Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Комлов, С. П. Суетин, О распределении нулей полиномов Эрмита–Паде, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 6, 211–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9672>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 12:39:21

О распределении нулей полиномов Эрмита–Паде

А. В. Комлов, С. П. Суетин

1. Пусть аналитическая функция f задана представлением

$$f(z) = \prod_{j=1}^q \left(\frac{z - e_{2j-1}}{z - e_{2j}} \right)^\alpha, \quad (1)$$

где $2\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $-1 = e_1 < \dots < e_{2q} = 1$. Функция f является многозначной аналитической функцией в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{e_1, \dots, e_{2q}\}$, голоморфной в точке $z = \infty$; зафиксируем росток f в точке $z = \infty$ условием $f(\infty) = 1$. Пусть $E = \bigcup_{j=1}^q [e_{2j-1}, e_{2j}]$. Функция f продолжается из точки $z = \infty$ в область $D := \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ как голоморфная функция.

Пусть $P_{n,0}, P_{n,1} \in \mathbb{C}_n[z]$, $P_{n,j} \not\equiv 0$, – полиномы Паде степени $n \in \mathbb{N}$ для функции f :

$$H_n(z) := (P_{n,0} \cdot 1 + P_{n,1}f)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Функции 1 и f рационально независимы, поэтому $H_n(z) \not\equiv 0$. Соотношением (2) полиномы $P_{n,j}$ определены не единственным образом. Но рациональная функция $[n/n]_f := -P_{n,0}/P_{n,1}$ определена однозначно и называется диагональной аппроксимацией Паде (АП) функции f . Для произвольного полинома $Q \in \mathbb{C}[z]$ через $\chi(Q)$ обозначим меру, считающую нули Q с учетом их кратностей. Для произвольной меры μ , $\text{supp } \mu \neq \overline{\mathbb{C}}$, через $V_*^\mu(z)$ обозначим соответствующий сферически нормированный логарифмический потенциал: $V_*^\mu(z) := - \int_{|\zeta| \leq 1} \log |z - \zeta| d\mu(\zeta) - \int_{|\zeta| > 1} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(\zeta)$.

Пусть $\lambda_E = \lambda_E^{\text{rob}}$, $\text{supp } \lambda_E \subset E$, – единичная мера, равновесная на E : $V_*^{\lambda_E}(z) \equiv \text{const}$, $z \in E$. Из общей теории Штала [10], [11] вытекает, что существует предельное распределение нулей полиномов Паде функции f , которое совпадает с мерой λ_E :

$$\frac{1}{n} \chi(P_{n,j}) \xrightarrow{*} \lambda_E, \quad n \rightarrow \infty, \quad j = 0, 1. \quad (3)$$

Соотношения вида (3) лежат в основе доказанной Г. Шталем [10] теоремы о сходимости диагональных АП для произвольной многозначной функции с конечным множеством точек ветвления. Доказательство соотношений (3) опирается на следующие соотношения ортогональности, которым удовлетворяют полиномы Паде $P_{n,1}$:

$$\int_E P_{n,1}(x) x^k Q(x) \Delta f(x) dx = 0, \quad k = m, m+1, \dots, n-1, \quad (4)$$

где $Q \in \mathbb{C}[x]$ – полином степени m такой, что функция $Q(x)(\Delta f)^2(x)$ непрерывна на E , $\Delta f(x) := f^+(x) - f^-(x)$ – скачок функции f на $E^0 = \bigcup_{j=1}^q (e_{2j-1}, e_{2j})$.

2. Пусть $Q_{n,0}, Q_{n,1}, Q_{n,2} \in \mathbb{C}_n[z]$, $Q_{n,j} \not\equiv 0$, – полиномы Эрмита–Паде (1-го рода) степени n для набора функций $[1, f, f^2]$:

$$R_n(z) := (Q_{n,0} \cdot 1 + Q_{n,1}f + Q_{n,2}f^2)(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Соотношением (5) полиномы $Q_{n,j}$ определены не единственным образом, но их отношения однозначно определены. Функции 1, f , f^2 рационально независимы. Поэтому $R_n(z) \not\equiv 0$. Пара функций f , f^2 образует систему Никишина [8], [3].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/rm9672

Теория Шталя была обобщена В. И. Буслаевым [1], [2] на случай многоточечных АП. Так же как и в теории Шталя, теорема о сходимости многоточечных АП доказана Буслаевым на основе результата о предельном распределении нулей числителей и знаменателей многоточечных АП. В теории аппроксимаций Эрмита–Паде нет общего результата о предельном распределении нулей полиномов Эрмита–Паде, который хотя бы в какой-то степени можно было сравнить с результатами Шталя и Буслаева.

Пусть $g_E(\zeta, z)$ – функция Грина для области D , $G_E^\mu(z) := \int g_E(\zeta, z) d\mu(\zeta)$ – гринов (относительно D) потенциал меры μ , $\text{supp } \mu \neq \overline{\mathbb{C}}$, $F := \overline{\mathbb{R}} \setminus E$. Стандартными методами теории потенциала (см. [6], [4], [5]) доказывается, что существует единственная единичная мера η_F с носителем на F , равновесная для смешанного потенциала $3V_*^\mu(z) + G_E^\mu(z)$ с внешним полем: $3V_*^{\eta_F}(z) + G_E^{\eta_F}(z) + 3g_E(z, \infty) \equiv \text{const}$, $z \in F$.

Основной результат настоящей работы составляет следующая теорема о предельном распределении нулей полиномов Эрмита–Паде.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция f задана представлением (1), где $2\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $-1 = e_1 < e_2 < \dots < e_{2q} = 1$, $Q_{n,j}$, $j = 0, 1, 2$, – соответствующие полиномы Эрмита–Паде для набора $[1, f, f^2]$. Тогда существует предельное распределение нулей полиномов Эрмита–Паде, которое совпадает с равновесной мерой η_F (ср. (3)):

$$\frac{1}{n} \chi(Q_{n,j}) \xrightarrow{*} \eta_F, \quad n \rightarrow \infty, \quad j = 0, 1, 2. \quad (6)$$

Для случая $q = 1$ утверждение теоремы 1 вытекает непосредственно из [7; теорема 1.6]. Доказательство теоремы 1 опирается на следующие соотношения ортогональности, которым удовлетворяют полиномы $Q_{n,2}$ (ср. (4)):

$$\int_E Q_{n,2}(x) P_{n+1+k,1}(x) Q(x) \Delta f^2(x) dx = 0, \quad k = m, m+1, \dots, n-1. \quad (7)$$

Соотношения (7) позволяют воспользоваться методом Гончара–Рахманова–Шталя (GRS-методом, см. [10], [5], а также [9]). Вопрос о сходимости рациональных функций, соответствующих полиномам Эрмита–Паде, в рассматриваемом здесь случае остается открытым (ср. [7; теорема 1.8]).

Список литературы

- [1] В. И. Буслаев, *Матем. сб.*, **204:2** (2013), 39–72. [2] В. И. Буслаев, *Матем. сб.*, **206:2** (2015), 5–30. [3] С. Дельво, А. Лопес, Г. Лопес Лагомасино, *Матем. сб.*, **204:1** (2013), 47–78. [4] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **125(167):1(9)** (1984), 119–130. [5] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **134(176):3(11)** (1987), 306–352. [6] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966, 515 с. [7] А. Martínez-Finkelshtein, Е. А. Rakhmanov, S. P. Suetin, *Contemporary Mathematics* (to appear); [arXiv: 1502.01202](https://arxiv.org/abs/1502.01202). [8] Е. М. Никишин, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, №2, 33–41. [9] Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **204:9** (2013), 115–160. [10] Н. Stahl, *Constr. Approx.*, **2** (1986), 225–240. [11] Н. Stahl, *J. Approx. Theory*, **91:2** (1997), 139–204.

А. В. Комлов (A. V. Komlov)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: komlov@mi.ras.ru

Представлено С. Ю. Немировским

Принято редколлегией
14.06.2015

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: suetin@mi.ras.ru