Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Резвякова, О нулях дзета-функции Эпштейна на критической прямой, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 4, 213–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9671>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 18:29:03

О нулях дзета-функции Эпштейна на критической прямой

И. С. Резвякова

Пусть $Q(n, m) = an^2 + bnm + cm^2$ – положительно определенная квадратичная форма с целыми коэффициентами, причем $-D = b^2 - 4ac < 0$ – фундаментальный дискриминант. Рассмотрим дзета-функцию Эпштейна $\zeta_Q(s)$, задающуюся при $\operatorname{Re} s > 1$ рядом

$$\zeta_Q(s) = \sum_{(n,m) \neq (0,0)} (Q(n, m))^{-s}.$$

Известно, что $\zeta_Q(s)$ представляется в виде линейной комбинации L-функций с характеристиками Гекке на группе классов идеалов мнимого квадратичного расширения поля рациональных чисел $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, а именно,

$$\zeta_Q(s) = \frac{\varepsilon_{-D}}{h(-D)} \sum_{j=1}^h \overline{\psi_j(I_Q)} L(s, \psi_j),$$

где $h = h(-D)$ – число классов, ε_{-D} – число единиц, $I_Q = (a, b - i\sqrt{D}/2)$, а L-функции Гекке задаются следующим эйлеровым произведением по всем простым идеалам:

$$L(s, \psi_j) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\psi_j(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s} \right)^{-1},$$

где $N\mathfrak{p}$ – норма идеала $\mathfrak{p}$. Дзета-функция Эпштейна мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа:

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \right)^{-s} \Gamma(s) \zeta_Q(s) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \right)^{1-s} \Gamma(1-s) \zeta_Q(1-s).$$

Таким образом, все комплексные нули $\zeta_Q(s)$ симметричны относительно критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, а также относительно вещественной оси. Если $h(-D) > 1$, то $\zeta_Q(s)$ не имеет эйлерова произведения. В этом случае аналог гипотезы Римана для нее не справедлив и можно доказать, что в любом прямоугольнике вида $\{0 < \operatorname{Im} s < T, a \leq \operatorname{Re} s \leq b\}$, где $1/2 < a < 1$, лежит порядка T нулей (см. [1], [2]). Существует гипотеза, что почти все нетривиальные (т. е. не являющиеся вещественными) нули дзета-функции Эпштейна лежат на критической прямой. Эта гипотеза была условно доказана Э. Бомбьери и Д. Хейчалом в 1987 г. в предположении справедливости гипотезы Римана для L-функций Гекке и ослабленной гипотезы Монтгомери о парной корреляции ординат их комплексных нулей. Нами доказан следующий безусловный результат.

ТЕОРЕМА 1. *Положительная доля нетривиальных нулей $\zeta_Q(s)$ лежит на критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.*

Эта теорема является одним из продолжений работы А. Сельберга [3], в которой он доказал, что положительная доля нетривиальных нулей дзета-функции Римана лежит на критической прямой. Аналогичные теоремы для более широкого класса L-функций, имеющих эйлерово произведение, можно найти в [4], [5]. Известные ранее результаты (которые по порядку, однако, слабее, чем результат настоящей теоремы) о нулях, лежащих на критической прямой, для некоторых линейных комбинаций L-функций можно найти в работах С. М. Воронина, А. А. Карацубы, С. А. Гриценко и автора. Впервые теорема о положительной доле нулей в случае

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/rm9671

линейной комбинации L-функций Дирихле появилась в конце 1990-х годов в записях А. Сельберга [6], где были также изложены идеи доказательства. Однако случай дзета-функции Эпштейна, как отмечено в [7], оставался открытым. На основе результатов работы [5] в [8] нами было получено обобщение работы [6] для случая линейной комбинации L-функций Гекке с комплексными характерами. Кроме методов работы [3] А. Сельберг опирался в [6] на предельную теорему для разности логарифмов L-функций на критической прямой. Пример доказательства предельной теоремы для дзета-функции Римана на критической прямой при помощи вероятностного неравенства Берри–Эссеена и оценок моментов из [9] можно найти в [10]. Для доказательства теоремы 1 в случае дзета-функции Эпштейна помимо результатов работы [8] необходимы дополнительные утверждения для L-функций с вещественными характерами Гекке (т. е. L-функций, являющихся произведением двух L-функций Дирихле). Эти утверждения связаны с получением правильной по порядку оценки среднего значения произведения L-функций и соответствующего “успокаивающего” множителя и сводятся в итоге к получению асимптотической формулы в аддитивной проблеме с коэффициентами соответствующей L-функции. Сформулируем некоторые основные утверждения, необходимые для доказательства теоремы 1.

ЛЕММА 1. Пусть $\chi_{a,b}$ – характеристическая функция произвольного интервала (a, b) . Для двух различных L-функций Гекке имеет место равенство

$$\int_T^{2T} \chi_{a,b} \left(\frac{\log |L_j(1/2 + it)| - \log |L_{j'}(1/2 + it)|}{\sqrt{(n_j + n_{j'})\pi \log \log T}} \right) dt = T \int_a^b e^{-\pi u^2} du + o(T) \quad (1)$$

при $T \rightarrow +\infty$, где $n_j = 1$ или 2 в зависимости от того, является характер Гекке комплексным или вещественным.

ЛЕММА 2. Пусть $r(n)$ – коэффициенты L-функции с вещественным характером Гекке на группе классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, т. е. $r(n) = \sum_{d|n} \chi_v(d) \chi_w(n/d)$ ($vw = D$) есть свертка двух характеров Дирихле, $(m_1, m_2) = 1$, l – натуральное число. Тогда справедливо тождество

$$\sum_{\substack{m_2 n_2 - m_1 n_1 = l \\ n_1 < N}} r(n_1) r(n_2) = c(m_1, m_2, l, v, w) N + R,$$

где остаток R обладает свойством $R \ll_{m_1, m_2, l} N^{7/8+\varepsilon}$ и степенным образом зависит от параметров m_1, m_2, l , а постоянная $c = c(m_1, m_2, l, v, w)$ явно вычисляется.

Список литературы

- [1] H. Davenport, H. Heilbronn, *J. Lond. Math. Soc.*, **S1-11:3** (1936), 181–185; **S1-11:4** (1936), 307–312. [2] С. М. Воронин, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **142**, 1976, 135–147. [3] A. Selberg, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I*, **1942:10** (1942), 59 pp.. [4] J. L. Hafner, *Math. Ann.*, **264** (1983), 21–37. [5] И. С. Резвякова, *Матем. заметки*, **88:3** (2010), 456–475. [6] A. Selberg, *Linear combinations of L-functions and zeros on the critical line*, 1999, 18 pp., <http://www.msri.org/realvideo/ln/msri/1999/random/selberg/1/main.html>. [7] Э. Бомбьери, А. Гош, *УМН*, **66:2**(398) (2011), 15–66. [8] I. S. Rezvyakova, *On the zeros of linear combinations of degree two L-functions on the critical line. Selberg’s approach*, 2015, 22 pp., DOI: 10.13140/RG.2.1.1488.5281. [9] A. Selberg, *Arch. Math. Naturvid.*, **48:5** (1946), 89–155. [10] A. Ghosh, *J. Number Theory*, **17:1** (1983), 93–102.

Ирина Сергеевна Резвякова
(Irina S. Rezvyakova)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

E-mail: irezvyakova@gmail.com, rezvyakova@mi.ras.ru

Представлено Д. О. Орловым
Принято редколлегией

05.05.2015