietà topologiche triangolabili mediante grafi $(n + 1)$ -colorati”, *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)*, **13**:1 (1976), 250–260.
- [63] M. Ferri, C. Gagliardi, L. Grasselli, “A graph-theoretical representation of PL-manifolds: a survey on crystallizations”, *Aequationes Math.*, **31**:1 (1986), 121–141.

- [64] A. Gaifullin, “Combinatorial realisation of cycles and small covers”, *European Congress of Mathematics*, Proceedings of the 6th congress (6ECM) (Kraków, 2–7 July, 2012), Eur. Math. Soc., Zürich, 2013, 315–330; 2012, 14 pp., arXiv:1204.0208.
- [65] Н. И. Нессонов, “Представления $\mathfrak{S}_\infty$, допустимые относительно подгрупп Юнга”, *Матем. сб.*, **203**:3 (2012), 127–160; англ. пер.: N. I. Nessonov, “Representations of $\mathfrak{S}_\infty$ admissible with respect to Young subgroups”, *Sb. Math.*, **203**:3 (2012), 424–458.
- [66] Н. И. Нессонов, “КМШ-состояния на $\mathfrak{S}_\infty$, инвариантные относительно подгрупп Юнга”, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:2 (2013), 55–67; англ. пер.: N. I. Nessonov, “KMS states on $\mathfrak{S}_\infty$ invariant with respect to the Young subgroups”, *Funct. Anal. Appl.*, **47**:2 (2013), 127–137.

Юрий Александрович Неретин
(Yurii A. Neretin)

University of Vienna, Vienna, Austria;
Институт теоретической и экспериментальной
физики им. А. И. Алиханова;
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: neretin@mccme.ru

Поступила в редакцию
01.12.2014